AZ ÓRAPARADOXONRÓL

Hraskó Péter
PTE Elméleti Fizika Tanszék

Az óraparadoxon (vagy másik nevén az ikerparadoxon) fogalmi szempontból a relativitáselmélet egyik legfontosabb következménye. A jelen dolgozat a paradoxon egy tulajdonképpen technikai jellegű, mégis zavarba ejtő aspektusával foglalkozik: A jelenség korrekt leírási módjával a *gyorsuló* óra (testvér) szempontjából. Meg fogjuk mutatni, hogy a *deszinkronizáció* fogalma alapján ez a tárgyalás teljesen átláthatóvá tehető. A cikk ezért két fejezetből áll. Az elsőben a deszinkronizációról lesz szó, magát az óraparadoxont pedig a másodikban diszkutáljuk. Mindezt praktikusan matematika nélkül tesszük, a matematikai részleteket és kiegészítéseket a két függelékben tárgyaljuk.

Az óraparadoxonról nemrég jelent meg *Bokor Nándor* dolgozata[1] a *Szemlé*ben. Bokor azt a kérdést elemzi, vajon helyes-e az az elterjedt vélekedés, hogy az ikerparadoxon oka a gyorsulás. Ha jól látom, a jelen dolgozat nem kínál új szempontot e kérdés megválaszolásához.

A deszinkronizáció

Nyugodjon egy vonat a pályatest $\mathcal{J}_0$ vonatkoztatási rendszerében, amelyben a Minkowski-féle (fényjelekkel szinkronizált) koordinátaidőt a sűrűn (így többek között a vonaton is) széthelyezett nyugvó virtuális (elképzelt) ideális órák mutatják. Tegyük fel, hogy ezek közül kettő valóságos óra, amelyek a vonathoz vannak rögzítve. A bal oldali óra legyen az *A,* a jobb oldali a *B*.

Képzeljük el, hogy egy nagyon rövid fényjel „cikázik” ide-oda az órák között. A két óra helyes szinkronizáltsága következtében az a $\overrightarrow{\Delta} t$ idő, ami alatt a jel az *A*-ból a *B*-be ér, pontosan megegyezik a visszaúton eltelt $\overleftarrow{\Delta} t$ idővel. Ha az órák közötti távolság Δx, akkor mindkét időtartam $\Delta x/c$-vel egyenlő. Az *1. táblázat* példájában $\overrightarrow{\Delta} t = \overleftarrow{\Delta} t = 10$.

1. táblázat

A nyugvó órák mutatóállása a fényjelek visszatükrözésének pillanatában

Az *A* óra mutatóállása	10		30		50		70
A *B* óra mutatóállása		20		40		60	

Tegyük fel most, hogy a vonat elindul jobbra, eléri az *U* sebességet és ezután ezzel a sebességgel halad tovább. A konstans *U* sebességű vonat inerciarendszer, amelyet $\mathcal{J}$-vel fogunk jelölni.

Az *A* és a *B* óra között eközben folyamatosan cikázik ide-oda a fényjel. Az oda- és a visszaút időtartama azonban változik. Az $\mathcal{J}_0$-ból (a töltésről) szemlélve a fényjel mozgását ezeket az időtartamokat a

$$c\,\overrightarrow{\Delta} t_0 = \Delta x_0 + U\,\overrightarrow{\Delta} t_0, \qquad c\,\overleftarrow{\Delta} t_0 = \Delta x_0 - U\,\overleftarrow{\Delta} t_0 \tag{1}$$

egyenletek határozzák meg, amelyekből

$$\overrightarrow{\Delta} t_0 = \frac{\Delta x_0}{c-U}, \quad \overleftarrow{\Delta} t_0 = \frac{\Delta x_0}{c+U}. \tag{2}$$

A képlet felírásánál figyelembe vettük, hogy amikor a vonat mozog, a nulla index segítségével meg kell különböztetnünk az $\mathcal{J}_0$-ban mért mennyiségeket az $\mathcal{J}$-ben mért (index nélküli) mennyiségektől. Nekünk azonban a $\overrightarrow{\Delta} t$-t és a $\overleftarrow{\Delta} t$-t kifejező képletekre van szükségünk, amelyek jobb oldalán a mozgó vonaton mért Δx távolság szerepel.

Az (1) első egyenlete azt fejezi ki, hogy az *A* órától elinduló fényjel és a vele egyszerre *U* sebességgel induló *B* óra Δt_0 koordinátaidővel később találkozik egymással. A *B* órán ezalatt

$$\overrightarrow{\Delta} t_0 \sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}$$

sajátidő telik el. Ezt az időtartamot jelöljük $\overrightarrow{\Delta} t$-vel, így

$$\overrightarrow{\Delta} t = \overrightarrow{\Delta} t_0 \sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}\,.$$

Ez a sajátidő-intervallum egyben koordinátaidő-intervallum is, hiszen a *B* egyike azoknak az óráknak, amelyek a vonaton a *t* koordinátaidőt mutatják.

