

$$\begin{aligned}\frac{dN_x}{dt} + \omega_y N_z - \omega_z N_y &= M_x, \\ \frac{dN_y}{dt} + \omega_z N_x - \omega_x N_z &= M_y, \\ \frac{dN_z}{dt} + \omega_x N_y - \omega_y N_x &= M_z.\end{aligned}\quad (5)$$

Ha a K koordináta-rendszert a test tömegközéppontjában úgy vesszük fel, hogy az x, y, z tengelye egybeessen a test tehetetlenségi főirányaival, akkor a főátlón kívüli centrifugális nyomatékok zérusok, és a tehetetlenségi nyomaték tenzora

$$I = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}\quad (6)$$

formában írható. Ekkor:

$$N_x = A \omega_x, \quad N_y = B \omega_y, \quad N_z = C \omega_z.\quad (7)$$

Behelyettesítve az impulzusnyomaték (7) szerinti összetevőit az (5) egyenletekbe, a merev testek forgását leíró *Euler-féle mozgásegyenleteket* (az úgynevezett pörgettyűegyenleteket) kapjuk, a merev testtel együtt forgó K koordináta-rendszerben:

$$\begin{aligned}A \frac{d\omega_x}{dt} + (C - B) \omega_y \omega_z &= M_x, \\ B \frac{d\omega_y}{dt} + (A - C) \omega_z \omega_x &= M_y, \\ C \frac{d\omega_z}{dt} + (B - A) \omega_x \omega_y &= M_z.\end{aligned}\quad (8)$$

A (8) Euler-féle pörgettyű egyenletek integrálásával meghatározható a forgó testek mozgása, vagyis az ω forgási szögsebességvektor összetevőinek $\omega_x(t), \omega_y(t), \omega_z(t)$ időbeli változása a testtel együtt forgó koordináta-rendszerben.

További feladat külső szemlélő számára a vizsgált forgó test térbeli helyzetének meghatározása az idő függvényében. Azaz, meg kell adni a merev testtel együtt forgó $K(x, y, z)$ koordináta-rendszer helyzetét a térben rögzített $K'(x', y', z')$ inerciarendszerhez viszonyítva.

A K rendszer K' -höz viszonyított helyzete leegyszerűbben az 1. ábrán szemléltetett ϑ, ψ, φ Euler-féle szögekkel adható meg [2, 3]. A testtel együtt forgó K koordináta-rendszerben az ω szögsebességvektor összetevői az Euler-féle szögekkel a

$$\begin{aligned}\omega_x &= \frac{d\psi}{dt} \sin\vartheta \sin\varphi + \frac{d\vartheta}{dt} \cos\varphi, \\ \omega_y &= \frac{d\psi}{dt} \sin\vartheta \cos\varphi - \frac{d\vartheta}{dt} \sin\varphi, \\ \omega_z &= \frac{d\psi}{dt} \cos\vartheta + \frac{d\varphi}{dt}\end{aligned}\quad (9)$$

összefüggésekkel fejezhetők ki [4]. Amennyiben a (8) Euler-féle egyenletekből ismertek az $\omega_x(t), \omega_y(t), \omega_z(t)$ megoldások, akkor a (9) elsőrendű differenciálegyenletekből meghatározhatók a $\vartheta(t), \psi(t), \varphi(t)$ Euler-féle szögek időbeli változásai. A ϑ, ψ, φ szögekre közvetlenül is nyerhető megoldás ha a (9) összefüggéseket a (8) Euler-féle egyenletekbe írjuk. Ekkor három másodrendű differenciálegyenlet adódik, amiből a ϑ, ψ, φ szögek közvetlenül meghatározhatók.

