RELATIVISZTIKUS FOGÓCSKA – I. RÉSZ

Bokor Nándor
BME Fizika Tanszék

Három, meglepő eredménnyel járó gondolatkísérlet

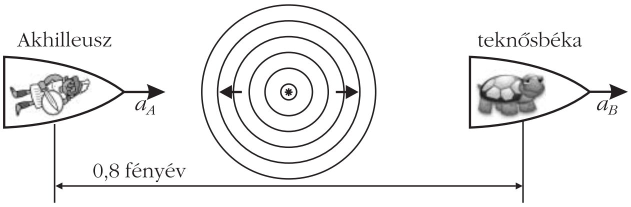
1. Üldözéses versenyhez készülődik a világűrben Akhilleusz és egy teknősbéka. Elhelyezkednek egymástól 0,8 fényév távolságra szabadon lebegő űrhajójukban, ahogy az *1. ábra* mutatja. A félúton levő versenybíró fényimpulzussal adja meg a jelet az indulásra. A teknősbéka jobbra indul, Akhilleusz feladata, hogy utolérje.

A teknősbéka nem ambiciózus, inkább a kényelmet választja. Pontosan földi körülményeket akar teremteni a fedélzeten, ezért állandó $a_B = g = 10$ m/s^2 (saját)-gyorsulásra állítja űrhajóját. Akhilleuszban erősebb a versenyszellem, nagyobb, a_A ($> a_B$) gyorsulással iramodik a teknős után, és – hiába bizonygat Zénón mást – hamarosan utol is éri.

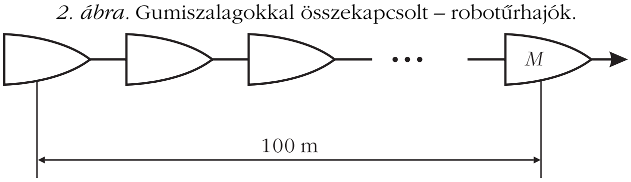
A verseny visszavágóján megint az *1. ábra* szerint helyezkednek el. Ismét egyszerre kapják meg az indítójelet, de a teknősbéka most *kicsit* jobban rákapcsol. Ismét állandó (saját)gyorsulásra állítja űrhajóját, de most $a_B = 1{,}5\ g = 15$ m/s^2 számértékűre. *Ezzel a verseny el is dőlt. Akhilleusznak, akárhogyan igyekszik is, elvi esélye sincs, hogy utolérje a teknőst*. Hogyan lehetséges ez?

2. Galaktikus távolságokra – gumiszalagokkal összekapcsolt – robotűrhajókból álló konvoj szállítja a teherrakományokat a *2. ábra* szerinti elrendezésben. Ezeket a robotűrhajókat úgy tervezték, hogy tetszőlegesen nagy gyorsulást kibírnak, és motorjuk képes is tetszőlegesen nagy gyorsulású mozgásra bírni őket (*gondolatkísérlet!*). Egyetlen korlátozó tényező van: a konvoj első tagja, a *2. ábrá*n *M*-mel jelölt „mozdony”-űrhajó olyan érzékeny vezérlőegységet szállít, amely „csupán” 10^{15} m/s^2 gyorsulást bír ki. A konvoj hossza 100 méter. Az egyes robotűrhajók mozgását úgy hangolják össze, hogy az összekapcsolásukhoz használt gumiszalagok útközben még éppen ne feszüljenek meg.

1. ábra. Akhilleusz és a teknősbéka.



2. ábra. Gumiszalagokkal összekapcsolt – robotűrhajók.



A Galaktikus Szállítóvállalat diszpécsere két meglepő tényt jegyez fel:

1) Ha az *M* űrhajó a benne levő vezérlőegység által még épp kibírható 10^{15} m/s^2 gyorsulással indul, akkor a robotűrhajók közötti gumiszalagok *elkerülhetetlenül* megnyúlnak.