Teljesen hasonlóan látható be a

$$\overleftarrow{\Delta} t = \overleftarrow{\Delta} t_0 \sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}$$

képlet is, amely az *A* óra sajátidejét fejezi ki. Végül a két óra közötti Δx vonati távolság a töltésről nézve kontrakciót szenved, ezért

$$\Delta x_0 = \Delta x \sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}\,.$$

Ha (2)-ben a nulla indexű mennyiségeket ezen képletek segítségével index nélküli mennyiségekkel fejezzük ki, a

$$\overrightarrow{\Delta} t = \frac{\Delta x}{c}\left(1 + \frac{U}{c}\right), \quad \overleftarrow{\Delta} t = \frac{\Delta x}{c}\left(1 - \frac{U}{c}\right)$$

[1] Az ikerparadoxon és a gyorsulás. *Fizikai Szemle 62* (2012) 90–95.

képletekre jutunk (a számpéldánkban az előbbi legyen mondjuk 12, az utóbbi pedig 8, *2. táblázat*).

2. táblázat

A mozgó órák mutatóállása a fényjelek visszatükrözésének pillanatában

Az *A* óra mutatóállása	10		30		50		70
A *B* óra mutatóállása		22		42		62	

Nyilvánvaló, hogy az *U* sebességgel mozgó vonat nyugalmi rendszerében – az $\mathfrak{I}$ inerciarendszerben – ez a két óra *nincs* helyesen szinkronizálva. Ha ugyanis megmérnénk a vonaton a fénysebességet, mindkét irányban egyformán *c*-nek találnánk. Természetesen utólag szinkronizálhatnánk őket például úgy, hogy a *B* óra mutatóállását megfelelő mértékben (a számpéldában 2-vel) visszaállítjuk (vagy az *A* óráét ugyanennyivel előrevisszük). Ezt azonban most nem tesszük meg, mert éppen azt akarjuk tisztázni, hogy milyen következményei vannak a gyorsulásnak, ha az egyszer már helyesen szinkronizált órákhoz többet már nem nyúlunk hozzá.

A két óra közötti deszinkronizáció mértékét a

$$\delta t_B = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\Delta} t - \overleftarrow{\Delta} t\right) = \frac{U \Delta x}{c^2} \tag{3}$$

formula határozza meg. Az Einstein-féle szinkronizációs eljárás szellemében ennyivel kellene visszaállítani a (gyorsulás irányába eső) *B* óra mutatóállását ahhoz, hogy helyesen legyen szinkronizálva *A*-val.

Vonjuk le a következtetést: amikor egy inerciarendszert gyorsítunk, a hozzá rögzített helyesen szinkronizált órák *deszinkronizálódnak.* A deszinkronizáció *nem* annak a következménye, hogy az órák szerkezetében a gyorsulás valamilyen változást okoz, hiszen ezek az órák ideális szerkezetűek, a külső behatásoktól teljesen függetlenül, a maguk monoton ritmusában járva a sajátidejüket mutatják. Ha az eredetileg nyugvó vonat padlóján állt egy labda, a vonat elindulásakor elkezd hátrafelé mozogni, és amikor a vonat már egyenletesen halad *U* sebességgel, a labda folyamatosan gurul hozzá képest ugyanezzel a sebességgel visszafelé (vagy legalábbis gurulna, ha a vonat elég hosszú volna). Ezt a mozgást nem az okozza, hogy valami hatott a labdára, hanem éppen ellenkezőleg: azért gurul a labda visszafelé, mert nem hatott rá semmi, ami arra kényszerítené, hogy átvegye a vonat sebességét.

A deszinkronizáció ugyanebbe a kategóriába tartozó tehetetlenségi jelenség.[2] Az órák a mozgó vonaton is úgy járnak tovább, ahogy a pálya $\mathfrak{I}_0$ inerciarendszerében szinkronizálták őket. Ez az inerciarendszer azonban „kiszaladt” alóluk, de ők nem vettek erről tudomást. Vagyis a deszinkronizáció végeredményben annak a következménye, hogy az órákkal *nem történt semmi,* mégis éppen olyan valóságos jelenség, mint a labda megindulása hátrafelé. Legnyilvánvalóbban a fénysebesség látszólagos megváltozásában jelentkezik, ahogy azt a *2. táblázat* mutatja, de más fontos következménye is van. Mielőtt azonban erre rátérnénk, foglaljuk össze a deszinkronizáció előjelszabályát:

> *Az órapár gyorsulás irányába eső tagja siet, a gyorsulással ellentétes irányba eső tagja késik a pár másik tagjához képest.*

A deszinkronizáció egy másik következményét a vonatos példa továbbgondolásával világítjuk meg. Képzeljük el a vonat egyik, mondjuk 60 méter hosszú, vasúti kocsiját, amelyben könnyen végig lehet sétálni, és méterenként faliórák találhatók rajta. Az utasok között van egy fizikus, aki már nagyon unja az utazást, és azzal próbálja agyonütni az időt, hogy menetirányban egyenletes *v* sebességgel végigsétál a kocsi végétől az elejéig, és közben gondosan ügyel arra, hogy a faliórák alapján az útja pontosan 1 percig tartson (Δt = 60 s). A séta időtartamát a karóráján is leméri, és azt találja, hogy a séta közben 1 percnél rövidebb idő telt el rajta.

