# A LENCSÉK KÉPLETE BOLYAI FARKAS JEGYZETEIBEN ÉS A KORABELI EGYETEMI TANKÖNYVEKBEN

## „Hogyan határozható meg a lencse által alkotott kép helye?”

Gündischné Gajzágó Mária
Hatvan

*Bolyai Farkas* 1804 májusától 1852 októberéig tanított matematikát, fizikát, csillagászatot és kémiát a marosvásárhelyi Református Kollégiumban. Ezeket a tárgyakat a felsőbb osztályokban, a tógás diákok tanulták, az 1840-es évek elejéig latinul. Bolyai Farkas legfontosabb matematikai műve, a *Tentamen* latin nyelven jelent meg 1832-ben. Később rövidebb matematikai tankönyveket magyarul is kiadott. Fizika-, csillagászat-, kémiaóráihoz tartozó jegyzeteit nyomtatásban nem jelenttette meg, csupán *Az aritmetikának, geometriának és physikának eleje* című, 1834-ben kiadott műve tartalmaz kis mennyiségű bevezető jellegű fizikai ismeretet. Az említett természettudományi jegyzetek, többnyire tanítványok kézírásában, szerencsénkre megőrződtek. Ezek Bolyai Farkas tanári pályájának első 3 évtizedéből latin nyelven, az 1840-es évektől pedig magyar nyelven maradtak fenn és sok száz oldalt tesznek ki. A Bolyai-hagyaték Marosvásárhelyen a Teleki–Bolyai Könyvtárban kutatható; 1991-től a hagyaték másolata Budapesten az MTA Könyvtárának Mikrofilmtárában is megtalálható [1].

Bolyai fizikai kéziratait 1982-ben kezdtem tanulmányozni a Teleki–Bolyai Könyvtárban. Munkámat férjem, *Gündisch György* eredeti kéziratokról készített fényképfelvételei tették lehetővé.

Azóta sikerült Bolyai Farkas fizikai kéziratait áttekintenem, és a különböző fejezetek kutatási eredményeit a *Korunk* (1983/11), a *Fizikai Szemle* (1994/3 és 2007/8), a *Firka* (2006–07/2), a *Műszaki Szemle* (Historia Scienciarum 8, 2011/54) hasábjain, valamint Bolyai-konferenciákon (2002, 2006, 2010), Fizikatanári ankétokon (2003, 2009) stb. bemutatnom.

Bolyai Farkas magyar nyelvű fénytanjegyzeteiben a lencsék képletének levezetése nincs meg,[1] de egy latin nyelvű diákjegyzetben címként[2] olvasható a fent idézett kérdés. A kérdésre adott válasz ott három oldalas levezetés formájában található. Ezt követjük nagy vonalakban, megőrizve az ide tartozó két ábrát a jelölésekkel együtt. (Megjegyzendő, hogy ugyanez a levezetés megtalálható az 1815-ből származó, legterjedelmesebb latin jegyzetben is Bolyai Farkas kézírásában[3]).

A levezetés első részében, az *1. ábrá*nak megfelelően, a lencse felső, levegő-üveg határfelületén végbemenő fénytörést vizsgáljuk. Legyen az $AB$ gömbfelület középpontja $C$, sugara $r$, a lencse tengelye $o\varphi$, és legyen az $o$ tárgy $d$ távolságra a lencsétől.

A tengely mentén haladó fénysugár törés nélkül megy az üvegbe.

Az $o$-ból induló másik fénysugár $d'$ távolságot befutva az $\varepsilon$ pontban lép az üvegbe. Itt a beesési merőleges a $C\varepsilon$, a beesési szög $\alpha$. A megtört sugár a beesési merőlegeshez és a tengelyhez közeledve $f'$ utat fut be, míg a tengelyt $\varphi$-ben metszi. Így az $AB$ levegő-üveg határfelület az $o$ tárgypont képét $\varphi$-ben hozza létre, $f$ a képtávolságot jelenti.