2) 100 helyett *90 méteres konvojt alkalmazva már nincsen gond: megoldható, hogy a gumiszalagok lazák maradjanak*. Hogyan lehetséges ez?

3. Egy szállítóvállalat pilótái azt a feladatot kapják, hogy egy törékeny anyagból készült „fényévrudat” (ami olyan, mint a méterrúd, csak hossza 1 fényév) a Tejútrendszerből egy másik galaxisba szállítsák. A fényévrúd mentén sűrűn űrhajókat helyeznek el, amelyekhez a rudat rögzítik. Az űrhajókba pilóták ülnek, és várják az indulást. A megbeszélt indulási időpontban egy előzetesen betáplált program szerint az összes űrhajó állandó gyorsulással mozgásba lendül. Az űrhajók mozgása gondosan úgy van összehangolva, hogy szállítás közben a törékeny fényévrúdban se húzó-, se nyomófeszültség ne ébredjen.

A fényévrúd speciális festékkel van bevonva: ez induláskor még fehér színű, de az idő múlásával megszürkül, majd teljesen befeketedik.

Az űrhajók pilótái – akik oldalra kinézve ellenőrzik a hozzájuk képest álló fényévrúd hozzájuk közel eső darabkájának állapotát – érdekes jelenségre lesznek figyelmesek. Mindegyikük azt tapasztalja, hogy a fényévrúd *nem egyenletesen szürkül*. Minden fényévrúd-darab menetirány szerinti hátulja világosabb, mint az eleje (ahogy a *3. ábra* mutatja), ami azt jelenti, hogy a fényévrúd egyes darabjai – és így a pilóták – *nem azonos ütemben öregednek*. Hogyan lehetséges ez?

A Dewan–Beran gondolatkísérlet

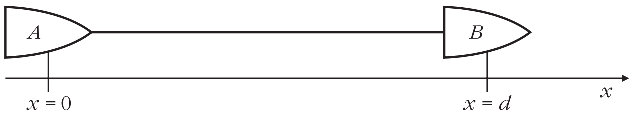
Mindhárom fenti példa tág értelemben az úgynevezett Dewan–Beran gondolatkísérlethez [1] (közismertebb, bár kevésbé jogos nevén a „Bell-féle rakétaparadoxon”-hoz) kapcsolódik.

A Dewan–Beran gondolatkísérlet így hangzik:

Két teljesen azonos űrhajót *d* hosszúságú vékony cérnával kötünk össze. Az űrhajók kezdetben állnak a *K* inerciarendszerben, ahogy a *4. ábra* mutatja. Egyszerre elindulnak (az ábrán jobbra), és teljesen azonos mozgással felgyorsulnak *v* végsebességre.

A „teljesen azonos mozgás” azt jelenti, hogy a gyorsulási szakaszaik pontosan ugyanakkora sebességnövekményekből állnak, és ezekre a sebességnövekmé-

3. ábra. A nem egyenletesen szürkülő fényévrúd.



4. ábra. A K inerciarendszerben kezdetben álló űrhajók.

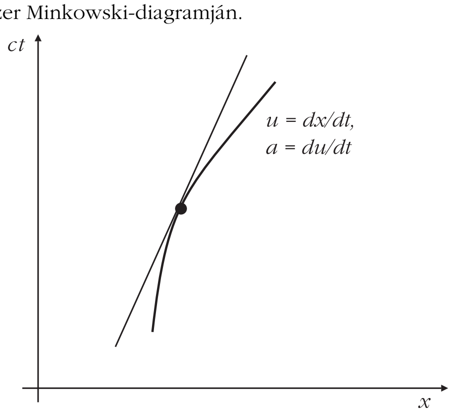
nyekre – akár a K inerciarendszer koordinátaidejét, ***akár az űrhajósok karóráján mutatott sajátidőt nézzük*** – mindig ugyanazokban az időpontokban tesznek szert. A két űrhajó világvonalát a K inerciarendszerbeli Minkowski-diagramon (*5. ábra*) ábrázolva az „azonos mozgások” fogalma még könnyebben érthető: a világvonalak azonos alakú görbék, egymásnak pusztán az x-tengely mentén eltolt másai (és kezdeti meredekségük végtelen).