– Persze, az idődilatáció – gondolja magában, – a

$$\Delta\tau = \Delta t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

képlet szerint pont ennek kellett történnie.

De gyakorló fizikusként ismeri a szabályt, hogy egy mérés nem mérés, ezért megismétli a sétáját, ezúttal visszafelé úgy, hogy a faliórák szerint megint 1 perc alatt érjen a kocsi egyik végéből a másikba. Meglepődve tapasztalja, hogy a karóráján ezúttal hosszabb idő telt el, mint az előbb. Természetesen először arra gyanakszik, hogy valami hibát követett el, de akárhányszor ismétli a kísérletet, a karóráján mindig ugyanazt a két különböző időtartamot olvassa le: A menetirányban a sajátidő kisebb, mint ellenkező irányban ($\overrightarrow{\Delta}\tau < \overleftarrow{\Delta}\tau$).

Némi töprengés után fizikusunknak eszébe jut a deszinkronizáció, amiről relativitáselmélet óráin hallott.

– Hogy is nem gondoltam rá azonnal? – csap a homlokára. – Hiszen amikor felszálltam a vonatra láttam a szerelőket, amint éppen azzal foglalkoznak, hogy az álló vonaton fényjelekkel szinkronizálják a faliórákat. Aztán amikor elindult a vonat, bekövetkezett a deszinkronizáció. Amikor előre megyek a faliórák által meghatározott sebességgel, akkor minden következő falióra a szükségesnél többet mutat. A visszaúton pont fordítva történik. Ezért van az, hogy a karórám az első esetben kevesebbet mutat, mint a

[2] Lényeges pont, hogy ha a fénysebesség nem lenne *minden* inerciarendszerben ugyanaz minden irányban, akkor az ideális órák sohase deszinkronizálódnának. Tegyük fel egy pillanatra, hogy a relativitáselmélet téves, van elektromágneses éter, amely történetesen az $\mathfrak{I}_0$-hoz (a töltéshez) képest nyugalomban van. A két táblázat ebben az esetben lényegében érvényben maradna, mégsem fejezne ki deszinkronizációt. Az $\mathfrak{I}$-beli fénysebesség ugyanis ilyen feltételek mellett *valóban* különbözne a két irányban, mert kizárólag *a nyugvó éterben* ($\mathfrak{I}_0$-ban) lenne izotróp. A két táblázat adatai ezt a tényt fejeznék ki teljesen korrekt módon. A deszinkronizáció ezért a fénysebesség állandóságának egyenes következménye.

másodikban. Mindenesetre most jól megtanultam, hogy ilyen esetekben nem használhatom a

$$\Delta\tau = \Delta t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

képletet a sajátidő meghatározására, mert az mindkét irányú sétára ugyanazt a sajátidőt adja.

Elhatározza, hogy küld egy SMS-t az egyik kollégájának és megkéri, keresse már elő valahonnan a

$$\Delta\tau = \Delta t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

képlet azon általánosabb alakját, amelyik az ő jelenlegi helyzetében is alkalmazható. Ezeket az információkat közli vele:

- Indulás előtt a faliórákat korrekt módon fényjelekkel szinkronizálták és azóta senki sem nyúlt hozzájuk.
- A vonat jelenleg egyenletes U sebességgel halad.
- A faliórák meg vannak számozva 0-tól 60-ig. Ezek tekinthetők x-koordinátáknak, és az egymás utáni órák közötti távolság az indulás előtt és most, az egyenletes sebesség elérése után is pontosan 1 méter.
- Amikor a kocsin végigsétálok, az órák helye és mutatóállása alapján a sebességem egy konstans v érték (történetesen v = 1 m/s sebességet választottam, de a keresett képlet szempontjából ennek nincs jelentősége).
- A kérés az, hogy küldje el azt a képletet, amely megadja a $\Delta\tau$ és a Δt kapcsolatát ebben az esetben.

A kért képlet nemsokára megérkezett. A figyelmes kolléga $\Delta\tau$ és Δt helyett az infinitezimális $d\tau$ és dt növekményekre írta fel, mert ez akkor is alkalmazható, amikor a sétálás v sebessége nem konstans ($v = v(t)$):

$$d\tau = dt \sqrt{\left(1 - \frac{Uv}{c^2}\right)^2 - \frac{v^2}{c^2}}\,. \tag{4}$$

Ez a képlet pozitív v-nél menetirányba, negatív v-nél az ellentétes irányba történő sétálásra vonatkozik.