Legyen a $C$-ből az $o\varepsilon$ beeső sugár meghosszabbítására, illetve az $\varepsilon\varphi$ megtört sugárra állított merőleges hossza $m$, illetve $n$. Az ábra alapján a beesési és törési szög szinuszainak hányadosára írhatjuk:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin C\varepsilon\varphi\angle} = \frac{\frac{m}{r}}{\frac{n}{r}} = \frac{m}{n}. \tag{1}$$

A fénytörés törvénye azt mondja ki, hogy az $m/n$ bármely $\alpha$ esetén állandó, értéke a két közeg anyagi minőségétől függ.

Felírjuk a szinusz-tételt az $o\varepsilon C\,\triangle$-ben:

$$\frac{\sin z}{d'} = \frac{\sin o\varepsilon C\angle}{r+d},$$

és figyelembe vesszük, hogy

$$\sin o\varepsilon C\angle = \sin(180-\alpha) = \sin\alpha.$$

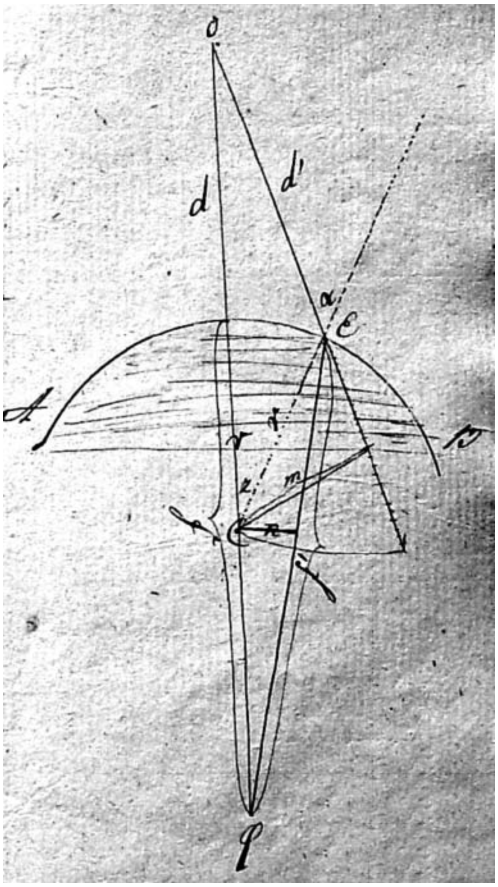
Így kapjuk:

$$\frac{\sin z}{\sin\alpha} = \frac{d'}{r+d}, \quad \text{vagy} \qquad \sin z = \sin\alpha\,\frac{d'}{r+d}. \tag{2}$$

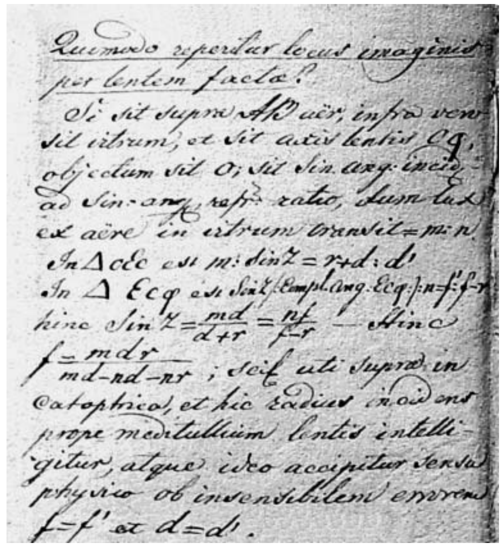
[1] Bolyai Farkas *Jegyzés a' Világosságról* című jegyzetében megtalálható a gömbtükrök képletének levezetése (B 541/7), viszont a *Vilről* című jegyzet 11. oldalán, ahol a vékony lencsék osztályozásáról és képalkotásáról ír, azt találjuk, hogy az $r$, $R$ radiusú közönséges üvegből készült lencse esetén „meg lehet mutatni, hogy a kép táv $2dRr$:$[d(R+r)-2Rr]$, ha $d$ a tárgy távja; és ha a tárgy táv tart a $\infty$-hez, a kép táv becse $2Rr$: $(R+r)$ lesz”, amely a fókusztávolságot jelenti.