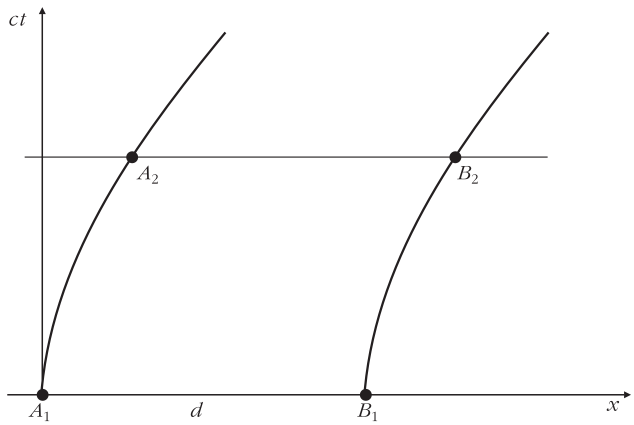
Mi történik a cérnával? A cérna két vége pontosan *ugyanazt a mozgást* végzi. Azt várnánk tehát, hogy a cérna egésze – anélkül hogy mechanikai feszültség ébredne benne – háborítatlanul mozog jobbra. Azonban ez lehetetlen. Az egyre gyorsabban mozgó cérna hossza ugyanis csak a K inerciarendszerből nézve marad állandó (az *5. ábrá*n: például $A_1B_1 = A_2B_2 = d$). Ez viszont – a hosszúságkontrakciót és a cérna egyre gyorsuló mozgását figyelembe véve – azt kell hogy jelentse, hogy *a cérna sajáthossza folyamatosan nő*. Ez természetesen mechanikai feszültségek létrejöttével is jár, tehát a cérna előbb-utóbb *elszakad*.

A *5. ábra* Minkowski-diagramja egyszerű, azonnal átlátható módon írja le a jelenséget, amely azonban így is bántóan ellentmond az intuíciónknak, hiszen a következő mondat igazságát vagyunk kénytelenek megemészteni: „Ha egy éppen csak megfeszített cérna két végét – a cérna hossza mentén – *pontosan ugyanolyan módon* gyorsítjuk, a cérna előbb-utóbb menthetetlenül elszakad.”

A Dewan–Beran gondolatkísérlet által bemutatott jelenségnek nem dinamikai okai vannak. A cérna elszakadását a hosszúságkontrakció tisztán *téridő-geometriai* effektusa okozza, aminek a newtoni mechanikában nyoma sincs. A gondolatkísérlet arra hívja fel a figyelmet, hogy a hosszúságkontrakció nem csupán a mozgási hossz mérésének módszeréből adódó „illúzió”, hanem olyan effektus, amelynek nagyon is *valódi (fizikai) következményei lehetnek*.

6. ábra. A részecske világvonala egy K nyugvó laboratóriumi inerciarendszer Minkowski-diagramján.





5. ábra. A két űrhajó világvonala a K inerciarendszerbeli Minkowski-diagramon.

Mielőtt a cikk elején szerepelt gondolatkísérletek meglepő eredményeinek részletes magyarázatába kezdenék, teszek egy olyan feltevést, amely lényegesen egyszerűsíteni fogja a matematikai részleteket: mostantól olyan mozgásokat fogok tekinteni, amelyekben az adott tömegpont *sajátgyorsulása állandó*. Az első kérdés: milyen görbe írja le az ilyen részecskék világvonalát egy K nyugvó laboratóriumi inerciarendszer (x, ct) Minkowski-diagramján (*6. ábra*)?