Napokkal később, amikor utazó fizikusunk a munkahelyén találkozik a kollégájával, megkéri őt, mutassa meg a képlet levezetését. A magyarázat a következő:

Nézzük – mondjuk – a pozitív irányú séta egy dx infinitezimálisan rövid $A \to B$ szakaszát, amely a deszinkronizált órák szerint dt ideig tartott. Az ennek megfelelő helyesen szinkronizált $d\bar{t}$ időtartam (3) szerint:

$$d\bar{t} = dt - \frac{U\,dx}{c^2}, \tag{5}$$

az ezzel számolt sebesség pedig

$$\bar{v} = \frac{dx}{d\bar{t}}.$$

A korrigált (felülhúzott) mennyiségekre érvényes az eredeti

$$d\tau = d\bar{t} \sqrt{1 - \frac{\bar{v}^2}{c^2}}$$

képlet. Mivel

$$\bar{v} = \frac{dt}{d\bar{t}}\,v,$$

ezt átírhatjuk a

$$d\tau = dt\,\frac{d\bar{t}}{dt} \sqrt{1 - \left(\frac{dt}{d\bar{t}}\right)^2 \frac{v^2}{c^2}} = dt \sqrt{\left(\frac{d\bar{t}}{dt}\right)^2 - \frac{v^2}{c^2}}$$

alakba, amelyben (5) alapján

$$\frac{d\bar{t}}{dt} = 1 - \frac{Uv}{c^2}.$$

Ezt behelyettesítve kapjuk a bizonyítandó (4) összefüggést.

Fogalmazzuk meg a vonatos példánk tanulságát. Ha a vonat egész történetét tekintjük, a veszteglését az indulás előtt, a gyorsulását és azután az egyenletes sebességű haladását, akkor nyilvánvaló, hogy a vonat óráit *nem lehetséges* úgy beállítani, hogy ebben *az egész időszakban* helyesen legyenek szinkronizálva. A példában úgy képzeltük, hogy az órákat még a nyugvó vonaton szinkronizálták fényjelekkel, de akkor az indulás után a deszinkronizáció következtében már nem lesznek helyesen szinkronizálva. Megtehettük volna azt is, hogy az állomáson nem fényjelekkel szinkronizáljuk őket, hanem mesterséges módon olyan beállítást választunk, hogy majd a deszinkronizáció következtében éppen jól legyenek szinkronizálva, amikor a vonat egyenletesen halad. De ekkor persze az állomáson lennének a fényjelek szempontjából rosszul szinkronizálva. De választhatnánk bármilyen más szinkronizációt, ha már a legtermészetesebb einsteini szinkronizáció úgysem hajtható következetesen végre.

A deszinkronizáció következtében tehát *Minkowski-koordinátarendszer csak inerciarendszerekhez rendelhető.* Az ilyen koordinátarendszerben ugyanis a koordinátaidő definíció szerint olyan, hogy a fénysebesség mindig, minden irányban ugyanazzal a c-vel egyenlő. Gyorsuló vonatkoztatási rendszerben azonban a folyamatos deszinkronizáció az ilyen tulajdonságú koordinátaidő létezését lehetetlenné teszi.

Felmerül a kérdés, hogy akkor a gyorsuló vonatkoztatási rendszerekben milyen eljárás (recept) alapján *kell* a koordinátaidőt megválasztani, vagyis milyen protokoll szerint kell a vonatkoztatási rendszerben nyugvó, koordinátaidőt mutató (virtuális) órákat szinkronizálni. A válasz az, hogy ilyen általános recept nem létezik, minden eset külön döntést igényel. Megjegyezzük, hogy inerciarendszerben sem kötelező a fényjelekkel szinkronizált Minkowski-koordinátaidő használata. A koordinátarendszer választásához hasonlóan a koordinátaidő megválasztása is nagymértékben önkényes. A választás fő szempontja a vizsgálandó probléma tárgyalásának az egyszerűsítése. A Minkowski-koordinátaidő előnyei azonban ebből a nézőpontból annyira szembetűnőek, hogy inerciarendszerben gyakorlatilag minden esetben ezt a koordinátaidőt használjuk.

Az óraparadoxon

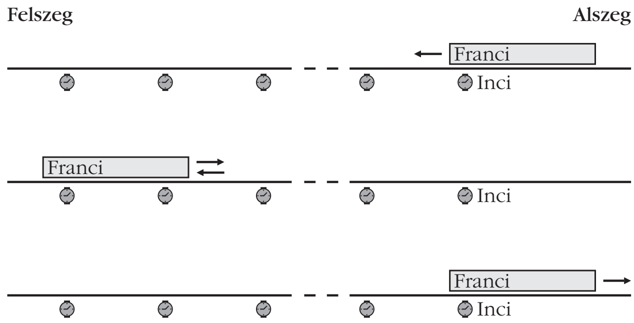
Az idődilatáció – mint tudjuk – szimmetrikus jelenség: Ha az Incihez képest V sebességgel mozgó Franci órája késik Inci órájához viszonyítva, akkor Inci órája is késik Franci órájához viszonyítva. Ez így elég képtelenül hangzik, de nagyrészt annak következtében, hogy a megfogalmazás erősen hiányos. A pontos állítás a következő: nyugodjon Inci az $\mathfrak{I}_I$, Franci pedig az $\mathfrak{I}_F$ inerciarendszerben (az egyik lehet – mondjuk – a vonatállomás, a másik az áthaladó vonat). Mindkét inerciarendszert gondolatban telerakjuk nyugvó, helyesen szinkronizált virtuális órákkal, amelyek a t_I, illetve a t_F koordinátaidőt mutatják. Az állítás az, hogy Inci órája késik a Franci $\mathfrak{I}_F$ inerciarendszerében nyugvó azon $\mathcal{O}_F$ órához képest, amely mellett éppen elhalad, és fordítva, Franci órája is késik az Inci $\mathfrak{I}_I$ inerciarendszerében nyugvó azon $\mathcal{O}_I$ órához képest, amely mellett éppen elhalad.