A Föld, mint erőmentes szimmetrikus pörgettyű

Amennyiben a (8) Euler-féle egyenleteket erőmentes szimmetrikus pörgettyűnek feltételezett merev Földre alkalmazzuk, az alábbi egyszerűsítő feltevéseket tehetjük:

1. a Föld alakváltozásra képtelen *merev* test, azaz eltekintünk a rugalmasságától,

2. $M_x = M_y = M_z = 0$, azaz a Földre semmiféle külső forgatónyomaték nem hat (ez az erőmentes pörgettyű esete),

3. $A = B$, vagyis az egyenlítő síkjába eső tehetetlenségi nyomatékok megegyeznek (szimmetrikus pörgettyű esete),

4. a Földhöz rögzített és vele együtt forgó K koordináta-rendszer kezdőpontja a Föld tömegközéppontjában van ($0 \equiv tkp.$),

5. a forgástengely átmegegyezik a tömegközépponton,

6. a Földhöz rögzített koordináta-rendszer z tengelyének iránya egybeesik a C legnagyobb tehetetlenségi nyomaték irányával ($C > A$).

Ezekkel a feltevésekkel a (8) Euler-féle mozgásegyenletek az

$$\begin{aligned}A \frac{d\omega_x}{dt} + (C - A) \omega_y \omega_z &= 0, \\ A \frac{d\omega_y}{dt} + (C - A) \omega_z \omega_x &= 0, \\ C \frac{d\omega_z}{dt} &= 0\end{aligned}\quad (10)$$

alakra egyszerűsödnek.

Mivel $C \neq 0$, a harmadik egyenlet megoldása:

$$\omega_z = \omega_{z_0} = \text{állandó},\quad (11)$$

tehát a z tengely körüli forgás szögsebessége állandó, vagyis az ω szögsebességvektor szimmetriatengelyre eső vetülete nem változik. A további megoldásához osszuk el az (10) első két egyenletét A -val, írjuk be ezekbe a (11) megoldást, és vezessük be a

$$k = \frac{C - A}{A}\quad (12)$$

jelöléssel a *dinamikai lapultság* fogalmát. Ekkor a (10) első két egyenlete:

Csillagászati megfigyelések szerint:

$$\frac{A}{C-A} = 0,003295, \quad (26)$$

így tehát

$$T_E \approx 303 \text{ nap.} \quad (27)$$

Mivel a mozgásegyenletek fenti levezetése *Eulertől* származik, a forgástengely állandó szögsebességű körbevándorlásának 303 napos periódusát *Euler-féle periódusnak* (gyakran Euler-féle *szabadnutációs periódusnak*) nevezzük. Az elnevezésben a „szabad” jelző arra utal, hogy a jelenség külső erőhatásoktól teljesen független és a kialakult mozgás periódusidejét kizárólag a merev test (esetünkben a Föld) tömegeloszlása (lapultsága) határozza meg.

Mind ezekből az következik, hogy ha valamely merev test tengelykörüli forgása nem a C fő tehetetlenségi nyomaték tengelye körül indult meg, akkor ez a mozgási állapot megmarad, tehát a forgástengely nem billen vissza olyan állapotba, hogy a fő tehetetlenségi tengellyel egybeesék. Így a pillanatnyi forgástengely állandó szögtávolságra, egyenletes sebességgel járja körül a fő tehetetlenségi tengelyt. Amikor a forgástengely pontosan egybeesik a szimmetriatengellyel ($\beta = 0$), vagy az $A = B = C$ esetén a mozgás ugyanolyan, mint egy rögzített tengely körüli állandó szögsebességű forgás, azaz nutáció nem lép fel.