[2] B 652/35–37, *Quomodo reperitur locus imaginis per lentem facto?*

[3] BF 427/19–20




*1. ábra.*



Quomodo reperitur locus imaginis
per lentem factae?
Si sit supra AB aër, infra verò
sit vitrum, et sit axis lentis Cφ,
objectum sit o; sit sin. ang. incid.
ad sin. ang. refr. ratio, dum lux
ex aëre in vitrum transit = m:n.
In Δ oεC est m: sin z = r+d : d'
In Δ εCφ est sin z (compl. ang. εCφ) : n = f' : f−r
hinc $\sin z = \frac{md}{d+r} = \frac{nf}{f-r}$ — Hinc
$f = \frac{mdr}{md-nd-nr}$ ; sicut uti supra in
Catoptrica, et hic radius incidens
prope meditullium lentis intelli-
gitur, atque ideo accipitur sensu
physico ob insensibilem errorem
f=f' et d=d'.

*2. ábra.* Részlet a B 652/35v-ról az *1. ábrá*hoz.

Hasonlóképpen az $\varepsilon C\varphi$ $\triangle$-ben:

$$\frac{\sin \varepsilon C\varphi \angle}{f'} = \frac{\sin C\varepsilon\varphi \angle}{f-r},$$

de $\sin \varepsilon C\varphi \angle = \sin(180 - z) = \sin z$, valamint az (1)-et átrendezve

$$\sin C\varepsilon\varphi \angle = \frac{n}{m} \sin\alpha,$$

és így

$$\frac{\sin z}{f'} = \frac{\frac{n}{m}\sin\alpha}{f-r}, \quad \text{ahonnan} \qquad (3)$$

$$\sin z = \sin\alpha \, \frac{n}{m} \frac{f'}{f-r}.$$

Feltételezve, hogy az $o\varepsilon$ fénysugár a lencse tengelyének közelében halad (paraxiális sugár), jó megközelítéssel írhatjuk, hogy $d = d'$ és $f = f'$, és így a (2) és (3) alapján írhatjuk:

$$\sin z = \sin\alpha \, \frac{d}{r+d} = \sin\alpha \, \frac{n}{m} \frac{f}{f-r}, \quad \text{vagy} \qquad (4)$$

$$\sin z = \frac{m}{r} \frac{d}{r+d} = \frac{n}{r} \frac{f}{f-r}.$$

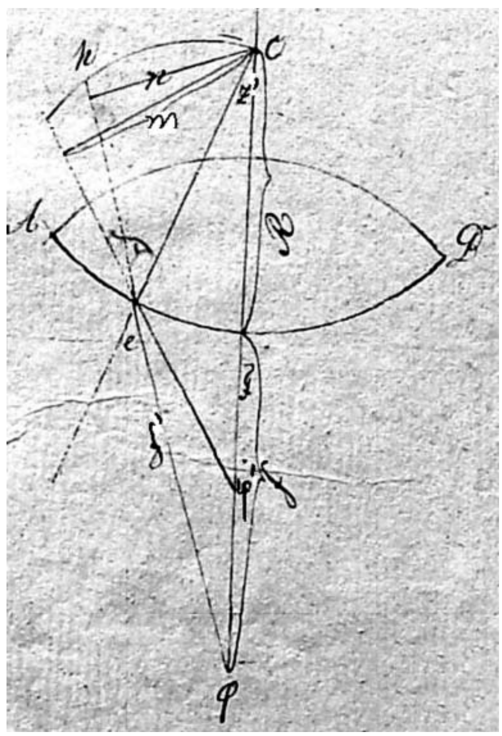
A (4) második egyenlőségéből az $f$ képtávolságra kapjuk:

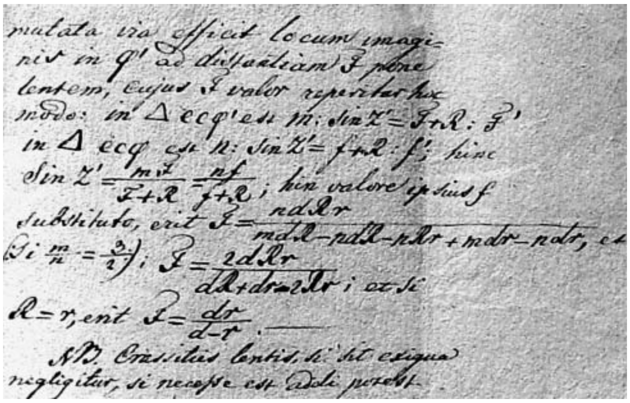
$$f = \frac{m\,d\,r}{m\,d - n\,d - n\,r}. \qquad (5)$$

Ezután a lencse alsó, üveg-levegő határfelületén végbemenő törést vizsgáljuk a *3. ábra* alapján.

Most *C* az alsó *AB* körív középpontja, a kör sugara *R*, *e* a beesési pont, *he* a beeső sugár, amely a *Ce* beesési merőlegestől távolodva törik meg. $e\varphi'$ a megtört sugár, $\varphi'$ a képpont: a $\varphi$ tárgypont *AB* üveg-levegő határfelület által létrehozott képe, és egyben az *o* pont lencse által alkotott képe is. *F* a képtávolság. *C*-ből a *he* beeső sugárra állított merőleges hossza itt *n*, a megtört $e\varphi'$ sugár meghosszabbítására állított merőleges hossza pedig *m* (éppen fordítva mint az előbbi ábrán).

*3. ábra.*





*4. ábra.* Részlet a B 652/36-ról a *3. ábrá*hoz.

A beesési, illetve törési szögek szinuszaira így írhatjuk:

$$\sin Ceh\angle = \sin Ce\varphi\,\angle = \frac{n}{R};$$

$$\sin Ce\varphi'\,\angle = \frac{m}{R} \text{ és} \tag{6}$$

$$\frac{\sin Ceh\angle}{\sin Ce\varphi'} = \frac{n}{m}.$$

Ez utóbbi a törés törvénye az alsó AB-ívre: $n/m$ állandó bármely beesési szögre.

Felírjuk a szinusz-tételt az $eC\varphi'$ $\vartriangle$-ben, illetve az $eC\varphi$ $\vartriangle$-ben:

$$\frac{\sin z'}{e\varphi'} = \frac{\sin Ce\varphi'\,\angle}{R+F};\quad \frac{\sin z'}{f'} = \frac{\sin Ce\varphi\,\angle}{R+f}.$$

Figyelembe véve a (6) összefüggéseket, átírhatjuk a két utóbbit:

$$\frac{\sin z'}{e\varphi'} = \frac{m}{(R+F)\,R};\quad \frac{\sin z'}{f'} = \frac{n}{(R+f)\,R},$$

ahonnan kapjuk:

$$\sin z' = \frac{e\varphi'\cdot m}{(R+F)\,R} = \frac{f'\cdot n}{(R+f)\,R}.$$

Vékony lencsére, paraxiális megközelítéskor írhatjuk, hogy $e\varphi' \approx F$ és $f' \approx f$, és:

$$\sin z' = \frac{F\cdot m}{(R+F)\,R} = \frac{f\cdot n}{(R+f)\,R}. \tag{7}$$

A levezetést itt megszakítva a következő *észrevétel*t tesszük: a $\sin z$ és $\sin z'$-re vonatkozó összefüggéseket keresve a két latin jegyzetben, megfigyelhető, hogy $\sin z$ kifejezéseinek nevezőiből $r$, $\sin z'$ kifejezéseinek nevezőiből pedig $R$ hiányzik az általunk kapott (4), illetve (7)-hez képest. Úgy néz ki, hogy a szinusz-tétel felírásakor a beesési és törési szög szinuszára $m/r$ és $n/r$ helyett (*1. ábra,* (4)), illetve $n/R$ és $m/R$ helyett (*3. ábra,* (7)) csak a számlálókat írták be a jegyzetírók.