Ez így már egyáltalán nem paradoxális, hanem „csak” figyelemre méltó. Hasonlítsuk ezt össze mondjuk azzal az állítással, hogy Franci határozottan magasabb, mint Inci, és ugyanakkor Inci is határozottan magasabb, mint Franci. Ez nyilván logikai képtelenség. De abban a kijelentésben, hogy Franci magasabb, mint Inci húga, és Inci is magasabb, mint Franci öccse, már nincs semmi kivetnivaló.[3]

Na jó, de mit mondjunk a következő esetben: Inci az alszegi vasútállomáson a sín mellett áll, Franci az áthaladó vonaton ül. Amikor éppen egymás mellé kerülnek mindketten feljegyzik a saját órájuk mutatóállását. Azután amikor a vonat jön Felszegről visszafelé Francival együtt, megint feljegyzik, mit mutat karórájuk a találkozás pillanatában. Ezután egy kivonással mindketten megállapítják, mennyi idő telt el a saját karórájukon a két találkozás között. Mi lesz az eredmény? Az előzőek alapján azt gondolnánk, hogy Franci óráján kevesebb idő telt el, mint Inci óráján, de persze Inci óráján is kevesebb idő telt el, mint Francién… és ez már logikai ellentmondás a javából.

Fogalmazzuk meg megint az állítást valamivel pontosabban. Azt állítjuk, hogy ha az órákon eltelt sajátidőt Inci nyugalmi rendszerében számítjuk ki, akkor a második találkozáskor Franci órája kevesebbet mutat mint Incié; ha azonban a számítást Franci nyugalmi rendszerében végezzük el, akkor Inci órája mutat kevesebbet, amikor újra találkoznak.

[3] A megfeleltetés nyilvánvaló: Franci órája ↔ Franci, Inci órája ↔ Inci, $\mathcal{O}_F$ ↔ Franci öccse, $\mathcal{O}_I$ ↔ Inci húga.



koordinátaidőt mutató órák a töltés mentén

1. ábra. Tárgyalás a töltés nyugalmi rendszerében.

Ha a relativitáselméletből valóban ez következne, akkor már régen elfelejtettük volna. Azonban az állításban megfogalmazott feltételek analízise arra a következtetésre vezet, hogy akár az egyik, akár a másik nyugalmi rendszerben végezzük is el a számítást, mindig Franci órája az, amelyik a második találkozáskor kevesebb időt mutat.

Vegyük alapul először Inci $\mathfrak{I}_I$ nyugalmi rendszerét, vagyis a vasúti töltést, Alszegestül és Felszegestül (*1. ábra*). Ha a vonat oda és vissza is ugyanazzal a V sebességgel halad, nem tölt el semennyi időt sem Felszegen, akkor az idődilatáció következtében Franci óráján

$$\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\ \text{–szer}$$

kevesebb idő telik el, mint Incién. Mivel továbbá Inci nyugszik $\mathfrak{I}_I$-ben, ezért az óráján ugyanannyi sajátidő telik el, mint koordinátaidő. Ez utóbbi pedig nyilván $2L/V$-vel egyenlő, ahol L Alszeg és Felszeg távolsága. Vagyis

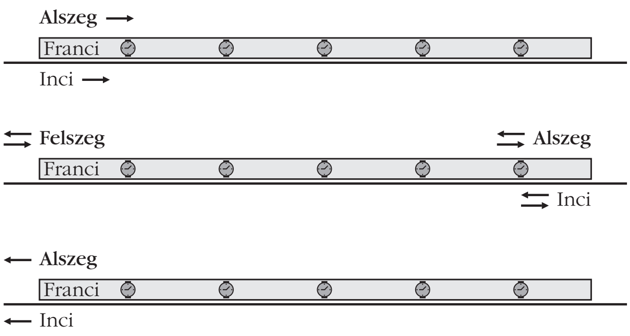
$$\Delta\tau_I = \frac{2L}{V}, \quad \Delta\tau_F = \frac{2L\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}{V}. \tag{6}$$

Hajlamosak lennénk elfogadni, hogy Franci $\mathfrak{I}_F$ nyugalmi rendszerét, vagyis a vonatot tekintve nyugvónak, ugyanezt az eredményt kapjuk azzal a különbséggel, hogy a

$$\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$$

tényező $\Delta\tau_F$ helyett $\Delta\tau_I$-ben jelenik meg. Ez a relativitáselmélet halálos ítélete lenne. De az ítélet kimondása előtt gondoljuk meg jobban a dolgot.