Állandó sajátgyorsulással mozgó tömegpont

A sajátgyorsulás állandóságát az

$$a' = \frac{du'}{dt'} = const. \tag{1}$$

egyenlet fejezi ki, ahol a' a gyorsulás, u' a sebesség és t' az idő. Minden vesszős mennyiség a tömegpont *pillanatnyi nyugalmi rendszerében* értendő (abban a K' inerciarendszerben, amely olyan v sebességgel mozog a K-hoz képest, hogy O' origója az adott időpillanat kis környezetében éppen együtt mozog a tömegponttal).

A K és K' közötti Lorentz-féle sebességtranszformációs formula:

$$u' = \frac{u - v}{1 - \dfrac{u\,v}{c^2}}. \tag{2}$$

(Azon esemény szűk környezetében tehát, amelyre az (1) egyenletet felírtuk, $u = v$ és $u' = 0$.)

Az (1) egyenletben szereplő deriválást az összetett függvény deriválási szabályával felírva:

$$\begin{aligned} a' &= const. = \frac{du'}{du}\,\frac{du}{dt}\,\frac{dt}{dt'} = \\ &= \frac{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}{\left(1 - \dfrac{u\,v}{c^2}\right)^2}\,\frac{du}{dt}\,\frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}, \end{aligned} \tag{3}$$

ahol az első tényezőt a (2) egyenlet u szerinti deriválásából kaptuk, a harmadikat pedig az idődilatációs tényezőből. A (3) egyenletet átrendezve, az $u = v$ összefüggés felhasználásával a *gyorsulásdeficitet* kifejező alábbi differenciálegyenlethez jutunk:

$$\frac{du}{dt} = a'\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}. \qquad (4)$$

(A gyorsulásdeficit elnevezés abból ered, hogy – mint a (4) egyenlet mutatja – a tömegpont K vonatkoztatási rendszerben mért gyorsulása *kisebb,* mint a newtoni fizika alapján várt a'.) Az egyenlet közvetlen integrálással kapható megoldása ($u(t=0) = 0$ kezdőfeltétel mellett, azaz nyugalomból induló tömegpont esetén):

$$u\left(= \frac{dx}{dt}\right) = \frac{a'\,t}{\sqrt{1 + \frac{a'^2\,t^2}{c^2}}}. \qquad (5)$$

(5)-ből újbóli integrálással megkapható a világvonal alakját leíró $x(t)$ függvény:

$$x = \frac{c^2\sqrt{1 + \frac{a'^2\,t^2}{c^2}}}{a'} + const. \qquad (6)$$

Átrendezés után:

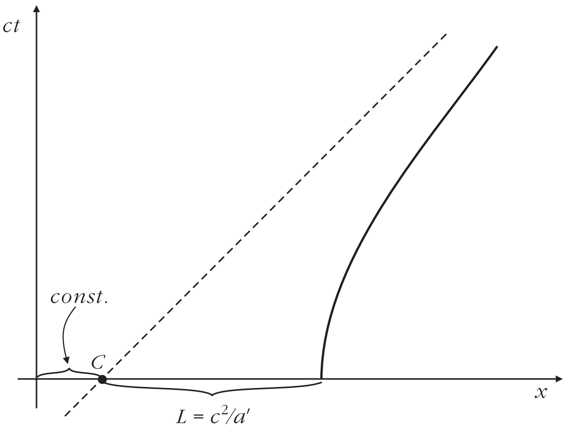
$$\frac{(x - const.)^2}{\left(\frac{c^2}{a'}\right)^2} - \frac{c^2\,t^2}{\left(\frac{c^2}{a'}\right)^2} = 1, \qquad (7)$$

a világvonal alakja tehát hiperbola. A *7. ábra* a (7) egyenlettel felírt hiperbolát (illetve annak pozitív a' sajátgyorsuláshoz tartozó ágát) ábrázolja.