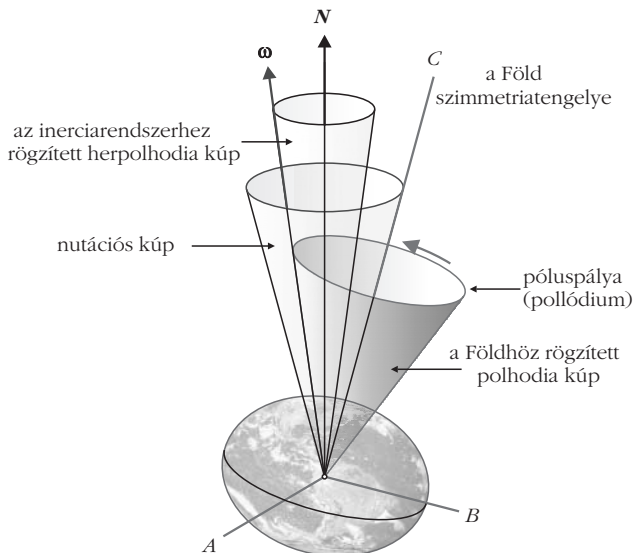
Mind ez, amit eddig tárgyaltunk, a Földdel együtt forgó K koordináta-rendszerből szemlélve látható. A következő feladat az Euler-szögek meghatározása, ami lehetővé teszi az erőmentes szimmetrikus pörgettyű nutációs mozgásának leírását külső inerciarendszerből szemlélve.

Induljunk ki a (9) differenciálegyenletekből! Ezeknek elegendő egy partikuláris megoldása, mivel az általános megoldásban szereplő három integrációs állandót a K' koordináta-rendszer szabad választásával automatikusan megadjuk [2]. Vegyük fel a térhez rögzített K' koordináta-rendszerünk z tengelyét az *1. ábrán* szemléltetett módon úgy, hogy iránya megegyezzen az (1) miatt a térben állandó helyzetű \mathbf{N} impulzusnyomaték-vektor irányával, továbbá tételezzük fel, hogy a z' és a z irányok közötti ϑ szög az időben nem változik, tehát:

$$\vartheta = \vartheta_0 = \text{állandó.} \quad (28)$$

Ekkor behelyettesítve a (9) differenciálegyenletekbe a (11), (15) és a (16) megoldásokat:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} \sin\vartheta_0 \sin\varphi &= m \cos\left[(k\omega_{z_0})t + \tau\right], \\ \frac{d\psi}{dt} \sin\vartheta_0 \cos\varphi &= m \sin\left[(k\omega_{z_0})t + \tau\right], \quad (29) \\ \frac{d\psi}{dt} \cos\vartheta_0 + \frac{d\varphi}{dt} &= \omega_{z_0}. \end{aligned}$$



3. ábra. A Föld Euler-féle szabadnutációs mozgása külső inerciarendszerből szemlélve.

Az első két egyenletből a koordináták *1. ábrán* látható értelmezése mellett az alábbi két összefüggés adódik:

$$\frac{d\psi}{dt} \sin\vartheta_0 = m \quad (30)$$

és

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - (k\omega_{z_0}t + \tau). \quad (31)$$

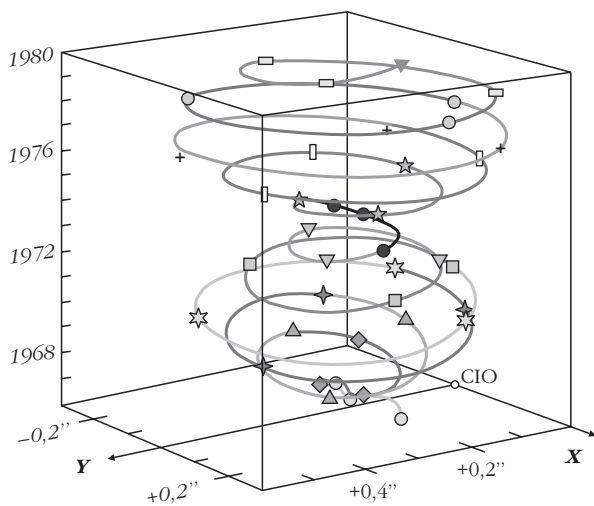
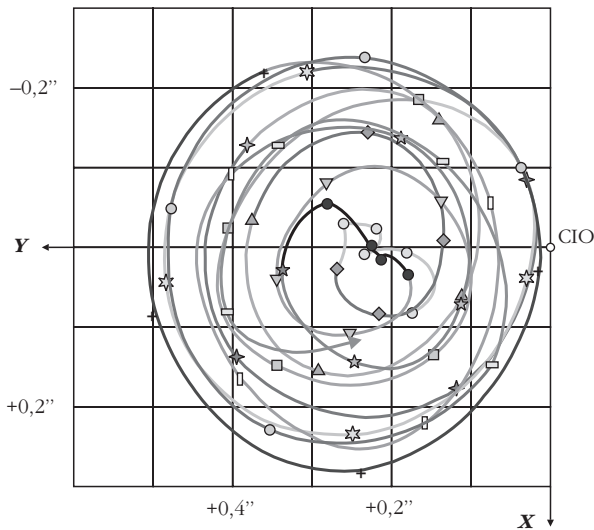
Beírva ezeket a (29) harmadik egyenletébe, kiszámítható a ϑ_0 értéke:

$$\vartheta_0 = \arctan\left(\frac{m}{\omega_{z_0}} \frac{A}{C}\right). \quad (32)$$

Összefoglalva végül az Euler-szögekre kapott megoldás:

$$\begin{aligned} \vartheta &= \vartheta_0 = \arctan\left(\frac{m}{\omega_{z_0}} \frac{A}{C}\right), \\ \psi &= \psi_0 + \frac{m}{\sin\vartheta_0} t, \quad (33) \\ \varphi &= \varphi_0 - \frac{C-A}{A} \omega_{z_0} t. \end{aligned}$$

A (33) első két összefüggése azt mutatja, hogy külső inerciarendszerből szemlélve az erőmentes pörgettyű C szimmetriatengelye a térben állandó helyzetű \mathbf{N} impulzusnyomaték-vektor körül $2\vartheta_0$ nyílásszögű úgynevezett *nutációs kúp* palástja mentén állandó $m/\sin\vartheta_0$ szögsebességgel mozog körbe, miközben a harmadik egyenlet szerint ehhez még hozzájön egy további forgás a C szimmetriatengely körül. Az \mathbf{N} vektor C szimmetriatengellyel bezárt ϑ_0 szögét a (33) első összefüggése, míg a C szimmetriatengely ω pillanatnyi forgástengellyel bezárt β szögét pedig a (21) összefüggés adja. Ebből viszont az ω pillanatnyi forgástengely \mathbf{N} vektorral bezárt γ szöge is meghatározható.



○1967 ◆1968 ▲1969 ✦1970 ☆1971 □1972 ▽1973

●1974 ☆1975 □1976 +1977 ○1978 □1979

4. ábra. A póluspálya 1967–1979 között.

Két alapeset lehetséges: a $C > A$ esetben $\gamma = \beta - \vartheta_0$, míg a $C < A$ esetben $\gamma = \vartheta_0 - \beta$.

Összefoglalva a fentieket: *szabadnutáció* esetén a külső térben rögzített K' inerciarendszerben mind a Föld forgástengelyének, mind a Föld C szimmetriatengelyének iránya folyamatosan változik, csupán az N impulzusnyomaték-tengely iránya változatlan, az impulzusnyomaték-megmaradási törvény értelmében. A mozgást legegyszerűbben a 3. ábra alapján érthetjük meg – ami egyébként az erőmentes pörgettyű szabadnutációs mozgását mutatja a külső térben rögzített inerciarendszertől szemlélve. A Föld pillanatnyi forgástengelye ($C > A$ esetén) a kisebb nyílásszögű, úgynevezett *herpolhodia kúp* palástja mentén, a C szimmetriatengely (a Föld tehetetlenségi főiránya) pedig a nagyobb nyílásszögű úgynevezett *nutációs kúp* palástja mentén kerüli meg az N impulzusnyomaték-vektort. Eközben az ω vektor az úgynevezett *polhodia kúp* palástja mentén a C tengely körül is vándorol. A mozgás során az ω ,

az N és a C mindig egy síkban van, miközben a Föld tömegéhez rögzített helyzetű polhodia kúp és az inerciarendszerben rögzített helyzetű herpolhodia kúp palástja állandóan az ω vektor iránya mentén érintkezve csúszásmentesen gördül egymáson.