Azt a helyzetet, amikor a vonatot tekintjük nyugvónak (noha a valóságban persze ugyanúgy mozog, mint eddig), a *2. ábrá*n illusztráltuk. A felső rajzon az egész táj – Alszeggel, Felszeggel és Incivel együtt – V sebességgel „úszik el” a vonat mellett, amelyet körülbelül ugyanolyan hosszúnak ábrázoltunk, mint az Alszeg–Felszeg távolság. Ezt nyugodtan megtehetjük, hiszen a „vonat” valójában egy vonatkoztatási



koordinátaidőt mutató órák a vonaton

2. ábra. Tárgyalás a vonat nyugalmi rendszerében.

rendszert reprezentál, amely a newtoni fizikában és a speciális relativitáselmélet szerint is tetszőlegesen nagy kiterjedésű lehet. Most Inci az, aki mozog, ezért az eddigi ismereteink alapján a két találkozás között – a (6)-tal ellentétben – az ő óráján kellene rövidebb időnek eltelnie.

De így van-e valóban?

Inci pályája két részből áll, egy odaútból és egy visszaútból. Foglalkozzunk először az odaúttal. A határozottság kedvéért tegyük fel, hogy első találkozásukkor mindkettőjük órája éppen nulla időt mutat, és ez egyben a vonat koordinátaideje is (vagyis Franci órája szinkronban jár a vele egy helyen lévő, koordinátaidőt mutató virtuális órával). Ha a vonat órái helyesen, fényjelekkel vannak szinkronizálva, akkor, amikor a vonat végéhez ér, Inci órája az idődilatáció következtében

$$\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\ \text{–szer}$$

kevesebb időt fog mutatni, mint az éppen ott lévő vonati óra.

Mekkora ez a $\Delta_1\tau_I$ idő pontosan? A Lorentz-kontrakció következtében az Alszeg–Felszeg közötti L távolságnak a vonaton

$$L\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}$$

távolság felel meg, ezért Inci útjának ez az első szakasza

$$\Delta_1 t = \frac{L\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{V}$$

ideig tart, és ennek következtében

$$\Delta_1\tau_I = \frac{L\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{V}\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} = \frac{L}{V}\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right).$$

Szabad-e ugyanígy számítani a visszaúton eltelt $\Delta_2\tau_I$ időt is? *Nem szabad, mert a vonat visszafordulásakor a rajta lévő órák deszinkronizálódtak,* és ennek következtében a sajátidő számítására már nem a

$$d\tau = dt\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\ ,$$

hanem a (4) képletet kell használni! Mielőtt azonban idéznénk a helyes számítás végeredményét, rámutatunk, miért tudja a deszinkronizáció következtében Inci órája behozni a hátrányát.

Gondolatban helyezkedjünk el a jobbról egyenletes sebességgel érkező vonaton. Ez természetesen inerciarendszer. A visszaforduláskor fellépő gyorsulás jobbra mutat, ezért bármely eredetileg helyesen szinkronizált *A, B* órapár *A* tagja, amelyik az új menetirányhoz viszonyítva a *B* mögött halad, *kevesebbet mutat,* mint ha *B*-vel helyesen lenne szinkronizálva. Ennek következtében egységnyi koordinátaidő alatt a visszaúton Inci órája többet megy előre, mint az odaúton. Ez teszi lehetővé, hogy Inci órája a pályájának második szakaszában ledolgozza hátrányát, és amikor újra találkozik Francival, az ő órája mutasson többet.

A tényleges számítás (4) alapján történik. Ehhez ki kell számítani a benne szereplő U-t és v-t. Az U a vonat visszafordulás utáni sebessége a fordulás előtti önmagához képest (vagyis mintha a fordulás előtt nyugodna). A newtoni fizika szerint U nyilván $2V$-vel egyenlő, de a sebességösszeadás relativisztikus szabálya ezt

$$U = \frac{2V}{1+\frac{V^2}{c^2}}\ \text{–re}$$

módosítja. A képlet alkalmazásához ki kell még számítani azt a $\Delta_2 t$ időt is, amely alatt a vonati deszinkronizált órák szerint Inci visszaér Francihoz.

A számítás egyszerű, de nagyon aprólékos, ezért a *B. Függelék*ben vázoljuk. Az eredmény a következő:

$$\Delta_2\tau_I = \Delta_2 t\sqrt{\left(1-\frac{Uv}{c^2}\right)^2-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{L}{V}\left(1+\frac{V^2}{c^2}\right). \qquad (7)$$

Mint látjuk, a $\Delta_1\tau_I+\Delta_2\tau_I$ összeg ugyanannyi, mint a (6)-ban felírt $\Delta\tau_I$.

Az óraparadoxonnak ez a fajta feloldása, amelyet itt vázoltam,[4] a deszinkronizáción alapul, amely annak következménye, hogy

1. az összes különböző egyenletes sebességgel haladó vonatkoztatási rendszerben a fénysebesség minden irányban ugyanaz a *c,* és

2. amikor egy ilyen vonatkoztatási rendszer gyorsulni kezd, a benne lévő helyesen szinkronizált ideális órák megőrzik eredeti járásukat és ezért deszinkronizálódnak.

Az irodalomban legelterjedtebb magyarázat szerint ezzel szemben a paradoxon csak az általános relativi-

[4] Ez a magyarázat a *Basic Relativity, An Introductory Essay* című könyvemben jelent meg először (Springer, 2011).

táselméletben, vagyis a gravitáció figyelembe vételével oldható fel[5].