Utolérési limit – az 1. gondolatkísérlet magyarázata

A (7) egyenlet alapján könnyű belátni, hogy a hiperbola aszimptotája – mint a *7. ábra* is mutatja – azon fénysugár világvonala, amely átmegy a C eseményen (az ábrán a C pont a hiperbola úgynevezett középpontja). Más megfogalmazásban az aszimptota nem más, mint a C eseménynél jelen levő objektumok *jövőbeli fénykúpjának* jobb oldali „ága”. A C-nél jelen levő objektumok tehát – bár kezdetben véges távolságra voltak a tömegpontunktól – *soha nem találkozhatnak* vele, hiszen világvonaluk – akármennyire is (legfeljebb 45°-kal) dől a ct-tengelyhez képest – soha nem metszheti a (7) hiperbolát.

A (7) egyenlet nevezőiben szereplő, hosszúságdimenziójú $L = c^2/a'$ kifejezés ennek megfelelően fontos fizikai jelentéssel bír: egyfajta *utolérési limitnek* tekinthető. Ha egy üldöző űrhajó a $t = 0$ pillanatban *legalább L távolságra* helyezkedett el az álló tömegponttól a negatív x-tengely mentén, akkor a tömegpont mozgását leíró hiperbola mindvégig kívül marad az üldöző űrhajó $t = 0$-beli fénykúpján, azon a tartományon, ahová az üldöző *valaha is* eljuthat.



7. ábra. A (7) egyenlettel felírt hiperbola pozitív sajátgyorsuláshoz tartozó ága.

A jelenség szépségét az adja, hogy az űrhajók *véges távolságból* vesznek üldözőbe egy *véges sajátgyorsulással* mozgó tárgyat, és akármilyen gyorsulással is erednek a nyomába, eleve esélytelenek. Ezzel a cikk elején szereplő 1. gondolatkísérlet meglepő eredménye is érthetővé válik. A számadatok ellenőrzését az olvasóra bízom. (Az a tény, hogy a tömegpont világvonala kívül marad a C-ből kiinduló *fénykúpon,* természetesen azt is jelenti, hogy még az üldöző űrhajókból kibocsátott *fényjelek sem* tudják a tömegpontot soha utolérni. Az 1. gondolatkísérletben tehát ha a teknősbéka $a_B = 1{,}5\ g$ értékűre állítja gyorsulását, nemcsak a versenyt sikerül megnyernie, de akkor sem lesz semmi baja, ha a frusztrált Akhilleusz esetleg lézerfegyverrel lő utána.)

A gyorsulás felső korlátja

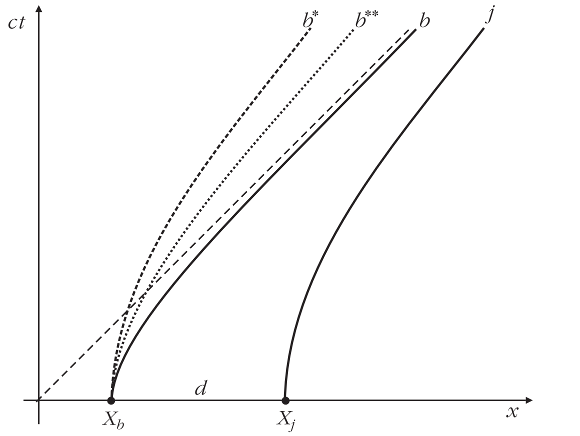
Mozgassuk a Dewan–Beran-kísérlet cérnájának jobb oldali végét állandó a'_j sajátgyorsulással jobbra. Világvonalát a *8. ábra j* jelű hiperbolája mutatja, amelynek az egyenlete:

$$\frac{x^2}{\left(\frac{c^2}{a'_j}\right)^2} - \frac{c^2\,t^2}{\left(\frac{c^2}{a'_j}\right)^2} = 1. \qquad (8)$$

Mint látható, az egyszerűség kedvéért a hiperbolát vízszintes irányban úgy pozicionáltam, hogy az aszimptotája átmenjen az origón. Ez a (7) egyenletben a *const.* = 0 választásnak felel meg, vagyis annak, hogy a *7. ábra C* eseményét (a hiperbola középpontját) az origóba helyeztem.

Mekkora gyorsulással kell mozgatnunk a bal oldali véget, hogy a cérna mindvégig éppen megfeszített maradjon, de ne szakadjon el?