A pólusingadozás valódi periódusa

A valódi Föld pillanatnyi forgástengelyének fő tehetetlenségi irányát jól közelítő (megállapodással definiált) tengelyéhez viszonyított (mérésekkel meghatározható) mozgását *pólusingadozásnak* nevezzük. Az eddigi feltevések (például merev és forgásszimmetrikus Föld esete) a valóságban nem érvényesek, ezért a megfigyelt pólusingadozás jelentősen eltér az eddigi megfontolások eredményeitől.

Ha mérésekkel meghatározzuk a valódi póluspályát (a forgástengely mozgásának földfelszíni nyomvonalát) a *pollódiomot*, akkor folyamatosan a 4. ábra felső részén látható görbékhez hasonló képet kapunk. A 4. ábrán az 1967 és 1979 közötti póluspálya látható olyan koordináta-rendszerben, amelynek $+x$ tengelye a greenwichi kezdőmeridián irányába, $+y$ tengelye pedig erre merőlegesen, nyugat felé mutat, a kezdőpontja pedig az 1900 és 1905 közötti időtartamra meghatározott közepes pólushely: a CIO (Conventional International Origin). Látható, hogy a pólus valóban periodikus mozgást végez, a pólus elmozdulása körülbelül $0,5'' \approx 10$ m sugarú körön belül marad, de az amplitúdó nem állandó és a periódus sem egyenlő az Euler-féle 303 napos periódussal, hanem ennél lényegesen hosszabb: 405 és 457 nap között ingadozik – átlagosan mintegy 435 nap.

A pólusmozgás felfedezése utáni években *Chandler* amerikai csillagász kimutatta, hogy a pólusingadozás két domináns periódusból, egy 12 és egy 14 hónapos periódusból tevődik össze. Az utóbbit tiszteletére *Chandler-periódusnak* nevezték el. Néhány hónappal *Chandler* felfedezése után *Newcomb* már elméleti magyarázattal is szolgált: a 14 hónapos összetevő a Föld *szabadnutációja*, míg a 12 hónapos összetevő az úgynevezett *kényszernutáció*, amely az azonos periódusú globális meteorológiai jelenségek (tömegátrendeződések, például légtömegmozgások, hó- és jégtömegek olvadása és újraképződése stb.) következménye.

A 4. ábrán látható, hogy a pólus az óramutató járásával ellentétes irányban többé-kevésbé szabályos spirális pályán mozog. Ezek a spirális pályák körülbelül hat évenként hasonló jellegűek, a két frekvencia összeadódásából kialakuló *lebegés* következtében. Jól látható ez a lebegés a 4. ábra alsó részén, a pólusingadozás 1967 és 1979 közötti időszakra vonatkozó háromdimenziós képén. Ugyancsak ezt szemlélteti az 5. és 6. ábra is, ahol a felső görbe a pólusmozgás x , illetve y irányú összetevője, alatta pedig a szétválasztott 14 hónapos, 12 hónapos és a maradék összetevők láthatók. Megállapítható, hogy a szabadnutáció és a kényszernutáció külön-külön is meglehetősen bonyolult folyamat. A *Chandler*-összetevőn például felis-

merhető egy fél évszázad körüli periódus, amely több más földfizikai folyamatban is jelentkezik, pontos okát azonban egyelőre nem ismerjük.

Az átlagosan 427 napos Chandler-periódus és a 303 napos Euler-periódus közötti különbség oka a Föld rugalmas viselkedése. Ha ugyanis a Föld nem merev – mint ahogyan az Euler-féle pörgettyű-egyenletek megoldásakor feltételeztük – akkor a forgástengely elmozdulásának megfelelően a megváltozó centrifugális erő hatására tömege úgy deformálódik, hogy a tehetetlenségi főtengelye közeledik a forgástengelyhez. (Szélső esetben, ha a Föld folyadékszerűen viselkedne, akkor a tehetetlenségi főtengelye teljes mértékben követné a forgástengely elmozdulását – tehát a periódus végtelen nagy lenne, és így pólusingadozásról nem is lehetne beszélni.)

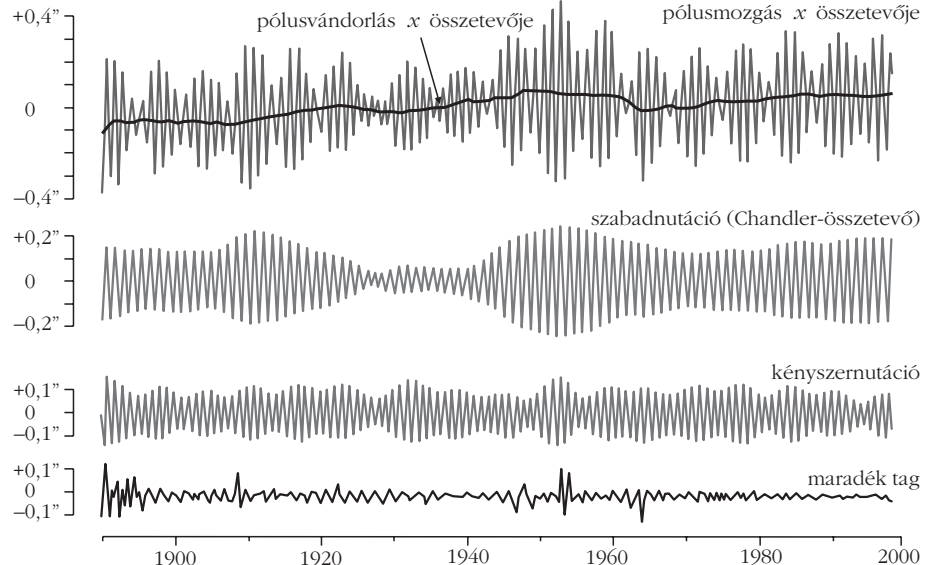
Ennek megfelelően a T_E Euler-féle, és a T_C Chandler-periódus hányadosa kapcsolatba hozható a Föld rugalmasságát jellemző Love-féle k számmal:

$$\frac{T_E}{T_C} = 1 - k \frac{\epsilon}{2f - \epsilon}, \quad (34)$$

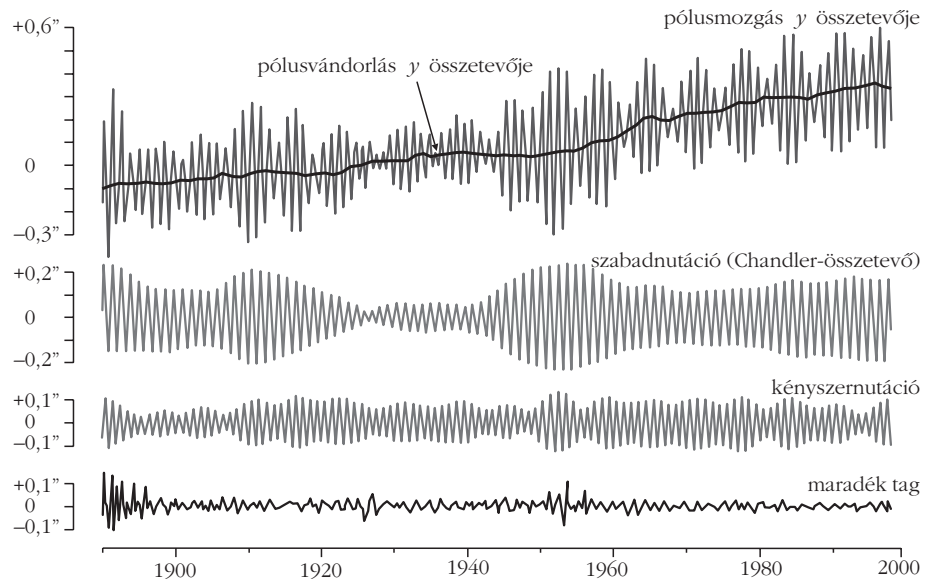
ahol f a Föld geometriai lapultsága, ϵ pedig a centrifugális és a nehézségi gyorsulás egyenlítői értékének hányadosa [5]. Az