Valójában a speciális relativitáselmélet fogalmi struktúrája alapján *előre lehet tudni,* hogy a két találkozás között az egyes órákon eltelt sajátidő-intervallum értékére nem jöhet ki különböző eredmény, amikor különböző koordinátarendszerekben számítjuk őket. Ennek az az oka, hogy a sajátidő-intervallum *invariáns.* A paradoxon „feloldásán” ezért igazából azt értjük, hogy relativisztikus szemléletünk fejlesztése érdekében erről az invarianciáról nem veszünk tudomást, hanem különböző konkrét szituációkban mutatjuk be *működését.*

A relativitáselmélet egész matematikai formalizmusa a $d\tau$ invarianciájára van felépítve. *Tapasztalati* szinten ez az invariancia tökéletesen nyilvánvaló: egy adott órán két adott esemény (például találkozás) között eltelt idő számértékének leolvasása nem igényel koordinátarendszert. A mennyiség *kiszámításához* azonban mindig választani kell valamilyen koordinátarendszert. Az elméletnek tehát biztosítania kell, hogy a számítás eredménye független legyen a választott koordinátarendszertől.

A Lorentz-transzformáció képletét ebből az alapkövetelményből vezetjük le. Ilyen összefüggésben rendszerint a sajátidő konstansszorosával, a $ds^2 = c^2 d\tau^2$ *négyes intervallum négyzettel* dolgozunk. A

$$d\tau = dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \quad \text{és a} \quad v = \frac{dx}{dt}$$

definíció következtében $ds^2 = c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - v^2 dt^2 = c^2 dt^2 - dx^2$, amely 3D-ben

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

Amikor a jobb oldal pozitív, ez a kifejezés a sajátidő képletével ekvivalens, és invarianciája a sajátidő invarianciáját fejezi ki. Amikor nullával egyenlő, akkor a fénysebesség invarianciájának megfogalmazása. Amikor pedig negatív, akkor két közeli esemény térbeli távolságát határozza meg.

A. Függelék

Ebben a függelékben a deszinkronizáció egy másik, formálisabb tárgyalását mutatjuk be. Az új megközelítés lényege, hogy olyan $x,\ t$ (röviden K) koordinátákat vezessünk be a téridőn, amelyhez képest a vonat végig nyugalomban van, és a koordinátaidőt folyamatosan a vonathoz rögzített órák mutatják. Az eljárást úgy is nevezhetjük, hogy koordinátarendszert *rögzítünk* a vonathoz. Mint láttuk, ha a vonat gyorsul, egy ilyen koordinátarendszer bizonyosan nem lesz Minkowski az egész téridőn.

Legyenek $\bar{x},\ \bar{t}$ Minkowski-koordináták a téridőn, amelyeket összefoglalóan $\bar{K}$-val jelölünk. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a vonat a $\bar{t} = 0$-ban hirtelen, azonnal U sebességgel indul el.

A még nyugvó vonaton a vonathoz rögzített $x,\ t$ koordinátákat azonosnak vehetjük $\bar{x}$-szel és $\bar{t}$-vel:

$$t = \bar{t}, \quad x = \bar{x} \quad (\bar{t} < 0). \tag{A1}$$

A vonat elindulása után az $\bar{x},\ \bar{t}$ koordináták U sebességhez tartozó Lorentz-transzformáltjai megfelelnének annak a követelménynek, hogy $\bar{t} > 0$-ban a vonat ezekhez a koordinátákhoz képest legyen nyugalomban, de ahhoz, hogy a vonati órák az így kapható t időt mutassák, a mozgó vonaton újra kellene szinkronizálni őket. A vonati órák akkor fogják újraszinkronizálás nélkül mutatni a koordinátaidőt, ha az időt nem a Lorentz-transzformáció, hanem a

$$t = \bar{t}\sqrt{1-\frac{U^2}{c^2}}$$

képletnek megfelelően választjuk meg. Ezek az órák ugyanis U sebességgel mozognak $\bar{K}$-hoz képest, ezért a járásuk $\bar{K}$-hoz viszonyítva lelassul. Így

$$t = \bar{t}\sqrt{1-\frac{U^2}{c^2}}, \qquad x = \frac{\bar{x} - U\bar{t}}{\sqrt{1-\frac{U^2}{c^2}}} \qquad (\bar{t} > 0). \tag{A2}$$

Az inverz transzformáció

$$\bar{t} = \frac{t}{\sqrt{1-\frac{U^2}{c^2}}}, \qquad \bar{x} = x\sqrt{1-\frac{U^2}{c^2}} + \frac{Ut}{\sqrt{1-\frac{U^2}{c^2}}} \qquad (t > 0). \tag{A3}$$

A mozgó vonathoz tartozó ívelemnégyzet a ds^2 invarianciája következtében

$$\begin{aligned} ds^2 &= c^2 d\bar{t}^2 - d\bar{x}^2 = \\ &= c^2 dt^2 - 2\,U dt\,dx - \left(1-\frac{U^2}{c^2}\right)dx^2 = \\ &= \left(c\,dt - \frac{U}{c}dx\right)^2 - dx^2. \end{aligned} \tag{A4}$$

Ehhez az ívelemnégyzethez a (4) sajátidőképlet tartozik. Továbbá a dx az $(x,\ x+dx)$ intervallum hosszával egyenlő. Ha ugyanis a

$$t' = t - \frac{U}{c^2}x, \quad x' = x$$

[5] Egy reprezentatív példa: R. C. Tolman: *Relativity, Thermodynamics and Cosmology.* Clarendon Press (1969) 79. fejezet.

transzformációval *reszinkronizáljuk* a mozgó vonat óráit, a vesszős koordinátákban Minkowski-ívelemnégyzetet kapunk, amelyben a térkoordináta valódi térbeli távolságnak felel meg.