A *8. ábra* szaggatottan jelzett b^* világvonala, amely a j világvonal eltolt mása, tehát szintén a'_j gyorsulású mozgást ír le, biztosan nem jó: a cérna az ilyen moz-



8. ábra. A Dewan–Beran-kísérlet cérnája bal és jobb oldali végének világvonalai.

gás során *elszakad* (sajáthossza *nő*), ezt láttuk már az *5. ábrá*val kapcsolatban. Hogy a cérna ne szakadjon el, a bal oldali végének *nem elég* ugyanolyan sajátgyorsulással mozognia, mint a jobb oldali végének, hanem *szaporábban* kell a jobb oldali vég után igyekeznie. Ilyen lehetséges mozgásokat mutatnak például a *8. ábrá*n a b^{**} és b jelű világvonalak. Melyik lesz az ilyen mozgások közül a megfelelő?

Próbáljuk ki azt az a'_b állandó sajátgyorsulású mozgást, amelynek egyenlete

$$\frac{x^2}{\left(\dfrac{c^2}{a'_b}\right)^2} - \frac{c^2\,t^2}{\left(\dfrac{c^2}{a'_b}\right)^2} = 1. \tag{9}$$

Ez éppen a *8. ábra* b-vel jelölt hiperbolája. A (9) egyenletet a (7) egyenlettel összevetve látható ugyanis, hogy ezen eset különlegessége ismét a *const.* = 0 választás, amely biztosítja, hogy a j jelű hiperboláéval *azonos az aszimptotája*. Ez, valamint az a követelmény, hogy a két hiperbola kezdeti távolsága az x-tengely mentén legyen d (a cérna kezdeti hossza), egyértelműen meghatározza a'_b értékét:

$$X_j - X_b \left(= \frac{c^2}{a'_j} - \frac{c^2}{a'_b} \right) = d, \tag{10}$$

amiből

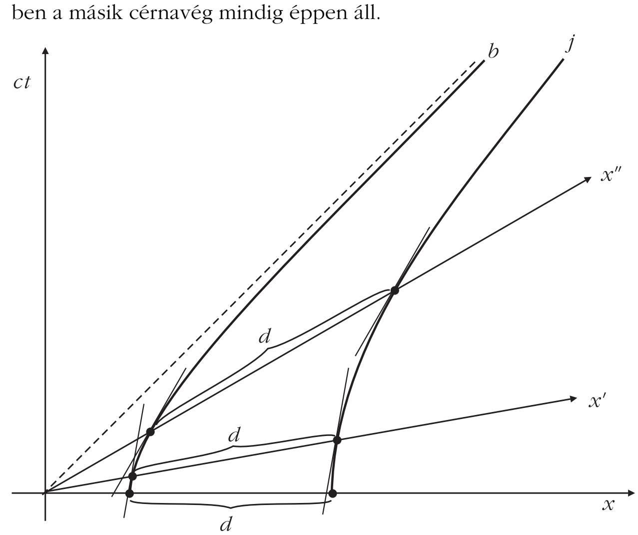
$$a'_b = a'_j \,\frac{1}{1 - \dfrac{d\,a'_j}{c^2}}. \tag{11}$$

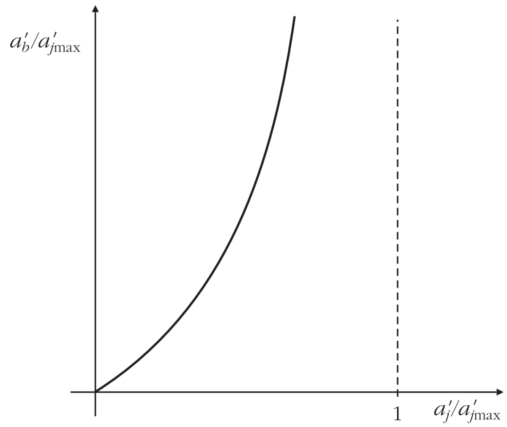
Állítás: ha a bal oldali vég a (11) képletnek megfelelően gyorsul – azaz a b jelű világvonalon mozog –, akkor a cérna *sajáthossza* (és így megfeszítettségi állapota) *mindvégig változatlan marad.* Ez az alábbi gondolatmenettel látható be.

A b jelű hiperbola nem más, mint a különböző jobbra mozgó K', K'' stb. inerciarendszerek x', x'' stb. tengelyeinek kalibrálására szolgáló úgynevezett *kalibrációs hiperbola:* ez metszené ki az x', x'' stb. tengelyekből azt az osztást, ahová a c^2/a'_b hosszértéket fel kell mérni. (A (9) hiperbolának ez a tulajdonsága – amelynek analógiája az euklideszi síkon az (x, y) derékszögű koordinátarendszerhez képest elforgatott (x', y') tengelyek kalibrálására szolgáló kalibrációs *kör* – a Minkowski-koordinátákban felírt téridő-intervallum invarianciájából, az $x^2 - c^2\,t^2 = x'^2 - c^2\,t'^2 = \ldots = const.$ összefüggésből következik). A b világvonalat követő részecske tehát mozgása során mindvégig ugyanakkora, c^2/a'_b „téridő-intervallumnyira” van az origó-eseménytől. Ez azt is jelenti, hogy a részecske *pillanatnyi nyugalmi inerciarendszereiből* végigkövetve a mozgást (egy-egy ilyen inerciarendszerben a részecske világvonala a lokális időtengely irányába mutat) a részecske mindig az adott inerciarendszer x-tengelyének c^2/a'_b osztású pontjában tartózkodik, és *éppen nyugalomban van.* Hasonló módon a j világvonalú részecske is mindvégig ugyanakkora, c^2/a'_j „téridő-intervallumnyira” van az origó-eseménytől, tehát *ő* is *minden* jobbra mozgó inerciarendszer x-tengelyének ugyanazon jelzésű pontjában (a c^2/a'_j pontban) tartózkodik – és éppen nyugalomban van! –, amikor az adott inerciarendszer órái 0-t mutatnak. (Az ilyenkor szokásos módon feltettem, hogy az összes inerciarendszer origója a kezdő időpillanatban egybeesik.) Ez viszont azt jelenti, hogy *abban az inerciarendszerben, amelyben a bal oldali cérnavég éppen áll, a jobb oldali cérnavég is éppen áll.* Ilyen értelemben a két cérnavég közötti távolság – ami ez esetben a cérna *sajáthossza,* hiszen abban a rendszerben mért hossz, amelyben a cérna végei állnak – *nem változik.* A cérna nem szakad el, mindvégig ugyanabban a megfeszítettségi állapotban marad.

Azt a tényt, hogy az egyik cérnavég pillanatnyi nyugalmi inerciarendszerében a másik cérnavég is mindig éppen áll, a *9. ábra* illusztrálja. Az ábrán látható – és analitikusan is könnyen megmutatható –, hogy a két hiperbola *meredeksége,* azaz a két cérnavég *sebessége* minden olyan eseménypárban megegyezik, amelyek

9. ábra. Az egyik cérnavég pillanatnyi nyugalmi inerciarendszerében a másik cérnavég mindig éppen áll.





10. ábra. A bal oldali cérnavég (dimenziótlanná normált) gyorsulása a jobb oldali cérnavég (dimenziótlanná normált) gyorsulásának függvényében.

egy-egy adott inerciarendszer x-tengelye mentén a kezdő időpillanatban egyidejűleg történnek. A két cérnavég tehát *egymáshoz képest* nem mozog. Érdemes ezt összevetni a b^* és j jelű hiperbolák viselkedésével: abban az esetben is kijelenthető, hogy „minden pillanatban megegyezik a két cérnavég sebessége”, de ott a „minden pillanatban” szó a végig nyugvó laboratóriumi inerciarendszer egyidejű pillanatait jelenti.

A *8. ábra b* és *j* jelű hiperboláival – (8) és (9) egyenletek – megtaláltuk tehát azt a mozgáspárt, amelyet a cérna bal és jobb oldali végének követnie kell, hogy a cérna mindvégig éppen megfeszített legyen, de ne szakadjon el. (Természetesen a cérna közbülső pontjainak is a megfelelő, egymástól eltérő gyorsulású mozgást kell végezniük. Világvonaluk a *8. ábrá*n olyan, *b* és *j* között elhelyezkedő hiperbolasereget adna, amelyek középpontja az origóban van, és közös aszimptotájuk a 45°-os egyenes.) A fenti számolás – bár korrekt – azzal a zavarba ejtő következménnyel jár tehát, hogy a cérna *állandó* sajáthosszának biztosításához a bal oldali végnek *jobban* (nagyobb gyorsítóteljesítménnyel) kell igyekeznie, mint a jobb oldali végnek. Ami még zavarbaejtőbb: a jobb oldali cérnavég adott gyorsulású mozgása mellett *minél hosszabb a cérna, annál nagyobb gyorsulással kell a bal oldali végnek igyekeznie, hogy a szakadást elkerülje*. Felmerül tehát a kérdés: a cérna hosszát növelve nem jutunk-e el előbb-utóbb valamilyen elvi korláthoz, vagyis olyan cérnahosszhoz, amikor a bal oldali cérnavégnek *semmilyen* mozgása nem tudja a szakadást megakadályozni? Vagy: adott cérnahosszúság mellett *a jobb oldali vég sajátgyorsulását* növelve nem jutunk-e el előbb-utóbb valamilyen elvi korláthoz, vagyis olyan sajátgyorsuláshoz, amikor a bal oldali végnek *semmilyen* mozgása nem tudja a cérna szakadását megakadályozni?

A választ (de igen, *vannak* ilyen elvi korlátok!) a (11) összefüggésből kiindulva kaphatjuk meg. Sejthető, hogy a képlet jobb oldalán szereplő, gyorsulás dimenziójú c^2/d mennyiségnek fontos fizikai tartalma lesz. Vezessük be rá az $a'_{j\max}$ jelölést (mindjárt kiderül, miért) és a segítségével normáljuk az a'_b és a'_j gyorsulásokat. A (11)-ből így az alábbi dimenziótlan egyenletre jutunk:

$$\frac{a'_b}{a'_{j\max}} = \frac{a'_j}{a'_{j\max}} \frac{1}{1 - \dfrac{a'_j}{a'_{j\max}}}, \qquad (12)$$

A bal oldali cérnavég (dimenziótlanná normált) gyorsulását a jobb oldali cérnavég (dimenziótlanná normált) gyorsulásának függvényében a *10. ábra* mutatja. A (12) egyenletből és a *10. ábrá*ból világossá válik az $a'_{j\max}$ konstans jelentése: ahogy a jobb oldali cérnavég gyorsulása megközelíti $a'_{j\max}$-ot, a bal oldali cérnavég gyorsulásának végtelenhez kell tartania, hogy a cérna azonos megfeszítettségi állapotban maradhasson. Az

$$a'_{j\max} = \frac{c^2}{d}, \qquad (13)$$

tehát azt a *kritikus sajátgyorsulást* adja meg, amelyet nem érhet el egy adott *d* hosszúságú, jobb felé mozgó objektum jobb oldali végének mozgása, ha azt akarjuk, hogy az objektum (ténylegesen, fizikailag) ne nyúljon meg (vagy szakadjon el). Ha a jobb oldali vég $a'_{j\max}$-ot elérő vagy meghaladó sajátgyorsulással mozog, akkor a bal oldali végnek még *végtelen sajátgyorsulás sem elég* ahhoz, hogy „lépést tartson” vele (hogy az objektum sajáthosszát változatlan értéken tartsa).

Irodalom

1. E. Dewan, M. Beran: Note on stress effects due to relativistic contraction. *Am. J. Phys. 27* (1959) 517.