1. táblázatban a (34) összefüggés alapján kiszámított, néhány szóba jöhető k értékhez tartozó Chandler-periódus hosszát tüntettük fel. A táblázatból látható, hogy a szabadnutáció Chandler-periódusa annál hosszabb, minél kevésbé merev a Föld. Az árapályjelenségek megfigyeléséből származó 0,29 és 0,31 közötti k értéknek 440 és 454 nap közötti periódus felel meg, viszont a pólusmozgás megfigyeléséből a 428–440 nap közötti Chandler-periódus tűnik a legvalószínűbbnek, amihez a táblázat adatai szerint $k = 0,27\text{--}0,29$ érték tartozik.

| 1. táblázat | | | | | | | | |
|---|-----|------|------|------|------|------|------|------|
| A Föld rugalmassága és a Chandler-periódus hossza közötti összefüggés | | | | | | | | |
| k | 0 | 0,26 | 0,27 | 0,28 | 0,29 | 0,30 | 0,31 | 0,32 |
| T_C (nap) | 303 | 421 | 428 | 434 | 440 | 447 | 454 | 461 |



5. ábra. A pólusmozgás x összetevője 1890–2000 között.

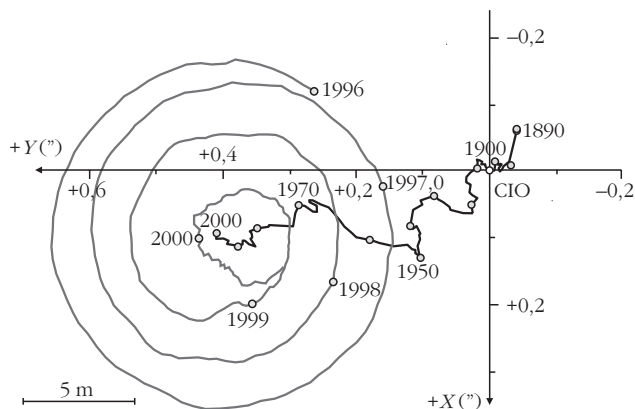


6. ábra. A pólusmozgás y összetevője 1890–2000 között.

A pólusvándorlás

Ha meghatározzuk egy-egy teljes periódushoz a 4. ábrán látható póluspályák közepes pólushelyzeteit, akkor azt tapasztaljuk, hogy ezek a közepes pólushelyek az idő függvényében folyamatosan eltolódnak. A jelenséget szekuláris pólusmozgásnak, vagy *pólusvándorlásnak* nevezzük. A 7. ábrán látható, hogy az 1890 és 2000 közötti póluspálya már teljes egészében az 1900 és 1905 között meghatározott CIO középpóluson kívül halad. Az is látható, hogy a közepes pólus 110 év alatt több mint 10 m távolsággal vándorolt el Kanada irányában.

A megfigyelések szerint a pólusvándorlás mértéke viszonylag csekély – évente legfeljebb néhány dm (néhány ezred szögmásodperc) nagyságrendű –, a földtörténeti időskálán azonban ez az elmozdulás jelentős (több 10°) mértékű is lehet. Ezért a pólusvándorlás problémája a geológia és a geofizika sokat tár-



7. ábra. A pólus vándorlása 1890 és 2000 között.

gyalt kérdése; különösen a paleoklimatológiai és újabban néhány globális tektonikai kérdés megválaszolása szempontjából igen fontos.

A pólusmozgás geodéziai és csillagászati hatása

Kizárólag a pólusmozgás hatását figyelembe véve az ω forgási szögsebességvektor állócsillagokhoz viszonyított helyzetét gyakorlatilag állandónak tekinthetjük. Ekkor viszont állandó az égi egyenlítő síkjának helyzete is, tehát a csillagok saját mozgásától eltekintve, ezek égi egyenlítői (ekvatoriális) koordinátái az időben változatlanok. Ugyanakkor a Föld felszínén fekvő valamennyi pont helyzete (például a pontok szintfelületi földrajzi koordinátái) a forgástengelyhez rögzített geodéziai koordináta-rendszerekben a Föld tömegének a forgástengelyhez viszonyított elmozdulása miatt folyamatosan változik.

A pólusmozgás oka

A pörgettyűmozgás elmélete szerint a szabad tengely körül forgó merev testek helyzete akkor stabil, ha a forgás megindulásakor a test forgástengelye megegyez-

zik a tehetetlenségi fő tengelyével. Ellenkező esetben, vagyis ha a forgás nem a tehetetlenségi fő tengely körül indul meg, akkor a forgó test helyzete – erőmentes térben is – állandóan változik, azaz a test szabadnutációs mozgást végez. Így, ha valamely merev bolygó esetében valamikor kialakult a szabadnutációs mozgás, akkor ennek fenntartásához semmiféle mechanizmusra nincs szükség.

Mivel a Föld nem merev test, rá ez a megállapítás nem érvényes. A Föld esetében a minimális mozgási energiájú állapot a tehetetlenségi fő tengely körüli forgás. Ettől eltérő helyzetű forgástengely esetén olyan belső tömegátrendeződések lépnek fel, amelyek a két tengely közeledését, illetve egybeesését igyekeznek előidézni. A Chandler-összetevő vizsgálata alapján az a csillapítási idő, amely alatt a mozgás amplitúdója e -ed részére csökken körülbelül 10–30 év közötti értékre becsülhető [2]. Az ennél jóval hosszabb idejű megfigyelések azt bizonyítják, hogy létezik egy valamilyen gerjesztő folyamatnak, amely a pólusmozgás ismeretlen módon elnyelődő energiáját valamilyen formában pótolja.

A lehetséges disszipációs és gerjesztési folyamatok napjainkban még nagyrészt tisztázatlanok, mivel az eddig felmerült lehetőségek általában más módon nehezen ellenőrizhetők és a számítások igen bonyolultak.

A fentiek szerint nyilvánvaló, hogy *a Föld nutációs mozgásának oka a Föld bonyolult belső tömegeloszlása és a tömegek állandó mozgása, áthelyeződése*. A Földön kívüli tömegek eloszlásának, a különböző égitesteknek a pólusmozgásra semmilyen hatása nincs.

Irodalom

1. Völgyesi L.: A Föld precessziós mozgása. *Fizikai Szemle* 63 (2013) 152.
2. Völgyesi L.: A pólusmozgás fizikai alapjai. *Geomatikai Közlemények V. Sopron*, (2002) 55.
3. Völgyesi L.: A Föld precessziós mozgásának fizikai alapjai. *Geomatikai Közlemények V. Sopron*, (2002) 75.
4. Landau L. D., Lifšic E. M.: *Elméleti Fizika I.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1974.
5. Völgyesi L.: *Geofizika*. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2002.

Jobb egy mentőötlet mint öt mentő egylet

– írta Karinthy Frigyes az egyletistápolás margójára.

Most Társulatunknak lenne szüksége egyletmentő ötletekre!



Ezek az ötletek nem vesznek el, ha a <http://forum.elft.hu> linken, az ELFT stratégiai vitafórumán adjuk elő.