A dx/dt fénysebességet a $ds^2 = 0$ képletből kapjuk meg, ha végigosztjuk dt-vel:

$$\left(c - \frac{U}{c}\frac{dx}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 0.$$

Az egyenlet két megoldása a jobbra és a balra haladó fényimpulzus sebességét adja meg:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_\pm \equiv \pm c_\pm = \pm \frac{c}{1 \pm \dfrac{U}{c}}.$$

Ezt felhasználva kapjuk a már ismert

$$\overrightarrow{\Delta} t = \frac{\Delta x}{c_+} = \frac{\Delta x}{c}\left(1 + \frac{U}{c}\right),$$

$$\overleftarrow{\Delta} t = \frac{\Delta x}{c_-} = \frac{\Delta x}{c}\left(1 - \frac{U}{c}\right)$$

képleteket a terjedési időkre.

B. Függelék

Ebben a függelékben a (7) képlet levezetését vázoljuk. Ehhez jól felhasználhatók az *A. Függelék* képletei, ha az $\bar{x}$, $\bar{t}$ koordinátákon olyan Minkowski-koordinátarendszert értünk, amelyben az érkező (negatív irányba V sebességgel mozgó) vonat nyugalomban van. Ebben az esetben az (A2) transzformációval definiált x, t koordináták végig rögzítve lesznek a vonathoz, *hacsak* az U sebességen a V sebességgel visszafelé haladó vonat megfordulás előtti mozgásához viszonyított sebességét értjük. A sebességösszeadás relativisztikus képlete szerint

$$U = \frac{2\,V}{1 + \dfrac{V^2}{c^2}}. \tag{B1}$$

A következő feladatunk Inci pályájának meghatározása az $\bar{x}$, $\bar{t}$ koordinátákban.

A $\bar{K}$-ban Inci pályája a két találkozás között

$$\bar{x} = V\bar{t} \qquad (\bar{t}_1 < \bar{t} < \bar{t}_2), \tag{B2}$$

ahol $\bar{t}_1$ és $\bar{t}_2$ a két találkozás időpontja. A vonat visszafordulása $\bar{t} = 0$-ban történik, az első találkozás helye pedig $\bar{x} = 0$. Az Alszeg–Felszeg távolság Lorentz-kontrakcióját figyelembe véve

$$\bar{t}_1 = -\frac{L}{V}\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}.$$

Az Inci óráján a pályájának első szakaszán eltelt sajátidő tehát

$$\Delta_1\tau_I = |\bar{t}_1|\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} = \frac{L}{V}\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right). \tag{B3}$$

A $\bar{t} = 0$ pillanatban Inci már $V|\bar{t}_1|$ távolságra van Francitól, aki ebben a pillanatban U sebességgel indul utána és a $\bar{t}_2$ pillanatban éri utól.

Ezt az időpontot a

$$V(\bar{t}_2 - \bar{t}_1) = U\bar{t}_2$$

egyenletből lehet meghatározni. Azt találjuk, hogy

$$\bar{t}_2 = V\frac{-\bar{t}_1}{U - V} = \frac{L}{V}\frac{1 + \dfrac{V^2}{c^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}. \tag{B4}$$

A $\Delta_2\tau_I$ számításához át kell térnünk az x, t koordinátákra, mert a $t > 0$ tartományban ezek már nem azonosak az $\bar{x}$, $\bar{t}$ koordinátákkal. Inci pályájának második szakaszát úgy kapjuk meg, hogy (A3)-t behelyettesítjük (B2)-be. A pályára az $x = vt$ képletet kapjuk, amelyben

$$v = -V\frac{1 + \dfrac{V^2}{c^2}}{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}. \tag{B5}$$

A t_2 az (A3) és a (B4) alapján a következő:

$$t_2 = \bar{t}_2\sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}} = \frac{L}{V}\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}. \tag{B6}$$

Az U és a v ismeretében kiszámíthatjuk a (7)-ben szereplő négyzetgyökös kifejezést:

$$\sqrt{\left(1 - \frac{Uv}{c^2}\right)^2 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1 + \dfrac{V^2}{c^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}.$$

Ennek és (B6)-nak a szorzata adja (7) képlet jobb oldalát.

Számítsuk ki végül a vonat nyugalmi rendszerében a Franci óráján eltelt időt is. Franci végig nyugalomban van a vonat elején, ezért sajátidejének megváltozása megegyezik koordinátaidejének megváltozásával:

$$\Delta\tau_F = |\bar{t}_1| + t_2 = \frac{2\,L\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}{V}$$

a (6)-tal összhangban.