Mivel nem gondoljuk, hogy mindkét latin jegyzetben elírás lenne, a dolog tisztázására megnéztük a lencsék képletének levezetését *Gren* könyvében [2]. Gren a beesési, illetve törési szög szinuszát beesési, illetve törési szinusznak (Einfallssinus, Brechnungssinus) nevezi és egy szakasznak tekinti, mégpedig derékszögű háromszögben a szemközti befogónak. Úgy tűnik, ez a szemlélet érvényesül a vizsgált jegyzetrészben, de ez, mint látni fogjuk, nem befolyásolja a levezetés eredményét.

Visszatérve (7)-hez:

$$\frac{F\,m}{R+F} = \frac{f\,n}{R+f},$$

ahonnan

$$F = \frac{f\,n\,R}{m\,R + m\,f - n\,f}.$$

Ha ide beírjuk $f$ korábban levezetett kifejezését (5) szerint, kapjuk:

$$F = \frac{n\,d\,r\,R}{m\,R\,d - n\,R\,d - n\,R\,r + m\,r\,d - n\,d\,r}, \tag{8}$$

vagy átalakítva:

$$F = \frac{d\,r\,R}{\left(\frac{m}{n} - 1\right)(d\,R + d\,r) - R\,r}. \tag{8'}$$

Ezen összefüggések segítségével kiszámítható az $r$ és $R$ görbületi sugarakkal, valamint az $m/n$ relatív törésmutatóval jellemezhető vékony lencse előtt $d$ távolságra található tárgy képének lencsétől mért távolsága, vagyis a *képtávolság*.

Ez tehát a válasz a címben feltett kérdésre. Az itt ismertetett kissé bonyolult, időigényes levezetésről mondott le Bolyai Farkas a magyar nyelvű, többnyire 1840 után diákjainak diktált vagy általuk másolt jegyzeteiben.

Bolyai Farkas említett latin jegyzeteiben itt három megjegyzés következik:

*1. megjegyzés.* Üveglencse esetén

$$\frac{m}{n} = \frac{3}{2}$$

és a képtávolság az

$$F = \frac{2\,d\,r\,R}{d\,R + d\,r - 2\,R\,r}$$

szerint számítható ki. Ha pedig az üveglencse görbületi sugarai egyenlők, akkor:

$$F = \frac{d\,r}{d - r}.$$

*2. megjegyzés* a „Quomodo ex ista formula focus reperitur?” (Hogyan határozható meg ebből a képletből a fókusztávolság?) kérdésre ad választ. A fókusztávolság úgy határozható meg mint a $\infty$-ben lévő tárgy képtávolsága. Így, ha $d = \infty$ és $R = r$, akkor: $F = r$; vagyis az azonos görbületi sugarakkal rendelkező üveglencse fókusztávolsága megegyezik a görbületi sugár értékével. Síkdomború lencse esetén pedig, mivel $R = \infty$ és $d = \infty$; $F = 2r$, vagyis a fókusztávolság a görbületi sugár kétszerese.

*3. megjegyzés.* A konkáv, vagyis középen vékonyabb lencsék görbületi sugaraira, valamint a fókusztávolság előjelére vonatkozik.

Gren a képtávolság levezetésénél a fénytörés törvényét, háromszögek hasonlóságát az említett paraxiális megközelítést használta fel, és az

$$x = \frac{d\,q\,R\,r}{d\,(p-q)\cdot(R+r) - q\,R\,r}$$

összefüggéshez jutott. Ez utóbbi megegyezik (8)-cal, ha $x$ helyett $F$-et, $p$ helyett $m$-et és $q$ helyett $n$-et írunk.

A 2. megjegyzéshez hasonlóan Gren is kiszámította a tengellyel párhuzamosan érkező sugarak által létrehozott kép távolságát:

$$x = \frac{q\,R\,r}{(p-g)\cdot(R+r)},$$

amely üveg esetén, amikor

$$\frac{p}{q} = \frac{3}{2},$$

az

$$x = \frac{R\,r}{\frac{1}{2}\,(R+r)}$$

eredményre vezet. A gyújtó- vagy fókusztávolság (Brennweite = distantia focalis) úgy kapható meg, hogy a görbületi sugarakat összeszorozzuk és osztjuk azok fél összegével.

Érdekességként megjegyezzük, hogy sem Bolyai optikajegyzeteiben, sem Gren könyvében nem találjuk meg a *lencsék leképezési vagy távolságtörvényé*t (vagyis a fókusztávolság, tárgy- és képtávolság közötti összefüggést).

A képtávolság (8) vagy (8') képletéből rövid úton eljuthatunk a leképezési törvényhez. Osszuk el a (8') összefüggés számlálóját és nevezőjét *drR*-rel! Ekkor:

$$F = \frac{1}{\left(\frac{m}{n} - 1\right)\cdot\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{R}\right) - \frac{1}{d}}. \qquad (8")$$

Az (8") összefüggésből és a 2. megjegyzés szerint rögtön megkapható a *fókusztávolság* (jele legyen $f_{táv}$), $f_{táv} = F$, ha $d = \infty$, tehát:

$$f_{táv} = \frac{1}{\left(\frac{m}{n} - 1\right)\cdot\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{R}\right)} \quad \text{és}$$

$$\frac{1}{f_{táv}} = \left(\frac{m}{n} - 1\right)\cdot\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{R}\right).$$

A (8") összefüggés a következőképpen írható át:

$$F = \frac{1}{\frac{1}{f_{táv}} - \frac{1}{d}}, \quad \text{ahonnan}$$

$$\frac{1}{f_{táv}} = \frac{1}{d} + \frac{1}{F}.$$

Figyelembe véve, hogy $d$ a tárgytávolságot, $F$ a képtávolságot jelenti, eljutottunk a lencsék *leképezési törvényé*hez.

Végezetül megjegyezzük, hogy *Baumgartner* 1826-ban kiadott könyvében [3] a képtávolság képletének levezetése és a fókusztávolság értelmezése után a leképezési törvényt is láthatjuk a ma is használatos egyszerű alakban.

Irodalom


1. Cikkünkben Bolyai Farkas hagyatékának fizikajegyzetei közül a következő kéziratokat használtuk fel: B 652, BF 427, B 541 *Jegyzés a' Világosságról* és *Vilről* (Teleki–Bolyai Könyvtár Marosvásárhely)
2. Gren, Friedrich Albrecht Karl: *Grundriss der Naturlehre.* Halle, 1797, 464–467.
3. Baumgartner, Andreas: *Die Naturlehre.* Wien, 1826, 290–292.


# KÁROLYHÁZY-FELADATOK AZ EÖTVÖS-VERSENYEN III. RÉSZ – ELEKTROSZTATIKA

Az „erőterek” *Károlyházy Frigyes* kedvenc témái közé tartoztak. Már a 60-as években feladott olyan feladatot az Eötvös-versenyen, amelyben különböző sugarú, de egymással párhuzamosan álló fém körlapokból kellett maximális kapacitású kondenzátort összeállítani. A megoldás a telep rákapcsolása után létrejövő elektrosztatikus erőterek vizsgálatán alapult. A 70-es években különösen sok elektrosztatikai problémát fogalmazott át feladattá. Vizsgálni kellett szigetelő fonalakkal összekötött és felfüggesztett, feltöltött golyósor elhelyezkedését valamilyen földelt, illetve feltöltött fémsík felett, vagy éppen azt a mechanikai feszültséget, amely egy síkkondenzátor terében, az erővonalakkal párhuzamosan elhelyezett fémrúdban lép fel. Kifejezetten az erővonalkép felrajzolását kérte az egyik esetben, vagy ki kellett találni a kapillárisban elhelyezkedő higany felszínének elmozdulását az elektromos erőtér hatására egy másik esetben. Nagyon örült, ha az eredményhirdetésen – amelyre sohase jött el, de mindig érdeklődött, hogy mi történt ott – sikerült kísérlettel is bemutatni valamelyik feladatának megoldását. Így történt ez a következő, 1976-ban feladott alábbi példájánál is: