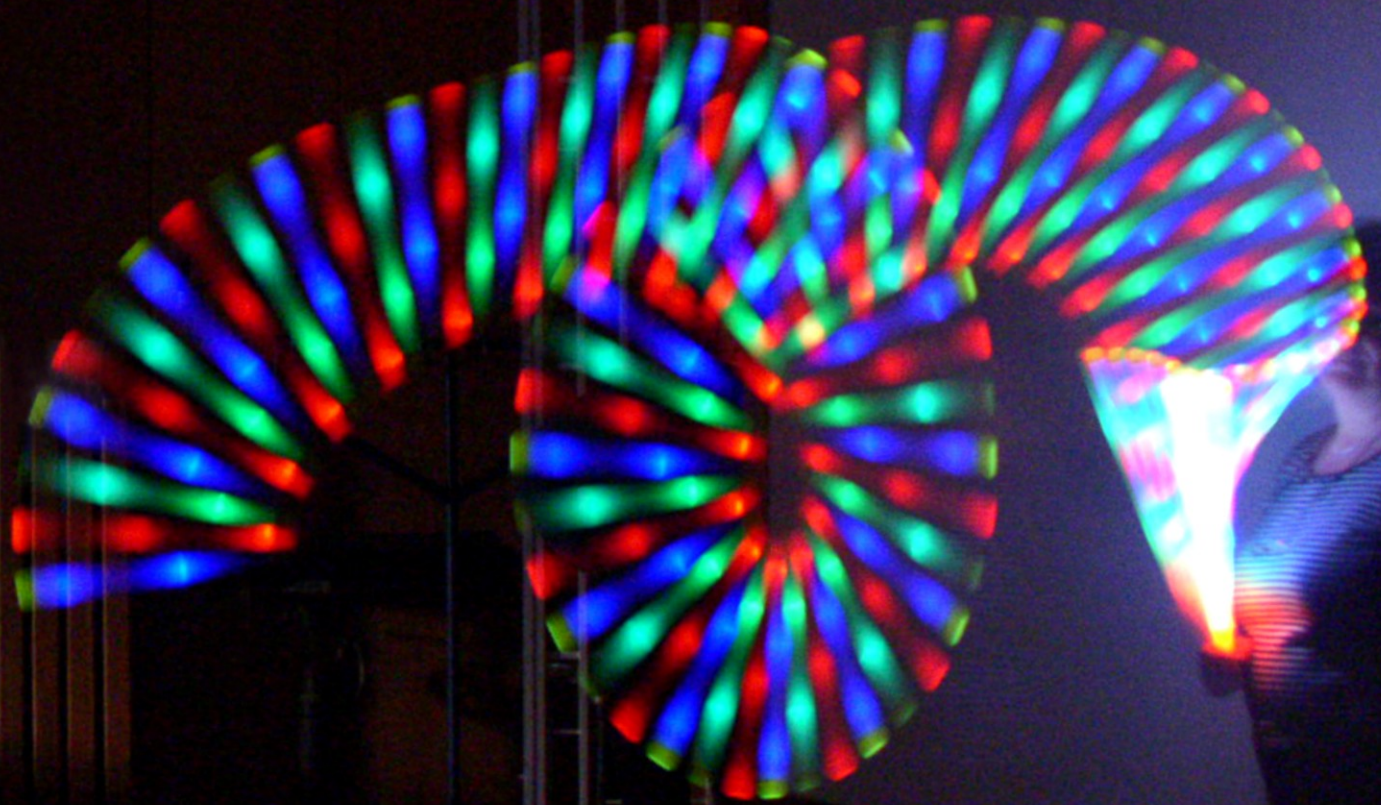


# fizikai szemle



2012/9

Az Eötvös Loránd Fizikai Társulat  
havonta megjelenő folyóirata.  
Támogatók: A Magyar Tudományos  
Akadémia Fizikai Tudományok Osztálya,  
a Nemzeti Erőforrás Minisztérium,  
a Magyar Biofizikai Társaság,  
a Magyar Nukleáris Társaság  
és a Magyar Fizikushallgatók Egyesülete

Főszerkesztő:

Szatmáry Zoltán

Szerkesztőbizottság:

Bencze Gyula, Czitrovszky Aladár,  
Faigel Gyula, Gyulai József,  
Horváth Gábor, Horváth Dezső,  
Iglói Ferenc, Kiss Ádám, Lendvai János,  
Németh Judit, Ormos Pál, Papp Katalin,  
Simon Péter, Sükösd Csaba,  
Szabados László, Szabó Gábor,  
Trócsányi Zoltán, Turiné Frank Zsuzsa,  
Ujvári Sándor

Szerkesztő:

Füstöss László

Műszaki szerkesztő:

Kármán Tamás

A folyóirat e-mail címe:

[szerkesztok@fizikaiszemle.hu](mailto:szerkesztok@fizikaiszemle.hu)

A lapba szánt írásokat erre a címre kérjük.

A folyóirat honlapja:

<http://www.fizikaiszemle.hu>

A címlapon:

Forgatva eldobott villogó bot fény- és  
nyomképe Härtlein Károly felvételén.  
Részletek a szerző írásában.

## TARTALOM

<i>Tél András, Czmerk András, Tél Tamás:</i> Kvantált vezérlési problémák – I. rész	289
<i>Blabó Miklós, Egri Ádám, Horváth Gábor, Hegedüs Ramón, Kriska György, Jósvai Júlia, Tóth Miklós, Kertész Krisztián, Biró László Péter:</i> A cirkulárisan fénypolarizáló szkarabeuszok nem reagálnak a cirkuláris polarizációra – II. rész	295
<i>Kövesi-Domokos Zsuzsa:</i> Kozmikus sugárzás extrém energiákon – II. rész	298
<i>Bokor Nándor:</i> Relativisztikus fogócska – I. rész	301
<i>Károlyházy Frigyes, 1929–2012 (Groma István, Kürti Jenő, Gálfi László, Csákány Judit)</i>	306
<i>Frenkel Andor:</i> A kvantummechanika Károlyházy-modellje	310
<b>A FIZIKA TANÍTÁSA</b>	
<i>Károlyházy-feladatok az Eötvös-versenyen – I. rész, mechanika (Radnai Gyula)</i>	313
<i>Härtlein Károly:</i> Kísérletezzünk otthon!	324
<b>VÉLEMÉNYEK</b>	
<i>Oláb Károly:</i> Az entrópiaprobléma – II. rész	320
<b>HÍREK – ESEMÉNYEK</b>	
<i>A. Tél, A. Czmerk, T. Tél:</i> Problems of quantized control – part I	
<i>M. Blabó, Á. Egri, G. Horváth, R. Hegedüs, G. Kriska, J. Jósvai, M. Tóth, K. Kertész, L. P. Biró:</i> No reaction to circularly polarized light by scarabs although expected for these polarizing beetles – part II	
<i>Z. Kövesi-Domokos:</i> Cosmic radiation at extreme energies – part II	
<i>N. Bokor:</i> Relativistic catching up – part I	
<i>Frigyes Károlyházy, 1929–2012 (I. Groma, J. Kürti, L. Gálfi, J. Csákány)</i>	
<i>A. Frenkel:</i> The Károlyházy model of quantum mechanics	
<b>TEACHING PHYSICS</b>	
<i>Eötvös Physical Competition problems contributed by F. Károlyházy – part I, Mechanics (G. Radnai)</i>	
<i>K. Härtlein:</i> Physical experiments to be performed at home	
<b>OPINIONS</b>	
<i>K. Oláb:</i> The entropy problem – part II	
<b>EVENTS</b>	
<i>A. Tél, A. Czmerk, T. Tél:</i> Probleme der gequantelten Steuerung – Teil I	
<i>M. Blabó, Á. Egri, G. Horváth, R. Hegedüs, G. Kriska, J. Jósvai, M. Tóth, K. Kertész, L. P. Biró:</i> Scarabäus unempfindlich für zirkular polarisiertes Licht: unerwartet für Käfer, die selbst zirkular polarisieren – Teil II	
<i>Z. Kövesi-Domokos:</i> Kosmische Strahlung extremer Energien – Teil II	
<i>N. Bokor:</i> Einholen bei relativistischen Geschwindigkeiten – Teil I	
<i>Frigyes Károlyházy, 1929–2012 (I. Groma, J. Kürti, L. Gálfi, J. Csákány)</i>	
<i>A. Frenkel:</i> Das Károlyházy Modell der Quantenmechanik	
<b>PHYSIKUNTERRICHT</b>	
<i>Aufgaben zu den Eötvös-Wettbewerben von F. Károlyházy – Teil I, Mechanik (G. Radnai)</i>	
<i>K. Härtlein:</i> Zu Hause ausgeführte Experimente	
<b>MEINUNGSÄUSSERUNGEN</b>	
<i>K. Oláb:</i> Das Entropieproblem – Teil II.	
<b>EREIGNISSE</b>	
<i>A. Тел, А. Чмерк, Т. Тел:</i> Проблемы квантового управления	
<i>M. Блахо, А. Эгри, Г. Хорват, Р. Гегедюш, Г. Кришка, Ю. Ёшваи, М. Тот, К. Кертес, Л. П. Биро:</i> Отсутствие реакции на поляризованный свет жуков рода скарабэус, самых осуществляющих ту же поляризацию – часть вторая	
<i>Ж. Кёвеш-До-мокос:</i> Космическое излучение на сверхвысоких энергиях – часть вторая	
<i>Н. Бокор:</i> Как догнать и перегнать по теории относительности – часть первая	
<i>Фридеш Каройхази, 1929–2012 (И. Грома, Э. Кюрти, Л. Галфи, Ю. Чакаи)</i>	
<i>А. Френкель:</i> Каройхази-модель квантовой механики	
<b>ОБУЧЕНИЕ ФИЗИКЕ</b>	
<i>Задачи физического конкурса им. Этвеша от Ф. Каройхази – часть первая, механика (Г. Раднаи)</i>	
<i>К. Гэртлейн:</i> Эксперименты для выполнения дома	
<b>ЛИЧНЫЕ МНЕНИЯ</b>	
<i>К. Оля:</i> Проблема энтропии – часть вторая	
<b>ПРОИСХОДЯЩИЕ СОБЫТИЯ</b>	

**Fizikai Szemle**  
MAGYAR FIZIKAI FOLYÓIRAT

megjelenését anyagilag támogatják:



## KVANTÁLT VEZÉRLÉSI PROBLÉMÁK – I. RÉSZ

### Megállítható-e fordított helyzetében a mozgatott felfüggesztésű inga?

Tél András, BME, I. éves mechatronika MSc hallgató

Czmerk András, BME Mechatronikai, Optikai és Gépészeti Informatikai Tanszék

Tél Tamás, ELTE Elméleti Fizikai Tanszék

Manapság széles körben kutatják azokat a problémákat, amelyekben a feladat egy rendszer instabil állapotba történő juttatása. Erre a célra általában szabályozást használnak, amelynek során visszacsatolásokkal beavatkozunk a rendszer dinamikájába.

A vezérlés és a szabályozás közötti különbség a visszacsatolás jelenlététől függ, a vezérlés során nem alkalmazunk visszacsatolást, vagyis kizárólag a kezdeti feltételek és a paraméterek helyes megválasztásával érjük el a kívánt viselkedést. A folyamat jobb ellenőrizhetősége miatt a szabályozás a modernebb, elterjedtebb technológia, de az érzékelő, beavatkozó áramkörök miatt bonyolultabb, és öngerjedés is feléphet.

A vezérlés akkor alkalmazható egyszerűen, ha a rendszer végállapota stabil. Mi történik, ha e feltétel nem teljesül, vagyis, ha a vezérléssel elérendő állapot *instabil*? Eljuttatható a rendszer csupán vezérléssel instabil nyugalmi állapotába?

### Bevezetés

A feladat általános megoldása reménytelennek tűnik, az instabilitás miatt a vezérlés végrehajtása nem garantált. Ezért bevezetjük a *sikeres vezérlés* fogalmát,

Megjegyezzük, hogy a fordított inga az 1950-es évek óta gyakran használt berendezés a szabályozástechnikai laboratóriumokban. Megépített változata egy kocsin elhelyezett inga, amely általában egy egyenes mentén mozog. Szabályozással a legtöbb esetben az inga fordított helyzetben tartását tűzik ki célul a mérnökök, mások az ebbe a helyzetbe való eljuttatáson dolgoznak, ritkán előfordul, hogy egyszerre mindkét feladatra alkalmassá teszik a robotot [1]. A mai szabályozástechnikával már a fordított hármast inga felállítására és megtartására sem jelent akadályt [2, 3].

amelyen azt értjük, hogy a vezérlési eljárással el tudjuk juttatni a rendszert az amúgy instabil állapotba.

Egyszerű modellként a fordított inga<sup>1</sup> mozgását vizsgáljuk a felfüggesztési pont valamilyen irányba történő, adott  $a(t)$  függvény szerinti gyorsítása mellett). A gyorsítási függvény kezdeti maximális értékéről 0-hoz tart, és a függvény lecsengését egy  $\tau$  időállandó írja le. A kérdés az, hogy az inga egy tetszőleges kezdeti állapotból eljuttatható-e felállított állapotába.

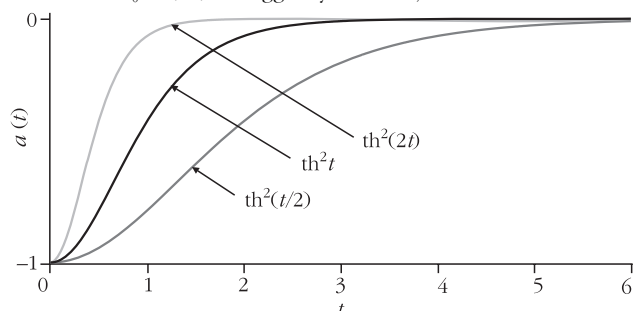
Dolgozatunkban a cél a fordított helyzetbe szabályozás nélkül történő eljuttatás. A fő kérdés: mennyire lehet a vezérlés sikeres?

Nem tudhatjuk, hogy sikeres vezérlés bármilyen  $a(t)$  gyorsulás mellett lehetséges-e. Konkrét példaként az

$$a(t) = a_0 \left( \text{th}^2 \frac{t}{\tau} - 1 \right) < 0 \quad (1)$$

formát vizsgáljuk, ahol  $\tau$  egy időállandó és  $a_0$  a kezdeti gyorsulás nagysága. Szemléletesen fogalmazva,  $\tau$  azt az időt jelöli, ahol a  $\text{th}^2$  függvény a 0 és az 1 értékek között az átváltási folyamat közepéhez ér (1. ábra).

1. ábra. Az  $a_0[\text{th}^2(t/\tau)-1]$  függvény a  $\tau = 1/2, 1$  és  $2$  időállandókkal.



Szükség lesz a felfüggesztési pont helyzetének ismeretére is. A sebességre az (1) egyenlet integrálásából

$$v(t) = -a_0 \tau \operatorname{th} \frac{t}{\tau} + v_0 \quad (2)$$

adódik, ahol  $v_0$  a felfüggesztési pont kezdősebessége. Hosszú idő után  $\operatorname{th}(t/\tau) \sim 1$ , így a  $v_0 - a_0 \tau$  sebesség általában nem nulla. Szemléltetés céljából olyan mozgást érdemes vizsgálni, amelynek végén a felfüggesztési pont megáll. Ez csakis a  $v_0 = a_0 \tau$  kezdősebességgel érhető el. Az origóból induló mozgás esetén az elmozdulás ekkor

$$s(t) = a_0 \tau \left[ t - \tau \ln \left( \operatorname{ch} \frac{t}{\tau} \right) \right] \quad (3)$$

A felfüggesztési pont mozgása tehát olyan, hogy a nagy negatív kezdeti gyorsulás ellenére a pozitív  $a_0 \tau$  kezdősebesség miatt végig pozitív irányú, s éppen a negatív gyorsulás vezet arra, hogy a mozgás egy idő után megáll. Hosszú idő után

$$\operatorname{ch} \frac{t}{\tau} \sim \frac{e^{t/\tau}}{2}, \quad (4)$$

így a pozitív irányban megtett teljes elmozdulás:

$$s_{\max} = a_0 \tau^2 \ln 2. \quad (5)$$

Az egyszerűség kedvéért csak az (1) gyorsulással függőlegesen és vízszintesen gyorsított inga esetét vizsgáljuk. A mozgásegyenlet numerikus szimulálása azt mutatja, hogy „sikeres vezérlés” mindkét esetben a  $\tau$  időállandó bizonyos diszkrét értékeinél lehetséges. Ezért mondjuk, hogy a vezérlési probléma kvantált.

## A függőlegesen gyorsított inga

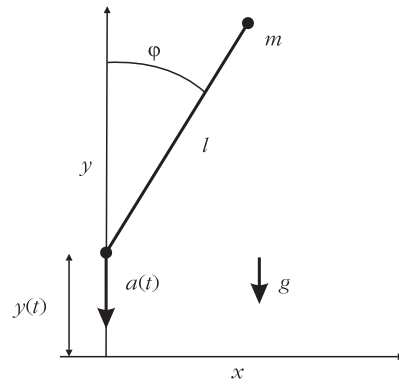
A nyugvó felfüggesztésű,  $l$  hosszúságú fordított inga mozgásegyenlete [4]

$$\ddot{\varphi} = \frac{g}{l} \sin \varphi, \quad (6)$$

ahol  $g$  a gravitációs gyorsulás abszolútértéke. A  $\varphi$  szöget érdemes a pozitív  $y$  tengellyel bezárt szöggént értelmezni (2. ábra), mert így a sikeres vezérlés éppen a  $\varphi = 0$  állapotnak felel meg.

A függőleges egyenes mentén (1) szerint lefelé gyorsított inga egyenletét legegyszerűbben együttmozgó koordináta-rendszerben kapjuk meg. Ebben fellép egy felfelé, azaz pozitív irányba mutató  $-a(t)$  tehetetlenségi gyorsulás, amely csökkenti a negatív irányba mutató  $g$  gravitációs gyorsulást. Az eredő gravitációs gyorsulás ezért  $-a(t) - g$ . Így a függőleges irányban gyorsított fordított inga mozgásegyenlete

$$\ddot{\varphi} = \frac{a(t) + g}{l} \sin \varphi. \quad (7)$$



2. ábra. A függőlegesen gyorsított fordított inga koordinátáinak értelmezése,  $m$  az  $l$  hosszúságú súlytalan rúd végén elhelyezkedő test tömege, amely azonban nem jelenik meg a mozgásegyenletben.

Az (7) egyenlet nemlineáris differenciálegyenlet. Jobb oldala ráadásul expliciten is függ az időtől, a differenciálegyenlet *nem autonóm*, vagyis a mozgás folytatását nem csak a test pillanatnyi helyzete és sebessége határozza meg, hanem egy külső hatás is.

Az (7) egyenlet alapján szemléletesen is világos, miért érhető el sikeres vezérlés. Nagy negatív kezdeti gyorsulás esetén a  $-a(t) - g$  eredő gyorsulás eleinte pozitív, azaz olyan a helyzet, mintha a gravitációs gyorsulás *felfelé* mutatna. Ez stabilizálja a  $\varphi = 0$  állapotot. Miután az  $a(t)$  gyorsulás elegendően csökkent ahhoz, hogy az eredő is negatív legyen, akkortól már „csak” arra kell figyelniünk, hogy az inga az instabil állapota közelében maradjon és ahhoz közelítsen.

A konkrét (1) gyorsulásfüggvényt behelyettesítve a megoldandó differenciálegyenlet

$$\ddot{\varphi} = \frac{a_0 \left( \operatorname{th}^2 \frac{t}{\tau} - 1 \right) + g}{l} \sin \varphi. \quad (8)$$

Célszerű az egyenletet dimenziótlan alakra hoznunk. Válasszuk ezért az időegységet  $\tau$ -nak, és  $t/\tau$ -t dimenziótlan  $t'$  időnek. A dimenziós  $t = \tau t'$  idő szerinti deriválás  $\tau$ -val történő osztást hoz be. Ha továbbra is  $\varphi$ -tal jelöljük a dimenziótlan második deriváltat és áttérünk a dimenziótlan idő  $t$ -vel történő jelölésére, akkor

$$\ddot{\varphi} = \frac{\tau^2 \left[ a_0 (\operatorname{th}^2 t - 1) + g \right]}{l} \sin \varphi. \quad (9)$$

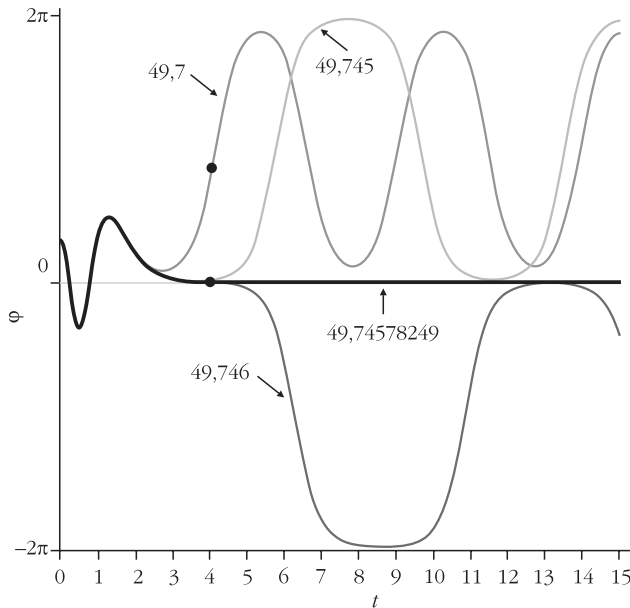
Az

$$A = \frac{a_0 \tau^2}{l} \quad \text{és} \quad d = A - \frac{\tau^2 g}{l} = \frac{(a_0 - g) \tau^2}{l} \quad (10)$$

jelölések bevezetésével a (9) egyenlet átírható, mint

$$\ddot{\varphi} = (A \operatorname{th}^2 t - d) \sin \varphi. \quad (11)$$

A (8)–(11) kifejezésekből leolvasható, hogy  $A$  a kezdeti gyorsulás nagyságának dimenziótlan értékét jelenti. A  $d$  mennyiség ugyanakkor ezen érték és a gravitációs gyorsulás  $(\tau^2 g)/l$  dimenziótlan kifejezésének különbsége,



3. ábra. Szimulálással meghatározott szögkitérés-idő függvény különböző  $d$  értékek mellett ( $A = 56$ ,  $\varphi_0 = 1$ ,  $\Phi = 0$ ). A  $t_a = 4,09$  pillanatot, amely után a gyorsítás elhanyagolható, fekete pont jelöli.

vagyis az eredő (felfelé mutató) gyorsulás kezdeti nagysága az együttmozgó rendszerben. Az  $A-d$  mennyiség tekinthető a  $\tau$  időállandó dimenziótlan értékének is.

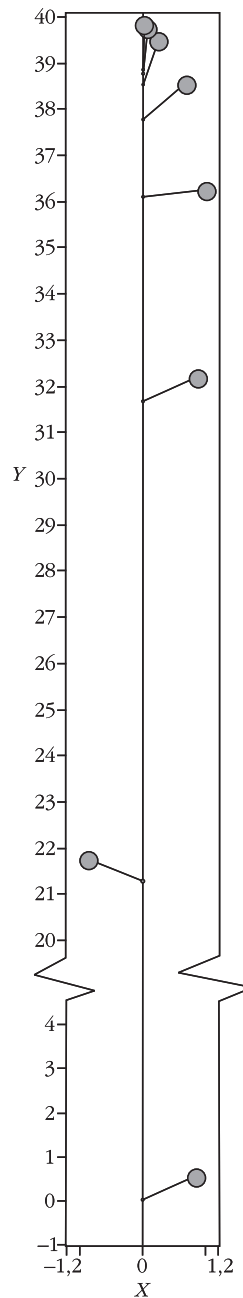
### A sikeres vezérlés mozgásformái

A (11) differenciálegyenletet numerikusan a LabView programmal [5] oldottuk meg [6].

A függőlegesen gyorsított inga jellegzetes mozgásformáit a 3. ábrán mutatjuk be az  $A = 56$  dimenziótlan kezdeti gyorsulás mellett. A  $d = 49,7$  választással a  $\varphi_0 = 1$  rad és  $\Phi_0 = 0$  kezdőfeltétel esetén az inga először átlendül a  $\varphi = 0$  holtpontra, egy negatív irányú maximális kitérést elérve visszafordul, majd átlendül, és a kezdőfeltételnél nagyobb pozitív maximumot elérve ismét a 0 felé közelít. A  $t_c = 1,76$  pillanatig az eredő gyorsulás felfelé mutat, ami miatt az inga „egyensúlyi” állapota a  $\varphi = 0$  állapot, amely körül rezgett.  $t > t_c$ -re az eredő gyorsulás negatív (még ha eleinte nem is veszi fel a teljes  $g$  értéket). Konkrét esetünkben az inga  $\varphi = 0$  (most már instabil) helyzetét azonban nem éri el, és mire onnét eltávolodik, a gyorsítás gyakorlatilag 0-vá válik.  $t_a = 4,09$ -re a  $g$  gyorsulást  $1/100$  pontossággal elérjük, de a szögkitérés ekkor már erősen pozitív, és ezután egy végtelen ideig tartó, nagy amplitúdójú lengés kezdődik.

A  $d = 49,745$  paraméterrel az inga már hosszabb ideig közelíti meg a  $\varphi = 0$  helyzetet, de onnét még visszasesik. Az inga a 0 állapotot jobban megközelíti, a lengés periódusideje ezért hosszabb, mint az előző esetben. Az alig nagyobb  $d = 49,746$  paraméterrel az inga, miután ismét megközelítette a  $\varphi = 0$  értéket, a másik oldalra esik le, a  $\varphi$  értékek végig negatívak maradnak.

A folytonosság alapján ebből tudhatjuk, hogy a sikeres vezérlés ezen két  $d$  érték között valósul meg.



4. ábra. A gyorsított inga mozgásának fázisai a  $t = 0, 0,5, 1, 1,5, 2, 2,5, 3$  és  $3,5$  pillanatokban,  $A = 56$ ,  $\varphi_0 = 1$ ,  $\Phi = 0$ ,  $d = d_2$  esetén. A maximális függőleges elmozdulás (5) szerint  $J_{\max} = A \ln 2 = 38,8$  dimenziótlan egység.

Numerikus számolásunk szerint  $d_2 = 49,74578249$ .

A 4. ábra a sikeres vezérlés térbeli lefolyását mutatja néhány pillanatfelvétellel. A megfelelő  $\varphi(t)$  függvény a 3. ábra vastag görbéje szerint  $t = 3,5$  után jól belesimul a vízszintes tengelybe.

A  $d_2$  jelölést az indokolja, hogy ugyanezekkel a kezdőfeltételekkel két kisebb  $d$  értékénél is találhatunk sikeres vezérlést. Ezek  $d_1 = 33,22$  és  $d_0 = 7,65$ . A hozzájuk tartozó mozgások annyiban különböznek, hogy a  $\varphi = 0$  érték elérése előtt a  $\varphi(t)$  függvény egyszer, illetve egyszer sem vált előjelet.

Az általános tapasztalat tehát az, hogy adott  $\varphi_0$ ,  $\Phi_0$  mellett csak néhány  $d_n$  érték esetén létezik sikeres vezérlés, ezek  $d_0, d_1 \dots d_{N-1}$ , ahol  $N$  az összes sikeresen vezérelhető eset száma. Ezen  $d_n$ -ek összességét *vezérlési spektrum*-nak nevezzük.

### A vezérlési spektrum fizikai jelentése

A  $d_n$  spektrum megtalálása (10) értelmében azt jelenti, hogy megtaláltunk egy olyan  $\tau$  időállandót, amellyel az adott (1) típusú gyorsítási függvény mellett sikeres vezérlés valósítható meg.  $d_n$  ismeretében tehát a vezérléshez szükséges  $n$ -edik időállandó

$$\tau_n = \sqrt{\frac{l}{g}(A - d_n)}, \quad (12)$$

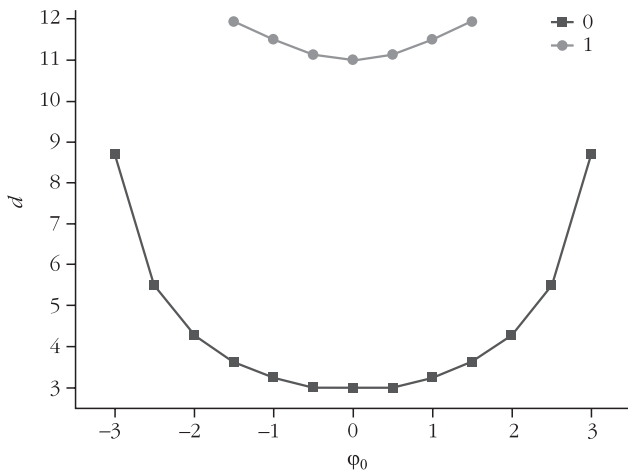
$$n = 0, \dots, N-1,$$

ahol  $N$  a kvantált vezérlési lehetőségek száma. Mivel  $\tau_n$  pozitív, ez mutatja, hogy csak a

$$d_n < A \quad (13)$$

megoldások bírnak fizikai jelentéssel. A  $d_n$  értékek tehát meghatározzák a vezérléshez választandó karakterisztikus időket.

Látjuk, hogy ha  $d_n$  közel esik  $A$ -hoz, akkor a  $\tau_n$  időállandó igen kicsinek adódik. A gyorsításnak ilyenkor szinte pillanatszerűnek kellene lennie, aminek megvalósítása nehéz.



5. ábra. Vezérlési spektrum  $A = 12$ -re.

A (10) bal oldali egyenlete meghatározza az  $a_0$  kezdeti gyorsulást is, hiszen a  $d_n$ -hez tartozó  $\tau_n$  behelyettesítése után:

$$a_{0,n} = \frac{A}{A - d_n} g. \quad (14)$$

Az  $n$ -ik sikeres vezérléshez tartozó megoldáshoz tehát ekkora kezdeti gyorsulás szükséges. Vegyük észre, hogy ez független az inga  $l$  hosszától.

Ha  $d_n$  nagyon közel esik a maximális  $A$  dimenziótlan gyorsuláshoz, akkor  $a_{0,n}$  jóval nagyobb lehet, mint maga a  $g$  gravitációs gyorsulás. Amennyiben például  $10 g$ -t tekintünk még megvalósítható kezdeti gyorsulásnak, akkor elegendő a

$$d_n < \frac{9}{10} A \quad (15)$$

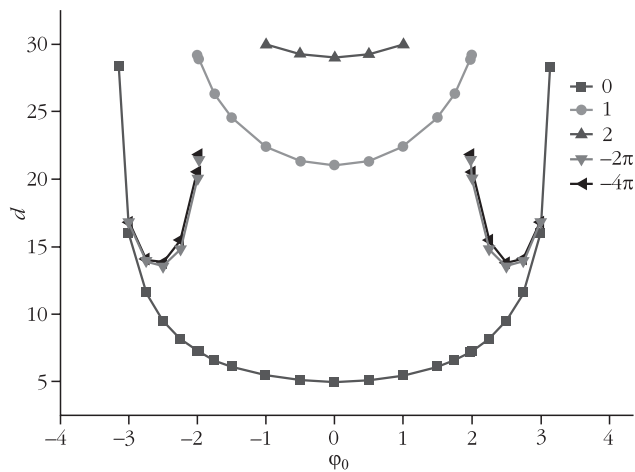
tartományra korlátozódunk.

A (12) összefüggés megadja a (4. ábrán bemutatott) mozgáshoz tartozó időállandót: ehhez ismernünk kell az inga hosszát.  $l = 0,1$  m,  $1$  m és  $10$  m-es ingákra rendre  $\tau_2 = 0,25$  s,  $0,79$  s, és  $2,5$  s értékeket kapjuk. A kezdeti gyorsulás (14) szerint független az inga hosszától, s így mindegyik hossz esetén  $a_{0,2} = 8,59 g$ , azaz meglehetősen nagy kezdeti gyorsulás szükséges a  $d_2$ -höz tartozó kvantált vezérlés megvalósításához. A  $d_1, d_0$  értékhez rendre az  $a_{0,1} = 2,45 g$ ,  $a_{0,0} = 1,15 g$  kezdeti gyorsulás tartozik.

## A vezérlési spektrum szögfüggése

A spektrum meghatározását szisztematikusan elvégeztük különböző  $A$  értékek mellett a kezdeti  $\varphi_0$  szögkitérések  $-\pi$  és  $+\pi$  közötti tartományában nulla kezdeti szögsebességgel. A kvantált  $d_n$  értékekre vonatkozó eredményeket a 5.–7. ábrák foglalják össze.

Az  $A = 12$  esetben összesen két görbét találunk (5. ábra), mindegyik tükörszimmetrikus a függőleges tengelyre. A kisebb értékekhez tartozó  $d_0(\varphi_0)$  ág a teljes  $\varphi_0$  tartományra kiterjed, a második,  $d_1(\varphi_0)$  ág azonban megszűnik – eléri a  $d_1 = A = 12$  értéket, lásd (13) –, a

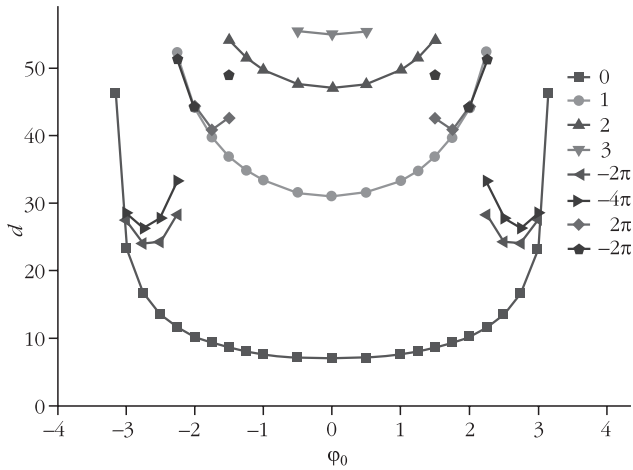


6. ábra. Vezérlési spektrum  $A = 30$ -ra. Az egész számokhoz tartozó szimbólumok a  $d_n$  ág  $n$  indexére utalnak, a többi szám azt jelzi, hogy mekkora szögelfordulás után állapodik meg az inga a  $\varphi = 0$  helyen.

$|\varphi_0| = 1,5$  érték körül. A két ághoz tartozó mozgás annyiban különbözik, hogy  $d_0$  mentén az inga szögkitérése végig azonos előjelű a kezdetivel, azaz nem történik előjelváltás az instabil állapot eléréséig. Ezzel szemben a  $d_1$  ág mentén a szögkitérés egyszer előjelet vált, és csak azután közelít a kitérülésmentes állapothoz, de anélkül, hogy közben átfordulna. A  $d_2$  értékek azonban nagyon közel esnek  $A$ -hoz, ezért (12) szerint az időállandók nagyon kicsik, és a kezdeti gyorsulások (15) alapján megvalósíthatatlan,  $10 g$ -nél nagyobb értékre vezetnek. A felső ág matematikai létezése ellenére sem jelenti tehát a sikeres vezérlés lehetőségét. Az alsó ág ezzel szemben könnyen megvalósítható. A  $d_0 = 4$  körüli érték például  $\tau_0 = 0,28$ ,  $0,89$ , és  $2,8$  s időállandóhoz tartozik  $l = 0,1, 1$ , illetve  $10$  m-es ingahossz esetén. A szükséges kezdeti gyorsulás értéke csak  $1,5 g$ .

Az  $A = 30$  kezdeti gyorsulás mellett (6. ábra) három olyan ágot találunk, amelyhez hozzátartozik a  $\varphi_0 = 0$  kezdőfeltétel. A legalsó,  $d_0$  ág minden  $-\pi$  és  $+\pi$  közötti  $\varphi_0$ -ra kiterjed. A  $d_1$  ág csak  $2,25$ -ig, a  $d_2$  csak  $1,5$ -ig húzódik. Az inga mozgása mindhárom ág mentén teljes átfordulás nélküli, azaz a  $\varphi = 0$  végállapothoz tart,  $d_0$ -ban előjelváltás nélkül,  $d_1$ -ben egyszeri,  $d_2$ -ben kétszeri előjelváltással. Az utóbbi ág végig nagyon közel húzódik az  $A = 30$ -as értékhez, és ezért megvalósíthatatlan vezérlést ír le.

Új vonás, hogy a kezdeti szögkitérés rövid, nullát nem tartalmazó intervallumain is találunk vezérlési lehetőségeket. Ezek olyan mozgásokhoz tartoznak, amelyek utolsó áthaladásukkor még véges szögsebességgel lendülnek át az origón, és egy vagy több teljes körülfordulás után állnak meg az instabil állapotban. Számos nagyon rövid intervallumra kiterjedő ágot is találtunk, az áttekinthetőség érdekében azonban csak a legnagyobbakat ábrázoljuk. A 6. ábra jobb oldalán  $\varphi_0 = 2$  és  $3$  között húzódó alsó ív mentén az inga a  $-2\pi$  állapotban (vagyis egy pozitív irányú teljes körbefordulás) után áll meg, a kissé fölötte húzódó ív mentén pedig  $-4\pi$ -ben. (Ehhez nagyon közel húzódik nyilván a  $-n2\pi$  végállapotok görbéi, de azok nu-



7. ábra. Vezérlési spektrum  $A = 56$ -ra. A jelölések megegyeznek az előző ábrán használtakkal.

merikus felbontása már igen nehéz.) E két ív negatív kezdeti szögkitérésekhez tartozó tükörképei mentén a végállapot  $2\pi$ , illetve  $4\pi$ , vagyis negatív körülfarású körbefordulások utáni állapot.

Az  $A = 56$  eset ezek után már lényegében hasonló (7. ábra). Most négy  $\varphi = 0$ -án átmenő ágat találunk,  $d_0$ -tól  $d_3$ -ig. Az általános szabály az, hogy az inga az  $n$ -edik ág mentén  $n-1$  előjelváltás után közelíti meg az origót, s közben egyszer sem fordul át. A  $d_3$  ág nagyon rövid és végig túl nagy kezdeti gyorsulásokhoz tartozik. A  $d_2$  ág  $\varphi_0 = 1$ -hez tartozó (utolsó reálisan vezérelhető) értékének részletes megtalálását mutattuk be a 3. ábrán. A  $d_1$  és a  $d_0$  ágak végéhez csatlakoznak a többszöri átfordulás utáni megállást leíró rövidebb ágak. A  $d_0$  ág jobb oldalán a  $-2\pi$ ,  $-4\pi$ -ben, a  $d_1$  jobb oldalán a  $2\pi$ ,  $4\pi$ -ben történik a megállás, az ábra bal oldalán pedig az előjelek tükröződnek.

## A függőlegesen gyorsított inga és a Schrödinger-egyenlet

Az a tény, hogy csak diszkrét  $d$  értékek mellett létezhetsikeres vezérlés, óhatatlanul felveti a kvantummechanikával való kapcsolat keresésének szükségességét.

A függőlegesen gyorsított fordított inga nemlineáris mozgásegyenlete azzal a feltevéssel, hogy a  $\varphi$  szögkitérés mindig jóval kisebb, mint 1 radián, a

$$\ddot{\varphi} = (A \text{th}^2 t - d) \varphi, \quad |\varphi| \ll 1 \quad (16)$$

lineáris alakba megy át, hiszen  $\sin \varphi$  a  $\varphi$  argumentummal közelíthető, ha  $\varphi$  kicsi.

Ha a (16) egyenletben az időváltozót  $x$ -szel jelöljük, a szögkitérést  $\Psi$ -vel, akkor az egyenlet

$$\Psi''(x) = (V(x) - e) \Psi(x), \quad (17)$$

ahol

$$V(x) = A(\text{th}^2 x - 1), \quad e = d - A. \quad (18)$$

$A$	$d_0, d_1, \dots, d_N$	$N$
12	3, 11	1
30	5, 21, 29	2
56	7, 31, 47, 55	3

Ez nem más, mint a mikrorészecskék energiáját meghatározó (stacionárius) Schrödinger-egyenlet [7] megfelelő dimenziótlan egységekben kifejezve [6]. Az  $e$  mennyiség a részecske konstans energiája,  $V(x)$  pedig az a potenciál (elektromos mező), amelyben a részecske mozog. A vessző az  $x$  térváltozó szerinti deriválást jelöli. A  $\Psi(x)$  hullámfüggvénynek az a fizikai jelentése, hogy a részecske az  $x$  hely környékén  $|\Psi|^2(x)$  valószínűséggel található meg. Mivel a részecske biztosan van valahol,  $|\Psi|^2(x)$  teljes térre vett integrálja egyet kell adjon, de ez csak úgy lehetséges, ha  $\Psi(x)$  maga nullához tart nagy  $x$  értékekre. A  $\Psi(x)$  függvény normáltóságából adódó végtelenbeli eltűnés pedig éppen a vezérlés  $\varphi \rightarrow 0$  feltételének felel meg [6].

A kis kezdeti kitéréssel indított (és végig kis szögkitéréseket mutató) inga mozgása tehát ekvivalens a (17) Schrödinger-egyenlettel. Ennek egyik következménye, hogy a (17) lineáris egyenletben a sajátérték-spektrum *nem* függ a  $\varphi_0$  kezdeti szögkitéréstől.

A  $V(x)$  dimenziótlan potenciál az úgynevezett Rosen–Morse-potenciál, amelynek energiaspektruma már 1932 óta ismert [8]. A potenciálgödör  $-A$  mélységtől mért lehetséges dimenziótlan energiaértékeket, amelyek a  $d_n$  spektrumnak felelnek meg  $|\varphi_0| \ll 1$  esetén, az 1. táblázatban foglaljuk össze.

Ez a felismerés magyarázza azt a tapasztalatot, miszerint a vezérlési  $d_n$  értékek kis kezdeti kitérésekre megegyeznek az 1. táblázat értékeivel. A 5. – 7. ábrán látható  $d_n$  görbék valóban mind vízszintes érintővel futnak be az origóban felvett (schrödingeri) értékükhöz.

Érdeemes itt összefoglalni miben jelentős tehát az eltérés a (16) Schrödinger-egyenlettel leírt lineáris vezérlési feladathoz képest.

- Az  $d_n$  értékek alapvetően függenek a kezdeti szögkitéréstől. Ennek megfelelően a  $d_n$  ágak *görbületek* és a pozitív indexűek *nem is terjednek* ki a teljes szög tartományra.

- Léteznek olyan más ágak, amelyek nem nyúlnak el a  $\varphi_0 = 0$  kezdőfeltételig, és ezért még határesetben sem lehetnek kapcsolatosak a Schrödinger-egyenlettel. Ezek a többszörös átfordulás utáni megállást írják le.

- Hangsúlyozzuk, ha a vezérlési problémánk teljesen „schrödingeri” lenne, akkor az összes vezérlési spektrum kizárólag vízszintes vonalokból állna (1. táblázat).

A (11) egyenlet tehát egyfajta (stacionárius) *nemlineáris Schrödinger-egyenlet* időváltozóban felírt alak-

jának tekinthető. A függőlegesen gyorsított inga vezérlése tehát nemlinearitása miatt jelentősen eltér a hagyományos Schrödinger-egyenlettel leírt lineáris vezérlési feladattól. Egy vonás azonban mindenképpen közös: vezérlés csak kvantált értékek mellett lehetséges, de ez az új típusú kvantálás már egészen más jellegű, mint a kvantummechanikai. Ez nem is csoda, hiszen a kvantummechanika alapvetően lineáris elmélet [7].

A következőkben vizsgálandó vízszintesen gyorsított inga egyenlete még határértékben sem kapcsolatos a Schrödinger-egyenlettel, ezért ott még nehezebben megvalósítható vezérlésre számíthatunk csak.

## Irodalom

1. K. J. Aström, K. Furuta: Swing up a pendulum by energy control. *Automatica* 36 (2000) 287–295.
2. H. Su, C. A. Woodham: On the uncontrollable damped triple inverted pendulum. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 151 (2003) 425–443.
3. D. J. Acheson: A pendulum theorem. *Proc. Royal Soc. A443* (1993) 239–245.
4. Nagy K.: *Elméleti mechanika*. Tankönyvkiadó, Budapest, 2002.
5. National Instruments LabView: ni.com/labview.
6. Tél A., Tél T.: Egy reménytelennek tűnő vezérlési probléma a klasszikus és modern fizika határán. *Fizikai Szemle* 61/12 (2011) 409–416.
7. Marx Gy.: *Kvantummechanika*. Műszaki Kiadó, Budapest, 1971.
8. N. Rosen, P. M. Morse: On the vibrations of polyatomic molecules. *Phys. Rev.* 15 (1932) 210–217.

# A CIRKULÁRISAN FÉNYPOLARIZÁLÓ SZKARABEUSZOK NEM REAGÁLNAK A CIRKULÁRIS POLARIZÁCIÓRA – II. RÉSZ

## Egy évszázados biooptikai hipotézis cáfolata

Blahó Miklós, Egri Ádám, Horváth Gábor

Környezetoptika Laboratórium, Biológiai Fizika Tanszék, ELTE, Budapest

Hegedüs Ramón

Számítógépes Látás és Robotika Csoport, Gironai Egyetem, Girona, Spanyolország

Kriska György

Biológiai Szakmódszertani Csoport, Biológiai Intézet, ELTE, Budapest

Jósvai Júlia, Tóth Miklós

Növényvédelmi Intézet, Agrártudományi Kutatóközpont, MTA, Budapest

Kertész Krisztián, Biró László Péter

Műszaki Fizikai és Anyagtudományi Intézet, Természettudományi Kutatóközpont, MTA, Budapest

*Albert Abraham Michelson amerikai fizikus 1911-ben fedezte föl, hogy bizonyos szkarabeusz bogarak fémszínű kitingpáncéljáról visszavert fény balra cirkulárisan poláros. Azóta feltételezték, hogy e bogarak képesek érzékelni a fény cirkuláris polarizációját, amit a fajtársak megtalálásához használnak. E hipotézist ellenőriztük hat kísérletben az Anomala dubia, Anomala vitis, Cetonia aurata és Potosia cuprea szkarabeuszfajok több száz egyedével. Kimutattuk, hogy e bogarak nem vonzódnak a cirkulárisan poláros fényhez a fajtársak vagy a táplálék keresése közben. Azt is megmutattuk, hogy e szkarabeuszok gazdanövényei cirkulárisan polarizálatlan fényt vernek vissza. Mindezzel cáfoltuk azon évszázados hipotézist, hogy a szkarabeuszok kitingpáncéljáról tükröződő fény cirkuláris polarizációja e bogarak vizuális kommunikációját szolgálja. Cikkünk I. részében<sup>1</sup> a szkarabeuszok cirkulárispolarizáció-érzékelésének hipotézisét ismertettük, majd leírtuk e probléma vizsgálatára elvégzett kísérleteinket. Írásunk II. részében a kísérleti eredményeinket mutatjuk be és azokat vitatjuk meg.*

<sup>1</sup> *Fizikai Szemle* 62/7–8 (2012) 217–221.

## A szkarabeuszok nem reagálnak a cirkuláris polarizációra

A *Cetonia aurata* aranyos rózsabogarak kitingpáncélja BCP-fényt, míg az alattuk lévő *Epipremnum* levelek cirkulárisan polarizálatlan fényt vernek vissza. A *Potosia cuprea* rezes rózsabogár, az *Anomala dubia* és az *Anomala vitis* cserebogarak kitingpáncélja szintén BCP-fényt ver vissza. A *Cetonia*, *Potosia* és *Anomala vitis* teljesen fekete BC polárszűrőn át nézve, továbbá az *Anomala dubia* a barna szárnyfedőtől eltekintve szintén fekete BC polárszűrőn keresztül. Másrészt viszont e szkarabeuszok optikai környezetében előforduló növények (galagonya: *Crataegus monogyna*, vadrózsa: *Rosa canina*, fekete nyár: *Populus nigra*, platán: *Platanus acerifolia*, lisztes berkenye: *Sorbus aria*, mezei juhar: *Acer campestre*, kislevelű hárs: *Tilia cordata*, madárberkenye: *Sorbus aucuparia*, vadcserecsnye: *Prunus avium*, ecetfa: *Rhus typhina*, mezei szil: *Ulmus campestris*, japánakác: *Sophora japonica*, szelídgesztenye: *Castanea sativa*, közönséges nyír: *Betula pendula*) által visszavert fény cirkulárisan polarizálatlan.



1. táblázat

**A 2. kísérletben a balra cirkulárisan poláros (BCP) vagy a jobbra cirkulárisan poláros (JCP) fényingert választó *Cetonia aurata* szkarabeuszok száma három különböző képinger esetén, napos vagy borult időben.**

	BCP fényinger	JCP fényinger
1. képinger: <i>Cetonia aurata</i> egy galagonya ( <i>Crataegus monogyna</i> ) virágon		
Összesen 196: 100 ♀ + 96 ♂	94 bogár S: 34, AS: 27, B: 33 M: 59, R: 35	102 bogár S: 33, AS: 29, B: 40 M: 62, R: 40
2. képinger: galagonya ( <i>Crataegus monogyna</i> ) levelek és virágok		
Összesen 141: 73 ♀ + 68 ♂	67 bogár S: 34, AS: 33 M: 39, R: 28	74 bogár S: 39, AS: 35 M: 48, R: 26
3. képinger: virágzó galagonya ( <i>Crataegus monogyna</i> ) bokor		
Összesen 131: 69 ♀ + 62 ♂	67 bogár S: 23, AS: 17, B: 27 M: 37, R: 30	64 bogár S: 26, AS: 19, B: 19 M: 40, R: 24
Teljes 468: 242 ♀ + 226 ♂	228 bogár S: 91, AS: 77, B: 60 M: 135, R: 93	240 bogár S: 98, AS: 83, B: 59 M: 150, R: 90

**Rövidítések:**

♀: nőtény

♂: hím

S: a bogarak választása a tesztdoboz napos felére esett.

AS: a bogarak választása a tesztdoboz nappal átellenes felére esett.

B: a teljesen borult ég miatt a tesztdobozt egyenletes égboltfény világította meg.

M: a bogár mászott.

R: a bogár repült.

**Megjegyzés:** A statisztikai elemzés szerint a különbségek nem szignifikánsak.

Az 1. kísérletben összesen 61 (ebből 40 mászott, 21 repült) *Cetonia aurata* választotta az LCP, míg 59 (42 mászott, 17 repült) a BCP fényingert. E kis különbség statisztikusan nem szignifikáns ( $\chi^2 = 0,033$ ,  $df = 1$ ,  $p = 0,86$ ). A *Cetonia aurata* e kísérletben adott reakciója a véletlenszerű választásnak felel meg a BCP és JCP fényingerek között.

A 2. kísérletben (1. táblázat), amikor egy galagonya virágán lévő *Cetonia aurata* képe volt a tesztdoboz ablakában (1. inger), 94 *Cetonia aurata* választotta a BCP, míg 102 a JCP fényingert. A galagonya levelét és virágát (2. inger), valamint a virágzó galagonyabokrot (3. inger) mutató színes képeknél a BCP és JCP fényingert választó *Cetonia* rózsabogarak száma 67 és 74, illetve 67 és 64 volt. Mindösszesen a BCP fényingert 228-szor, a JCP-t pedig 240-szer választották e bogarak. E különbségek egyike sem szignifikáns. A hat főszektor egyike sem volt kitértetett. A tesztdoboz Nap felőli oldalát (mikor az ég felhőtlen volt) valamivel többször választották (189), mint a másik, Nappal ellentétes felét (160), de statisztikusan még e különbség sem szignifikáns ( $\chi^2 = 2,41$ ,  $df = 1$ ,  $p = 0,12$ ). A fényingereket a *Cetonia* rózsabogarak gyakrabban közelítették meg mászva (285), mint repülve (183).

Nagyon hasonló eredmények adódtak a *Potosia cuprea*, *Anomala dubia* és *Anomala vitis* esetében is

2. táblázat

**A 2. kísérletben a balra cirkulárisan poláros (BCP) vagy a jobbra cirkulárisan poláros (JCP) fényingert választó *Potosia cuprea*, *Anomala vitis* és *Anomala dubia* szkarabeuszok száma a 3. képinger (virágzó galagonyabokor színes fényképe) esetén.**

faj (100 egyed)	BCP fényinger	JCP fényinger
<i>Potosia cuprea</i> 52 ♂ + 48 ♀	50 M: 35, R: 15	50 M: 37, R: 13
<i>Anomala vitis</i> 100 ♂	51 M: 32, R: 19	49 M: 31, R: 18
<i>Anomala dubia</i> 100 ♂	48 M: 30, R: 18	52 M: 32, R: 20

**Rövidítéseket** lásd az 1. táblázatnál!

**Megjegyzés:** A statisztikai elemzés szerint a különbségek nem szignifikánsak.

3. táblázat

**A 3. kísérletben a balra cirkulárisan poláros (BCP) fényt visszaverő, közvetlenül látható, azonos fajú szkarabeusztetemetek vagy a jobbra cirkulárisan poláros (JCP) fényű, síktükörben látható, azonos fajú szkarabeusztetemetek választó *Cetonia aurata*, *Potosia cuprea*, *Anomala vitis* és *Anomala dubia* szkarabeuszok száma.**

faj (100 egyed)	BCP szkarabeusztetem (közvetlenül látható)	JCP szkarabeusztetem (síktükörből látható)
<i>Cetonia aurata</i> 50 ♂ + 50 ♀	48 M: 44, R: 4	52 M: 46, R: 6
<i>Potosia cuprea</i> 52 ♂ + 48 ♀	51 M: 45, R: 6	49 M: 34, R: 15
<i>Anomala vitis</i> 100 ♂	50 M: 41, R: 9	50 M: 35, R: 15
<i>Anomala dubia</i> 100 ♂	46 M: 30, R: 16	54 M: 42, R: 12

**Rövidítéseket** lásd az 1. táblázatnál!

**Megjegyzés:** A statisztikai elemzés szerint a különbségek nem szignifikánsak.

(2. táblázat): a BCP/JCP fényingert választók száma 50/50 (*Potosia*), 48/52 (*Anomala dubia*) és 51/49 (*Anomala vitis*) volt. E különbségek egyike sem szignifikáns. A tesztdoboz egyik szektora sem volt kitértetett és a bogarak mind a három fajnál inkább mászva közeledtek (*Potosia*: 72, *Anomala dubia*: 62, *Anomala vitis*: 63) a fényingerek felé, mint repülve (*Potosia*: 28, *Anomala dubia*: 38, *Anomala vitis*: 37).

A 3. kísérletben (3. táblázat) a BCP/JCP-fényűnek látszó szkarabeusztetemek választási aránya 48/52, 51/49, 46/54 és 50/50 volt rendre a *Cetonia*, *Potosia*, *Anomala dubia* és *Anomala vitis* fajoknál. Ezen arányok statisztikailag nem szignifikánsan térnek el az 50/50%-tól. A szkarabeuszok megint a mászást preferálták (*Cetonia*: 90, *Potosia*: 79, *Anomala dubia*: 72, *Anomala vitis*: 76) a repüléssel szemben (*Cetonia*: 10, *Potosia*: 21, *Anomala dubia*: 28, *Anomala vitis*: 24).

A 4. kísérletben a szexferomonnal ellátott csapdák nagy számú *Anomala dubia* és *Anomala vitis* bogarat fogtak, szignifikánsan többet, mint bármely más csap-

4. táblázat		
A 4. kísérletben használt, <i>Anomala vitis</i> / <i>dubia</i> tetemekkel ellátott, vagy szexferomont kibocsátó, vagy üres csapdák által fogott <i>Anomala vitis</i> és <i>Anomala dubia</i> szkarabeuszok száma.		
csali	<i>Anomala vitis</i>	<i>Anomala dubia</i>
<i>Anomala dubia</i> tetemek	1 (♂)	0
<i>Anomala vitis</i> tetemek	1 (♂)	0
szexferomon	867 (♂)	381 (♂)
üres	0	1 (♂)
<i>p</i> -érték	0,0002	0,0002

Rövidítéseket lásd az 1. táblázatnál!

Megjegyzés: A *p*-értékek a Kruskal–Wallis statisztikai tesztre vonatkoznak.

5. táblázat		
A 4. kísérletben használt, <i>Cetonia aurata</i> tetemekkel ellátott, vagy virágillatot árasztó, vagy üres csapdák által fogott <i>Cetonia aurata</i> és <i>Potosia cuprea</i> szkarabeuszok száma.		
csali	<i>Cetonia aurata</i>	<i>Potosia cuprea</i>
<i>Cetonia aurata</i> tetemek	0	0
vonzó virágillat	415 (205♀+210♂)	47 (24♀+23♂)
üres	0	0
<i>p</i> -érték	< 0,0001	< 0,0001

Rövidítéseket lásd az 1. táblázatnál!

Megjegyzés: A *p*-értékek a Kruskal–Wallis statisztikai tesztre vonatkoznak.

da (4. táblázat). Csak 1-1 *Anomala vitis* egyed fogott az *Anomala vitis*, illetve *Anomala dubia* szkarabeusztetemeket tartalmazó csapda, míg az üres csapdák nem fogtak semmit. Az *Anomala dubia* fogása is nagyon hasonló képet mutatott: a szexferomonon csapda nagy számú egyed, míg a másik két csapda egyetlen, vagy egyetlen egyed sem fogott (4. táblázat). A virágillattal csalogatott csapdák is szignifikánsan több *Cetonia aurata* és *Potosia cuprea* egyed fogtak, mint a *Cetonia*-tetemekkel ellátott vagy az üres csapdák (5. táblázat).

Az 5. kísérletben a négy vizsgált szkarabeusz faj egyike sem részesítette előnyben a BCP és a lineárisan poláros fényinger egyikét sem (6. táblázat). A tapasztalt nagyon kis különbségek egyike sem volt szignifikáns. Hasonló a helyzet a 6. kísérletben, ahol mind a négy szkarabeusz faj gyakorlatilag fele-fele arányban választotta a BCP és a polarizálatlan fényingert, és a különbségek itt sem voltak szignifikánsak (7. táblázat). Az 5. és 6. kísérlet eredménye megerősítette azt a következtetésünket, hogy a *Cetonia aurata*, *Potosia cuprea*, *Anomala vitis* és *Anomala dubia* szkarabeuszok nem vonzódnak a BCP-fényhez sem a táplálék, sem pedig a fajtársak keresésekor.

Az 1. ábra szerint a balra cirkulárisan polarizáló *Anomala vitis*, *Anomala dubia* és *Cetonia aurata* bogarak kitinpáncéljának visszaverődési spektruma

6. táblázat		
Az 5. kísérletben a balra cirkulárisan poláros (BCP) vagy a teljesen lineárisan poláros (TLP) fényingert választó <i>Cetonia aurata</i> , <i>Potosia cuprea</i> , <i>Anomala vitis</i> és <i>Anomala dubia</i> szkarabeuszok száma.		
faj (100 egyed)	BCP fényinger	TLP fényinger
<i>Cetonia aurata</i>	50 (M: 48, R: 2)	50 (M: 47, R: 3)
<i>Potosia cuprea</i>	52 (M: 51, R: 1)	48 (M: 46, R: 2)
<i>Anomala vitis</i>	52 (M: 52, R: 0)	48 (M: 48, R: 0)
<i>Anomala dubia</i>	45 (M: 45, R: 0)	55 (M: 55, R: 0)

Rövidítéseket lásd az 1. táblázatnál!

Megjegyzés: A statisztikai elemzés szerint a különbségek nem szignifikánsak.

7. táblázat		
A 6. kísérletben a balra cirkulárisan poláros (BCP) vagy a polarizálatlan fényingert választó <i>Cetonia aurata</i> , <i>Potosia cuprea</i> , <i>Anomala vitis</i> és <i>Anomala dubia</i> szkarabeuszok száma.		
faj (100 egyed)	BCP fényinger	polarizálatlan fényinger
<i>Cetonia aurata</i>	49 (M: 49, R: 0)	51 (M: 51, R: 0)
<i>Potosia cuprea</i>	47 (M: 47, R: 0)	53 (M: 53, R: 0)
<i>Anomala vitis</i>	53 (M: 53, R: 0)	47 (M: 47, R: 0)
<i>Anomala dubia</i>	52 (M: 52, R: 0)	48 (M: 48, R: 0)

Rövidítéseket lásd az 1. táblázatnál!

Megjegyzés: A statisztikai elemzés szerint a különbségek nem szignifikánsak.

(merőleges beesés mellett) egyetlen csúccsal rendelkezik a zöld tartományban (*Anomala vitis*: 562 nm, *Anomala dubia*: 614 nm, *Cetonia aurata*: 574 nm). A *Potosia cuprea* visszaverődési spektrumának két csúcsa van: az elsődleges csúcs a vörösben (670 nm) és a másodlagos csúcs a zöldben (549 nm). Az egycsúcsos spektrumok fémes zöld színt kölcsönöznek e bogaraknak, míg a kétszúcsos spektrum a *Potosia cuprea* rezes-barnás színéhez vezet.

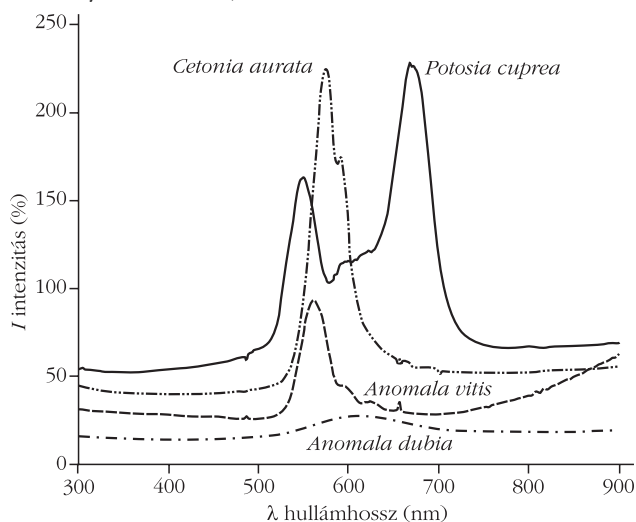
## A kísérleti eredmények megvitatása

A vizsgált szkarabeuszfajok természetes optikai környezetében a legerősebb CP fényforrás e szkarabeuszok BCP-fényt visszaverő kitinpáncélja, mivel növényi környezetük gyakorlatilag cirkulárisan polarizálatlan. Ezért a cirkulárispolarizáció-érzékelés a kitinpáncélról visszavert BCP-fény keresésével elvben segíthetne a fajtársak megtalálásában. Azonban a kísérleteink szerint – annak ellenére, hogy a vizsgált szkarabeuszfajok kitinpáncélja a spektrum látható tartományában BCP-fényt ver vissza – a *Cetonia aurata*, *Potosia cuprea*, *Anomala vitis* és *Anomala dubia* szkarabeuszok az általunk tesztelt körülmények között (táplálék és fajtársak keresése közben) nem vonzódnak a CP-fényhez.

A 4. kísérletről látszik, hogy a vizuális jelek – beleértve a szkarabeusztestetek által visszavert BCP-fényt is – a vizsgált szkarabeuszfajoknál nem idéztek elő vonzó hatást, annak ellenére, hogy a vizsgált bogarak nagy egyedszámban voltak jelen a kísérleti helyszínen – ezt mutatja a szexferomont (*Anomala vitis* és *dubia*) és virággillatot (*Cetonia* és *Potosia*) árasztó csapdák nagy fogásszáma. A 4. kísérlet alapján úgy tűnik, hogy a szkarabeuszok fajtársaikat a szagok segítségével, nem pedig vizuális jelek (például a kitinpáncélról visszavert CP-fény) alapján találják meg. Jól ismert jelenség [1], hogy az *Anomala dubia* és *Anomala vitis* szexferomonjai kis mértékben egymást is vonzzák. Hasonlóképpen ismert a *Cetonia* és *Potosia* vonzódása a kísérletben alkalmazott virággillatokhoz [2, 3].

Ha a vizsgált szkarabeusz bogarak szag alapján találják egymásra, akkor ehhez vizuális jelekre nincs szükségük. Megjegyzendő viszont, hogy a feromonok használata nem feltétlenül zárja ki a vizuális jelek szerepét, ami számos faj esetében ismert [4]. Véleményünk szerint a szkarabeuszok kitinpáncéljáról visszavert fény cirkuláris polarizációja csak mellékterméke a kitinpáncél csavart (helikális) nanoszerkezetének. Szerintünk a kitinpáncél csavart struktúrájának elsődleges célja a mechanikai és/vagy kémiai hatásokkal (mechanikai nyomással és/vagy sav-lég okozta sérülésekkel) szembeni ellenálló képesség növelése lehet és nem a BCP-fény keltése vizuális kommunikáció céljára. Az itt bemutatott kísérleteink fényében a szkarabeusz-kitinpáncél cirkuláris polarizációjának optikai szerepe nagyon valószínűtlen, az említett mechanikai és kémiai feltételezés pedig a jövőben kísérletileg ellenőrizendő. Az is tisztázatlan kérdés még, hogy a kitinpáncélra a kizárólag csak a szkarabeuszoknál megjelenő [5], s a koleszterikus folyadék-kristályoké-

1. ábra. Az *Anomala vitis*, *Anomala dubia*, *Cetonia aurata* és *Potosia cuprea* szkarabeuszok fémes BCP-fényt tükröző kitinpáncéljának visszaverődési spektruma merőleges visszaverődés esetén. A visszavert fény *I* intenzitásának mérésakor a mérőműszer fehér, difúz visszaverődési standardja jelentette a referenciaállandót. Az *I*-értékek akkor lehetnek nagyobbak 100%-nál, ha a vizsgált felszín több fényt tükröz vissza, mint a referenciaállandó.



hoz hasonló szerkezete miatt tér el ilyen nagy mértékben más fémfényű bogarakétól.

A szkarabeuszok pozitív reakciójának, azaz a BCP-fényhez való vonzódásának hiánya magyarázható lenne a kísérletekben használt egyedek motivációjának (táplálék- és fajtárskeresés) hiányával is. Azonban ez több okból is igen valószínűtlen: (1) Az 1. kísérletben használt *Cetonia aurata* bogarakat közvetlenül a kísérletet megelőző napon, rajzáskor gyűjtöttük be, és nehezen képzelhető el, hogy másnapra elvesztették volna a táplálék- és fajtárskeresési motivációjukat. (2) A 2., 3., 5. és 6. kísérletben a teszt-dobozban használt szkarabeuszokat szintén a kísérleteket megelőző napokon gyűjtöttük be, a bogarakat a kísérletek előtt 6 órán át egy külön edényben éhezettük, s minden egyedet csak egyszer teszteltünk. E körülményekkel minimalizáltuk annak lehetőségét, hogy a bogarak elveszítsék motivációjukat a táplálék és fajtársak keresésére. (3) A 4. kísérletet a terepen végeztük, motívált, röpködő szkarabeuszokkal. (4) Az 1., 2., 3., 5. és 6. kísérletben a szkarabeuszok gyakorta repültek a vizuális ingerek felé (1–3. táblázat), ezzel mutatva aktivitásukat, motivációjukat. Továbbá, a vizsgált szkarabeuszegyedek szemlátomást párzási hangulatban voltak, mert mind a négy faj befogott egyedei folyamatosan párosodtak, vagy erre tettek kísérletet.

## Összefoglalás

A bogarak Scarabaeidae családjá Rutalinae alcsaládjának *Anomala vitis* és *Anomala dubia* fajainál, valamint Cetoniinae alcsaládjának *Cetonia aurata* és *Potosia cuprea* fajainál, amelyek páncélja balra cirkulárisan poláros fényt ver vissza, nem találtunk kísérleti bizonyítékot arra, hogy a cirkulárisan poláros fényre bármiféle viselkedési választ (például vonzódást) adnának. A kitinpáncél fénypolarizáló tulajdonságaiban a nemek között nem volt különbség. Úgy tűnik, hogy a szkarabeuszok esetén a fajtársak megtalálásában a szagok nagyobb jelentőséggel bírnak, mint a vizuális jelek. Mivel a szkarabeuszok látórendszerének alapvető anatómiai és optikai tulajdonságai megegyeznek [6], ezért eredményeink minden bizonnyal általánosíthatók a többi szkarabeuszfajra is. A jövőben azonban fontos lenne további szkarabeuszfajok cirkulárispolarizáció-érzékelését is vizsgálni, hogy még általánosabb érvényű kijelentéseket tehesünk a szkarabeuszok cirkulárispolarizáció-látásával vagy polarizációvakságával kapcsolatban.

## Köszönetnyilvánítás

Horváth Gábor köszöni a német Alexander von Humboldt Alapítvány nagyértékű műszeradományát. Hegedüs Ramón hálás az Európai Unió két éves Marie Curie IEF kutatói ösztöndíjért.

## Irodalom

1. Tóth, M.; Leal, W. L.; Szarukán, I.; Lesznyák, M.; Szócs, G.: 2-(E)-Nonen-1-ol: male attractant for chafers *Anomala vitis* Fabr. and *Anomala dubia* Scop. (Coleoptera: Scarabaeidae). *Journal of Chemical Ecology* 20 (1994) 2481–2487.

2. Tóth M., Imrei Z., Szarukán I., Voigt E., Schmera D., Vuts J., Harmincz K., Subchev M.: Gyümölcs-, illetve virágkárokat okozó cserebogárfélék kémiai kommunikációja: egy évtized kutatási eredményei. *Növényvédelem* 41 (2005) 581–588.
3. Vuts, J.; Imrei, Z.; Tóth, M.: New co-attractants synergizing attraction of *Cetonia aurata aurata* and *Potosia cuprea* to the known floral attractant. *Zeitschrift für angewandte Entomologie* 134 (2010) 9–15.
4. Christensen, T. A. (ed.): *Methods in Insect Sensory Neuroscience*. CRC Press, Taylor & Francis Group, Boca Raton, USA, 2005.
5. van de Kamp, T.; Greven, H.: On the architecture of beetle elytra. *Entomologie Heute* 22 (2010) 191–204.
6. Gokan, N.; Meyer-Rochow, V. B.: Morphological comparisons of compound eyes in Scarabaeoidea (Coleoptera) related to the beetles' daily activity maxima and phylogenetic positions. *Journal of Agricultural Science* 45 (2000) 15–61.

## KOZMIKUS SUGÁRZÁS EXTRÉM ENERGIÁKON – II. RÉSZ

Kövesi-Domokos Zsuzsa

Department of Physics and Astronomy  
The Johns Hopkins University  
Baltimore, USA

*A cikk első része<sup>1</sup> leírta az extrém energiájú kiterjedt légizáporok alapvető tulajdonságait és a detektálás két fontos módszerét felszíni zápor- és fluoreszcens detektorokkal. A fluoreszcens detektorok és a hibrid (kombinált felszíni zápor- és fluoreszcens) detektorok jelentősek mind a primér részecske azonosításában, mind az energiabecslés javításában. Hangsúlyoztuk az extrém energiájú kozmikus sugárzás jelentőségét a részecskefizikai kutatásban, minthogy ez az energiatartomány még a legnagyobb működő gyorsítóval (LHC) sem érhető el.*

### Anomális záporok és fizika a Standard Modellen túl

A múlt század kilencvenes éveiben, az extrém energiatartományban a fluxusadatok legnagyobb részét az AGASA-detektor adta. A spektrum legmeglepőbb két tulajdonsága az volt, hogy nem mutatta a várt GZK-levágást és még  $E > 10^{20}$  eV fölött is 11 záport figyeltek meg. A Fly's Eye korai adatai további 5 eseménnyel támogatják. Ezeket nevezzük anomális záporoknak. A GZK-levágás fizikájához (pion fotokeltés) semmilyen kétség sem fért, minthogy ezt a folyamatot a múlt század ötvenes éveitől laboratóriumi kontrollált körülmények között sokszor kimérték. Ebből következett, hogy vagy a GZK-gömbön belül keletkeznek a protonok, vagy a záport kezdeményező részecske akadálytalanul keresztülutazik a mikrohullámú háttérsugárzáson, de a levegőmaggal – a protonhoz hasonlóan – erősen hat kölcsön. Minthogy a csillagászok kifogytak a nagy fluxusú vagy nagy számú „extrém” forrásokból, a részecskefizikusok léptek akcióba. Két csoportba sorolhatjuk az elméleti elgondolásokat: csak a Standard Modellt használó és az azon lényegesen túllépő magyarázatokat.

### Z-robbanás

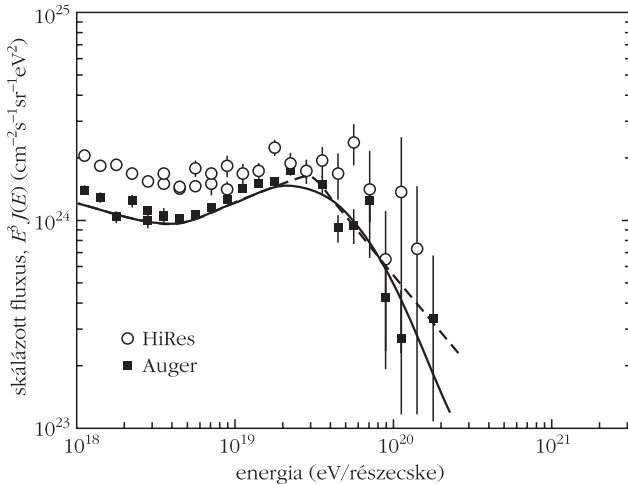
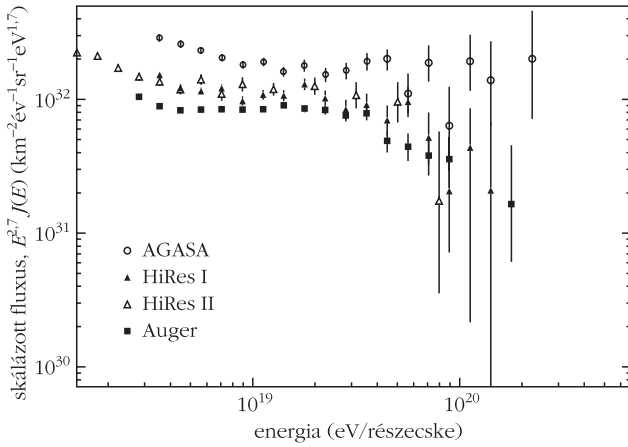
A Standard Modellen túl csak azt kell feltenni, hogy a neutrínók tömeggel rendelkeznek, ami kísérletileg jól

igazolt tény. A Világmindenség bármely részéről érkező extrém,  $E \approx 10^{23}–10^{24}$  eV (!) energiájú neutrínók rezonanciában keltenek egy semleges, gyenge bozont a  $Z^0$ -t, amikor a neutrínó-háttérsugárzás egy neutrínójával ütköznek a GZK-gömbön belül. A  $Z^0$  bomlásból átlagosan csak 2 nukleon, de körülbelül 20 gamma-foton (több extrém energiájú is) és nagyon sok lepton keletkezik. A bomlásból származó protonok keltik az „anomális” záporokat. Ez a modell, bár nagyon takarékos az alapvető kölcsönhatási modellben, de minden másban a praktikusnak elfogadott lehetőségek határán kívüli körülményeket követel. Természetesen a döntő szót itt is csak a kísérleti-megfigyelési eredmények adhatják. Két kísérlet is sikerrel adott felső korlátot ezen rendkívüli energiájú neutrínók fluxusára. Ezek a korlátok már szinte kizárták a Z-robbanást, mint az anomális záporok forrását. Az Auger Observatórium és a Teleszkóprendszer eredményeiből rövidesen láthatjuk, hogy ez a folyamat lényegében nem adhat járulékot az extrém energiájú fluxushoz.

### Topológiai defektusok és szupernehéz sötét anyag

A Nagy Egyesítés Elméletek (Grand Unified Theory vagy GUT) a Standard Modell háromféle mértékinvariáns kölcsönhatását (gyenge, elektromágneses és erős) és a sokféle kvarkot, leptont próbálják egy egységes elméletté összehozni. (Emlékezzünk, hogy az első ilyenfajta egyesítés a 19. század végén az elektromos és mágneses jelenségek összekapcsolása volt Maxwell egyenleteiben. A Standard Modellen az elektromágneses és gyenge kölcsönhatások egyesültek és a részecskék is családokba rendeződtek.) Közvetlenül az Ősrobbanás után a Világegyetem a GUT alapján működött: minden kölcsönhatás erőssége egyforma volt. Ahogy a Világegyetem hűlni kezdett, a kölcsönhatások erőssége szétvált. Ez az átmenet nem egyformán folyt le mindenütt és úgynevezett topológiai hibahelyek keletkeztek, amelyek metastabilak, de élettartamuk akár a Világegyetem mai korához (körülbelül 13 milliárd év) hasonlítható. A korai GUT-korszakból hasonló élettartamú nehéz marad-

<sup>1</sup> *Fizikai Szemle* 62/7–8 (2012) 234–239.



1. ábra. A felső ábra a skálázott energiaeloszlás 2009-es eredményeit mutatja. Az AGASA-adatok nem mutatják a GZK-levágást, de a HiRes- és Auger-pontok már igen. Az alsó ábra a 2011-ig látott új eseményeket is tartalmazza. A szaggatott vonal hatványfüggvényeket, a fekete vonal pedig hatványfüggvényeket és sima függvényeket illet az Auger-eloszláshoz.

ványrészek ( $mc^2 \approx 10^{24}$  eV) is keletkezhetnek, amelyek játszhatják egy szupernehéz sötét anyag szerepét is. Mind a topológiai defektusok eredményeként, mind a szupernehéz sötét anyag bomlásakor végül stabil részecskék keletkeznek: protonok, gamma-fotonok, elektronok, pozitronok és neutrínók. Fontos megemlíteni, hogy csak körülbelül 5% a protonok száma és nagyon sok extrém és nagy energiájú gamma-részecske keletkezik. Természetesen az így keletkező protonok felelősek az „anomális” záporokért. Az új fluoreszcens- és hibriddetektor-megfigyelések nagymértékben korlátozzák a topológiai defektusok és a szupernehéz sötét anyag jelenlétét.

### Erősen kölcsönható neutrínók

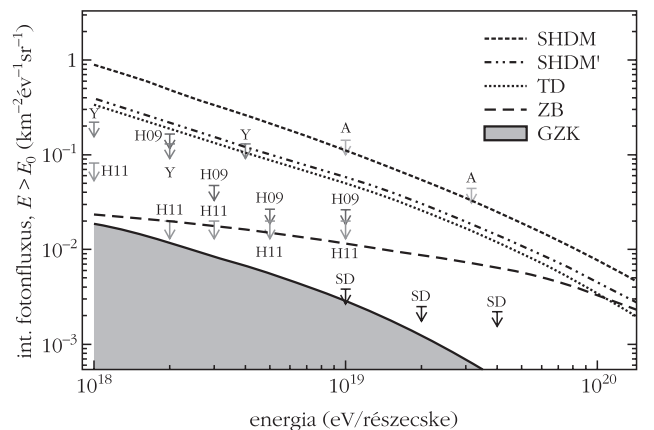
Az egyesített modellek még ambiciózusabb formája a gravitációt is magukba foglaló húrelméletek. Itt a részecskék szerepét egy kicsi rezgő húr játssza. Az egyesítés céljából szóba jöhet a húrelméletek 10 vagy 11 dimenzióban definiálhatók (egy idő- és a többi térdimenzió a szokásos három helyett). Ezen kívül az energiaskála, ahol a teljes egyesítés megvalósul, a

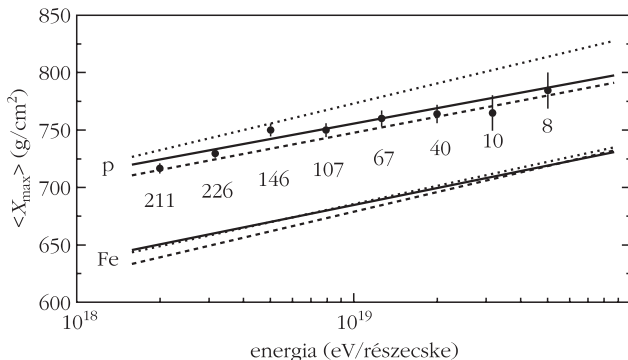
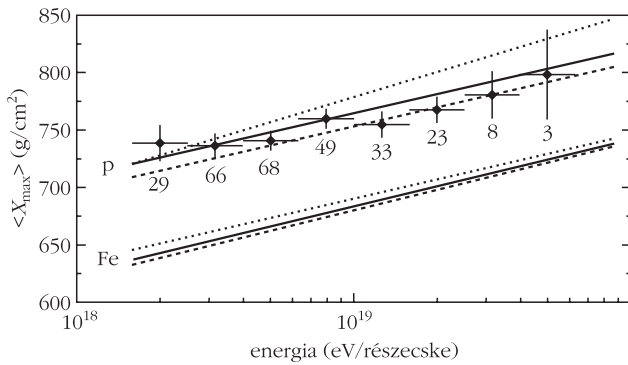
gravitációval kapcsolatos Planck-energiánál van:  $\approx 10^{28}$  eV. Az 1990-es évek közepén bebizonyosodott, hogy ebben a sokdimenziós univerzumban a kölcsönhatások egyesítése sokkal alacsonyabb energián is bekövetkezhet, ha az 5 vagy 6 extra dimenzió csak véges méretű. (Például, ha van egy hosszú hengerünk, amely mondjuk a  $z$ -tengellyel párhuzamos és a keresztmetszet sugara egy fix  $r$  hossz, akkor ezt a felületet hengerkoordinátákban leírhatjuk a  $z$ -koordinátával, amely a  $(-\infty, +\infty)$  intervallumban változik és az azimutális szöggel, amely csak 0-tól  $2\pi$ -ig terjed.) Egy ilyen húrelméletben az új fizika már  $(5-10) \cdot 10^{13}$  eV energián is beköszönhet. Többek között a neutrínók kölcsönhatása is olyan erőssé válik, mint a kvarkoké. Így az extrém energiás neutrínók a látható Univerzumból akárhonnán elérhetik a Földet, mert a háttérsugárzással való kölcsönhatás tömegközépponti energiája messze az alacsony húrskála alatt van, a Standard Modell érvényes. A léggő-atommal való ütközésnél azonban meghaladhatja az új fizika energiaküszöbét és akkor lényegében egy erősen kölcsönható részecskéhez, mondjuk protonhoz hasonló légizápot indít. Pillanatnyilag, még az új Auger- és a Teleszkóprendszer-adatokat is figyelembe véve sincs elegendő esemény a GZK-levágás környékén ahhoz, hogy a relatíve alacsony energián esetleg megjelenő új fizika létét megfigyelhessük.

### Az Auger Observatórium, HiRes és a Teleszkóprendszer eredményei

Mára meggyőzően bebizonyosodott, hogy  $E = 5 \cdot 10^{19}$  eV-nál a bejövő részecskék száma jelentősen csökken (1. ábra). Ez a GZK-levágás jelenlétét kétségtelenül alátámasztja. (Természetesen mindig fennáll az az értelmezési lehetőség, hogy az asztrofizikai gyorsítók „kifulladás”, azaz gyorsító képességük energetikai határához érkeztek.) A GZK-levágás felett a fluxus alaposan csökken, de nem nulla. Ezt az alacsony fluxust csupán asztrofizikai forrásokkal sem lehet-

2. ábra. A különböző részecskefizikai hipotézisek jóslatai az integrált fotonfluxusra és a megfigyelési korlátok (M. Settimo ICRC 2011).

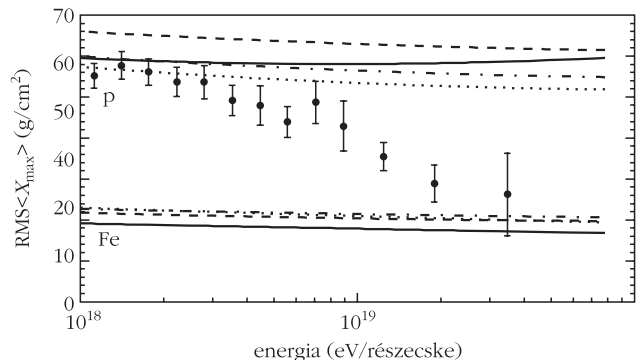
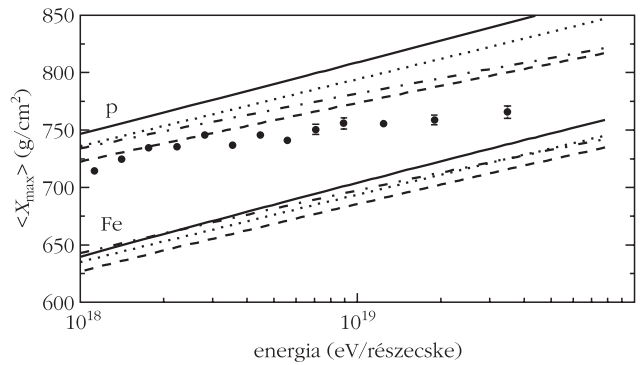




3. ábra. A felső ábrán a Teleszkóprendszer, az alsón a HiRes méréseit látjuk. Az egyenesvonal-csoportok a különböző hadronmodellekkel készült szimulációk eredményét mutatják.

len megmagyarázni. Ezekon az energiákon a galaktikus és extragalaktikus rendezett és kaotikus mágneses terek sem a protonok sem az atommagok terjedési irányát nem tudják lényegesen befolyásolni. Így a töltött részek is visszamutatnak a forrásukhoz. Minthogy csak kis számú forrás tud extrém energiákra gyorsítani, a részecskék beesési irányeloszlásának lényeges anizotrópiát kell mutatnia. Érdekes módon a topológiai defektusok (TD), szupernehéz sötét anyag (super heavy dark matter, SHDM) és a már úgy is gyengélkedő Z-robbanás (Z-burst, ZB) hipotézisnek nem a transz-GZK események redukált száma adta meg a kegyelemdőfést. Az Auger Observatórium szigorú felső korlátot ad a primér gamma-fluxusra. Mindezek az elméletek a protonok mellett elkerülhetetlenül nagyszámú energetikus fotont is adnának, ellentmondva a megfigyelt felső korlátnak (2. ábra).

A legfontosabb megoldatlan rejtély a primér összetételével kapcsolatos. Elvben protontól vasig bármi lehet. A fluoreszcens detektorok módot adnak a zápor  $X_{\max}(E)$  maximumának és  $\Delta X_{\max}(E)$  szórásának meghatározására (3. és 4. ábra). Ezekből az ábrákból elég világos, hogy az Auger Observatórium mérései a proton dominanciájáról fokozatosan a vasra történő áttérést részesítik előnyben, míg a HiRes és Teleszkóprendszer úgy látja, hogy többségben protonok jönnek a mért energiatarományban. Az LHC új adataival javított hadronmodellek valamivel markánsabbá teszik az Auger összetétel-változást az energia függvényében. Talán csak az okozza a különbséget, hogy az egyik detektor a déli, a másik kettő az északi féltekén



4. ábra. Az Auger-mérések, amelyek szórási adatokat is tartalmaznak ( $\text{RMS}(X_{\max}) = \Delta X_{\max}$ ).

gyűjtötte az adatokat. Egy másik érdekes, egyelőre megoldatlan kérdés, hogy a szimuláló programok miért nem képesek a müionszámot helyesen megadni. Az LHC kísérleti eredményeit pontosan leíró hadronmodellek fontos segítséget adnak az extrém energiájú tartományban szükséges analízisre. A nagy, új kozmikusdetektor-rendszerek még csak rövid ideje működnek, így további adatokra kell várni, hogy a felvetett problémákra és esetleges újabbakra magyarázatot adhassunk. Fontos kérdés, hogy a GZK-energia környéken és felette – az LHC-energia feletti ismeretlen tartományban – a várható nagyobb statisztika mutató-e valami új anomáliát, amely segítené egy még nem ismert, a Standard Modellel túlmenő fizika felfedezésében. A részecskefizikusok abban reménykednek, hogy a kis számú asztrofizikai gyorsító nem „fullad ki” az új fizika küszöbe alatt.

#### Irodalom

- T. Stanev: *High Energy Cosmic Rays*. Springer, 2004. – A kozmikus sugarak gyorsításával és terjedésével kapcsolatos fizikát tárgyaló modern könyv.  
A. Letessier-Selvon, T. Stanev: Ultrahigh energy cosmic rays. *Rev. Mod. Phys.* 83 (2011) 907–942. – Legfontosabb új eredményeket is tárgyaló összefoglaló cikk.



*Kövesi-Domokos Zsuzsát*, a baltimore-i Johns Hopkins Egyetem emerita professzorát az Eötvös Loránd Fizikai Társulat 2011. májusi Küldöttközgyűlésén tiszteletbeli tagjává választotta. Társulati székfoglaló előadását 2012. január 19-én rendkívüli Ortway-kollokvium keretében tartotta. A *Fizikai Szemle* az előadás két részese, írott változatával köszöntötte a kitüntetettet.

## Három, meglepő eredménnyel járó gondolkísérlet

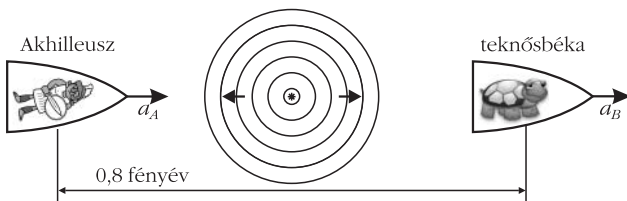
1. Üldözéses versenyhez készülődik a világűrben Akhilleusz és egy teknősbéka. Elhelyezkednek egymástól  $0,8$  fényév távolságra szabadon lebegő űrhajójukban, ahogy az *1. ábra* mutatja. A félúton levő versenybíró fényimpulzussal adja meg a jelet az indulásra. A teknősbéka jobbra indul, Akhilleusz feladata, hogy utolérje.

A teknősbéka nem ambiciózus, inkább a kényelmet választja. Pontosan földi körülményeket akar teremteni a fedélzeten, ezért állandó  $a_B = g = 10 \text{ m/s}^2$  (saját)gyorsulásra állítja űrhajóját. Akhilleuszban erősebb a versenyszellem, nagyobb,  $a_A (> a_B)$  gyorsulással iramodik a teknős után, és – hiába bizonygat Zénón mást – hamarosan utol is éri.

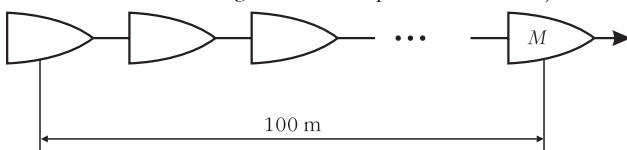
A verseny visszavágóján megint az *1. ábra* szerinti helyezkednek el. Ismét egyszerre kapják meg az indítójelet, de a teknősbéka most *kicsit* jobban rákapcsol. Ismét állandó (saját)gyorsulásra állítja űrhajóját, de most  $a_B = 1,5 g = 15 \text{ m/s}^2$  számértékűre. *Ezzel a verseny el is dőlt. Akhilleusznak, akárhogyan igyekszik is, elvi esélye sincs, hogy utolérje a teknőst.* Hogyan lehetséges ez?

2. Galaktikus távolságokra – gumiszalagokkal összekapcsolt – robotűrhajókból álló konvoj szállítja a teherakományokat a *2. ábra* szerinti elrendezésben. Ezeket a robotűrhajókat úgy tervezték, hogy tetszőlegesen nagy gyorsulást kibírják, és motorjuk képes is tetszőlegesen nagy gyorsulású mozgásra bírni őket (*gondolkísérlet!*). Egyetlen korlátozó tényező van: a konvoj első tagja, a *2. ábrán*  $M$ -mel jelölt „mozdony”-űrhajó olyan érzékeny vezérlőegységet szállít, amely „csupán”  $10^{15} \text{ m/s}^2$  gyorsulást bír ki. A konvoj hossza  $100$  méter. Az egyes robotűrhajók mozgását úgy hangolják össze, hogy az összekapcsolásukhoz használt gumiszalagok útközben még éppen ne feszüljenek meg.

1. ábra. Akhilleusz és a teknősbéka.



2. ábra. Gumiszalagokkal összekapcsolt – robotűrhajók.



A Galaktikus Szállítóvállalat diszpécserre két meglepő tényt jegyez fel:

1) Ha az  $M$  űrhajó a benne levő vezérlőegység által még épp kibírható  $10^{15} \text{ m/s}^2$  gyorsulással indul, akkor a robotűrhajók közötti gumiszalagok *elkerülhetetlenül* megnyúlnak.

2) *100 helyett 90 méteres konvojt alkalmazva már nincsen gond: megoldható, hogy a gumiszalagok lazák maradjanak.* Hogyan lehetséges ez?

3. Egy szállítóvállalat pilótái azt a feladatot kapják, hogy egy törekeny anyagból készült „fényévruhat” (ami olyan, mint a méterrúd, csak hossza  $1$  fényév) a Tejútrendszerből egy másik galaxisba szállítsák. A fényévruhat mentén sűrűn űrhajókat helyeznek el, amelyekhez a ruhat rögzítik. Az űrhajókba pilóták ülnek, és várják az indulást. A megbeszélte indulási időpontban egy előzetesen betáplált program szerint az összes űrhajó állandó gyorsulással mozgásba lendül. Az űrhajók mozgása gondosan úgy van összehangolva, hogy szállítás közben a törekeny fényévruhatban se húzó-, se nyomófeszültség ne ébredjen.

A fényévruhat speciális festékekkel van bevonva: ez induláskor még fehér színű, de az idő múlásával megszürkül, majd teljesen befeketedik.

Az űrhajók pilótái – akik oldalra kinézve ellenőrzik a hozzájuk képest álló fényévruhat hozzájuk közel eső darabkájának állapotát – érdekes jelenségre lesznek figyelmesek. Mindegyikük azt tapasztalja, hogy a fényévruhat *nem egyenletesen szürkül*. Minden fényévruhatdarab menetirány szerinti hátulja világosabb, mint az eleje (ahogy a *3. ábra* mutatja), ami azt jelenti, hogy a fényévruhat egyes darabjai – és így a pilóták – *nem azonos ütemben öregednek*. Hogyan lehetséges ez?

## A Dewan–Beran gondolkísérlet

Mindhárom fenti példa tág értelemben az úgynevezett Dewan–Beran gondolkísérlethez [1] (közismertebb, bár kevésbé jogos nevén a „Bell-féle rakétaparadoxon”-hoz) kapcsolódik.

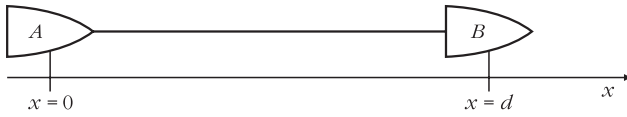
A Dewan–Beran gondolkísérlet így hangzik:

Két teljesen azonos űrhajót  $d$  hosszúságú vékony cérnával kötünk össze. Az űrhajók kezdetben állnak a  $K$  inerciarendszerben, ahogy a *4. ábra* mutatja. Egyszerre elindulnak (az ábrán jobbra), és teljesen azonos mozgással felgyorsulnak  $v$  végsebességre.

A „teljesen azonos mozgás” azt jelenti, hogy a gyorsulási szakaszaik pontosan ugyanakkora sebességnövekményekből állnak, és ezekre a sebességnövekmé-

3. ábra. A nem egyenletesen szürkülő fényévruhat.





4. ábra. A  $K$  inerciarendszerben kezdetben álló űrhajók.

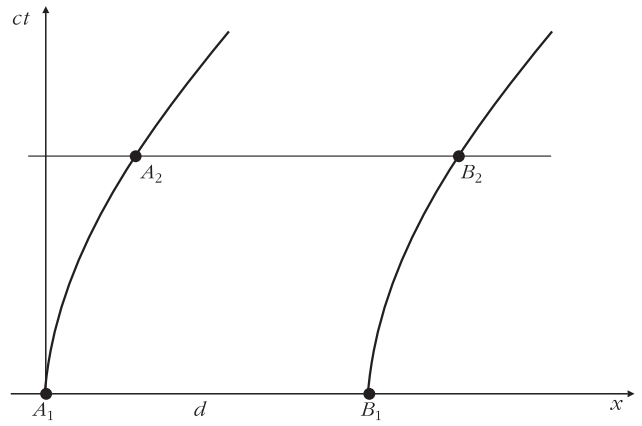
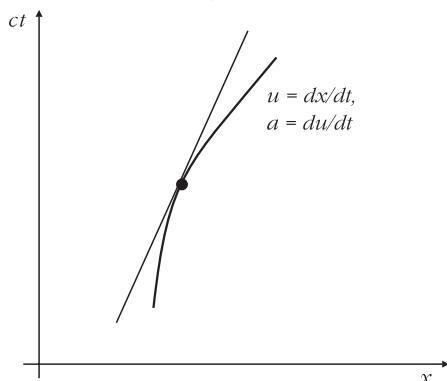
nyekre – akár a  $K$  inerciarendszer koordinátaidejét, akár az űrhajósok karóján mutatott sajátidőt nézzük – mindig ugyanazokban az időpontokban tesznek szert. A két űrhajó világvonalát a  $K$  inerciarendszerbeli Minkowski-diagramon (5. ábra) ábrázolva az „azonos mozgások” fogalma még könnyebben érthető: a világvonalak azonos alakú görbék, egymásnak pusztán az  $x$ -tengely mentén eltolásai (és kezdeti meredekségük végtelen).

Mi történik a cérnával? A cérna két vége pontosan ugyanazt a mozgást végzi. Azt várnánk tehát, hogy a cérna egésze – anélkül hogy mechanikai feszültség ébredne benne – háborítatlanul mozog jobbra. Azonban ez lehetetlen. Az egyre gyorsabban mozgó cérna hossza ugyanis csak a  $K$  inerciarendszerből nézve marad állandó (az 5. ábrán: például  $A_1B_1 = A_2B_2 = d$ ). Ez viszont – a hosszúságkontrakciót és a cérna egyre gyorsuló mozgását figyelembe véve – azt kell hogy jelentse, hogy a cérna saját hossza folyamatosan nő. Ez természetesen mechanikai feszültségek létrejöttével is jár, tehát a cérna előbb-utóbb elszakad.

A 5. ábra Minkowski-diagramja egyszerű, azonnal átlátható módon írja le a jelenséget, amely azonban így is bántóan ellentmond az intuíciónknak, hiszen a következő mondat igazságát vagyunk kénytelenek megemléstzeni: „Ha egy éppen csak megfeszített cérna két végét – a cérna hossza mentén – pontosan ugyanolyan módon gyorsítjuk, a cérna előbb-utóbb menthetetlenül elszakad.”

A Dewan–Beran gondolat kísérlet által bemutatott jelenségnek nem dinamikai okai vannak. A cérna elszakadását a hosszúságkontrakció tisztán tér-idő-geometriai effektusa okozza, aminek a newtoni mechanikában nyoma sincs. A gondolat kísérlet arra hívja fel a figyelmet, hogy a hosszúságkontrakció nem csupán a mozgási hossz mérésének módszeréből adódó „illúzió”, hanem olyan effektus, amelynek nagyon is valódi (fizikai) következményei lehetnek.

6. ábra. A részecske világvonalja egy  $K$  nyugvó laboratóriumi inerciarendszer Minkowski-diagramján.



5. ábra. A két űrhajó világvonalja a  $K$  inerciarendszerbeli Minkowski-diagramon.

Mielőtt a cikk elején szerepelt gondolat kísérletek meglepő eredményeinek részletes magyarázatába kezdenék, teszek egy olyan feltevést, amely lényegesen egyszerűsíteni fogja a matematikai részleteket: mostantól olyan mozgásokat fogok tekinteni, amelyekben az adott tömegpont saját gyorsulása állandó. Az első kérdés: milyen görbe írja le az ilyen részecske világvonalát egy  $K$  nyugvó laboratóriumi inerciarendszer ( $x, ct$ ) Minkowski-diagramján (6. ábra)?

## Állandó sajátgyorsulással mozgó tömegpont

A sajátgyorsulás állandóságát az

$$a' = \frac{du'}{dt'} = \text{const.} \quad (1)$$

egyenlet fejezi ki, ahol  $a'$  a gyorsulás,  $u'$  a sebesség és  $t'$  az idő. Minden vesszős mennyiség a tömegpont pillanatnyi nyugalmi rendszerében értendő (abban a  $K'$  inerciarendszerben, amely olyan  $v$  sebességgel mozog a  $K$ -hoz képest, hogy  $O'$  origója az adott időpillanat kis környezetében éppen együtt mozog a tömegponttal).

A  $K$  és  $K'$  közötti Lorentz-féle sebességtranszformációs formula:

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}}. \quad (2)$$

(Azon esemény szűk környezetében tehát, amelyre az (1) egyenletet felírtuk,  $u = v$  és  $u' = 0$ .)

Az (1) egyenletben szereplő deriválást az összetett függvény deriválási szabályával felírva:

$$\begin{aligned} a' = \text{const.} &= \frac{du'}{du} \frac{du}{dt} \frac{dt}{dt'} = \\ &= \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{uv}{c^2}\right)^2} \frac{du}{dt} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \end{aligned} \quad (3)$$



ahol az első tényezőt a (2) egyenlet  $u$  szerinti deriválásából kaptuk, a harmadikat pedig az idődilataációs tényezőből. A (3) egyenletet átrendezve, az  $u = v$  összefüggés felhasználásával a *gyorsulásdeficitet* kifejező alábbi differenciálegyenlethez jutunk:

$$\frac{du}{dt} = a' \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}. \quad (4)$$

(A gyorsulásdeficit elnevezés abból ered, hogy – mint a (4) egyenlet mutatja – a tömegpont  $K$  vonatkoztatási rendszerben mért gyorsulása *kisebb*, mint a newtoni fizika alapján várt  $a'$ .) Az egyenlet közvetlen integrálással kapható megoldása ( $u(t=0) = 0$  kezdőfeltétel mellett, azaz nyugalmából induló tömegpont esetén):

$$u \left( = \frac{dx}{dt} \right) = \frac{a' t}{\sqrt{1 + \frac{a'^2 t^2}{c^2}}}. \quad (5)$$

(5)-ből újbóli integrálással megkapható a világvonal alakját leíró  $x(t)$  függvény:

$$x = \frac{c^2 \sqrt{1 + \frac{a'^2 t^2}{c^2}}}{a'} + \text{const.} \quad (6)$$

Átrendezés után:

$$\frac{(x - \text{const.})^2}{\left(\frac{c^2}{a'}\right)^2} - \frac{c^2 t^2}{\left(\frac{c^2}{a'}\right)^2} = 1, \quad (7)$$

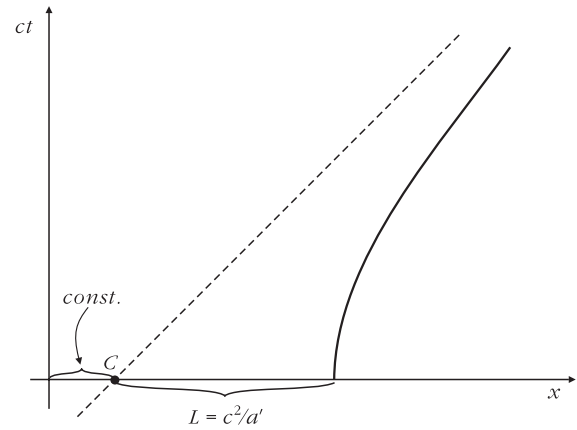
a világvonal alakja tehát hiperbola. A 7. ábra a (7) egyenlettel felírt hiperbolát (illetve annak pozitív  $a'$  sajátgyorsuláshoz tartozó ágát) ábrázolja.

## Utolérési limit

– az 1. gondolkísérlet magyarázata

A (7) egyenlet alapján könnyű belátni, hogy a hiperbola aszimptotája – mint a 7. ábra is mutatja – azon fény sugar világvonala, amely átmegy a  $C$  eseményen (az ábrán a  $C$  pont a hiperbola úgynevezett középpontja). Más megfogalmazásban az aszimptota nem más, mint a  $C$  eseménynél jelen levő objektumok *jövőbeli fénykúpjának* jobb oldali „ága”. A  $C$ -nél jelen levő objektumok tehát – bár kezdetben véges távolságra voltak a tömegpontunktól – *soba nem találkoznak* vele, hiszen világvonaluk – akármennyire is (legfeljebb  $45^\circ$ -kal) dől a  $ct$ -tengelyhez képest – soha nem metszheti a (7) hiperbolát.

A (7) egyenlet nevezőiben szereplő, hosszúságdimenziójú  $L = c^2/a'$  kifejezés ennek megfelelően fontos fizikai jelentéssel bír: egyfajta *utolérési limitnek* tekinthető. Ha egy üldöző űrhajó a  $t = 0$  pillanatban *legalább  $L$  távolságra* helyezkedett el az álló tömegponttól a negatív  $x$ -tengely mentén, akkor a tömeg-



7. ábra. A (7) egyenlettel felírt hiperbola pozitív sajátgyorsuláshoz tartozó ága.

pont mozgását leíró hiperbola mindvégig kívül marad az üldöző űrhajó  $t = 0$ -beli fénykúpján, azon a tartományon, ahová az üldöző *valaha* is eljuthat.

A jelenség szépségét az adja, hogy az űrhajók *véges távolságból* vesznek üldözőbe egy *véges sajátgyorsulással* mozgó tárgyat, és akármilyen gyorsulással is erednek a nyomába, eleve esélytelenek. Ezzel a cikk elején szereplő 1. gondolkísérlet meglepő eredménye is érthetővé válik. A szám adatok ellenőrzését az olvasóra bízom. (Az a tény, hogy a tömegpont világvonala kívül marad a  $C$ -ből kiinduló *fénykúpon*, természetesen azt is jelenti, hogy még az üldöző űrhajókból kibocsátott *fényjelek sem* tudják a tömegpontot soha utolérni. Az 1. gondolkísérletben tehát ha a teknősbéka  $a_B = 1,5$  g értékűre állítja gyorsulását, nemcsak a versenyt sikerül megnyernie, de akkor sem lesz semmi baja, ha a frusztrált Akhilleusz esetleg lézerfegyverrel lő utána.)

## A gyorsulás felső korlátja

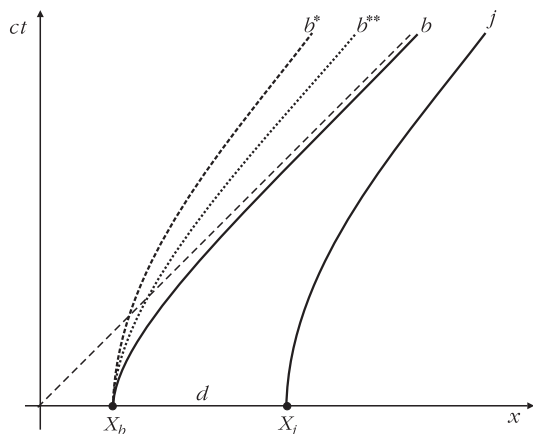
Mozgassuk a Dewan–Beran-kísérlet cernájának jobb oldali végét állandó  $a'_j$  sajátgyorsulással jobbra. Világvonalát a 8. ábra  $j$  jelű hiperbolája mutatja, amelynek az egyenlete:

$$\frac{x^2}{\left(\frac{c^2}{a'_j}\right)^2} - \frac{c^2 t^2}{\left(\frac{c^2}{a'_j}\right)^2} = 1. \quad (8)$$

Mint látható, az egyszerűség kedvéért a hiperbolát vízszintes irányban úgy pozicionáltam, hogy az aszimptotája átmenjen az origón. Ez a (7) egyenletben a  $\text{const.} = 0$  választásnak felel meg, vagyis annak, hogy a 7. ábra  $C$  eseményét (a hiperbola középpontját) az origóba helyeztem.

*Mekkora gyorsulással kell mozgatnunk a bal oldali véget, hogy a cérna mindvégig éppen megfeszített maradjon, de ne szakadjon el?*

A 8. ábra szaggatottan jelzett  $b^*$  világvonala, amely a  $j$  világvonal eltolt mása, tehát szintén  $a'_j$  gyorsulású mozgást ír le, biztosan nem jó: a cérna az ilyen moz-



8. ábra. A Dewan–Beran-kísélet cernája bal és jobb oldali végének világvonalai.

gás során *elszakad* (saját hossza  $n\tilde{0}$ ), ezt láttuk már az 5. ábrával kapcsolatban. Hogy a cerna ne szakadjon el, a bal oldali végének *nem elég* ugyanolyan sajátgyorsulással mozognia, mint a jobb oldali végének, hanem *szaporábban* kell a jobb oldali vég után igyekeznie. Ilyen lehetséges mozgásokat mutatnak például a 8. ábrán a  $b^{**}$  és  $b$  jelű világvonalak. Melyik lesz az ilyen mozgások közül a megfelelő?

Próbáljuk ki azt az  $a'_b$  állandó sajátgyorsulású mozgást, amelynek egyenlete

$$\frac{x^2}{\left(\frac{c^2}{a'_b}\right)^2} - \frac{c^2 t^2}{\left(\frac{c^2}{a'_b}\right)^2} = 1. \quad (9)$$

Ez éppen a 8. ábra  $b$ -vel jelölt hiperbolája. A (9) egyenletet a (7) egyenlettel összevetve látható ugyanis, hogy ezen eset különlegessége ismét a  $const. = 0$  választás, amely biztosítja, hogy a  $j$  jelű hiperboláéval *azonos az aszimptotája*. Ez, valamint az a követelmény, hogy a két hiperbola kezdeti távolsága az  $x$ -tengely mentén legyen  $d$  (a cerna kezdeti hossza), egyértelműen meghatározza  $a'_b$  értékét:

$$X_j - X_b \left( = \frac{c^2}{a'_j} - \frac{c^2}{a'_b} \right) = d, \quad (10)$$

amiből

$$a'_b = a'_j \frac{1}{1 - \frac{d a'_j}{c^2}}. \quad (11)$$

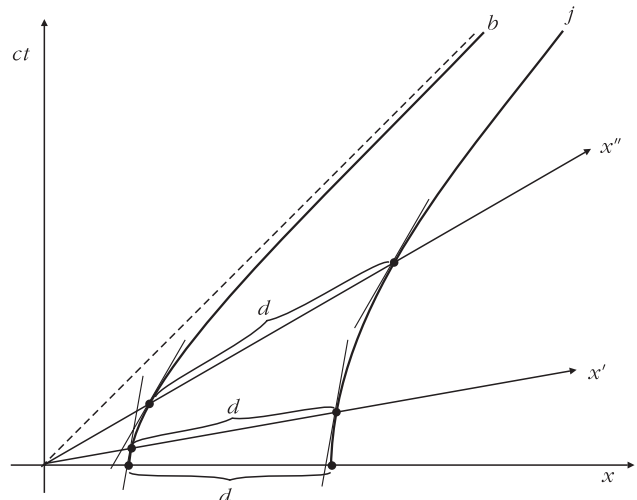
Állítás: ha a bal oldali vég a (11) képletnek megfelelően gyorsul – azaz a  $b$  jelű világvonalon mozog –, akkor a cerna *saját hossza* (és így megfeszítettségi állapota) *mindvégig változatlan marad*. Ez az alábbi gondolatmenettel látható be.

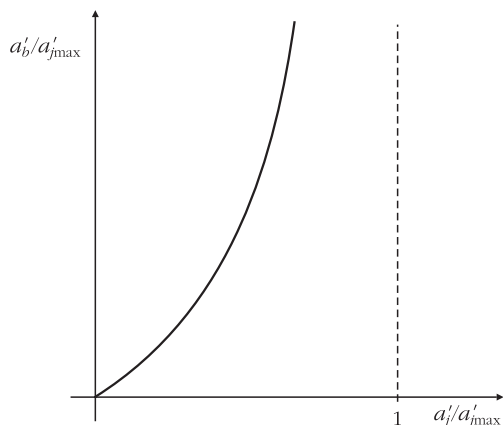
A  $b$  jelű hiperbola nem más, mint a különböző jobbra mozgó  $K'$ ,  $K''$  stb. inerciarendszerek  $x'$ ,  $x''$  stb. tengelyeinek kalibrálására szolgáló úgynevezett *kalibrációs hiperbola*: ez metszené ki az  $x'$ ,  $x''$  stb.

tengelyekből azt az osztást, ahová a  $c^2/a'_b$  hosszértéket fel kell mérni. (A (9) hiperbolának ez a tulajdonsága – amelynek analógiája az euklideszi síkon az  $(x, y)$  derékszögű koordináta-rendszerhez képest elforgatott  $(x', y')$  tengelyek kalibrálására szolgáló kalibrációs kör – a Minkowski-koordinátákban felírt téridő-intervallum invariáciájából, az  $x^2 - c^2 t^2 = x'^2 - c^2 t'^2 = \dots = const.$  összefüggésből következik). A  $b$  világvonalat követő részecske tehát mozgása során mindvégig ugyanakkora,  $c^2/a'_b$  „téridő-intervallumnyira” van az origó-eseménytől. Ez azt is jelenti, hogy a részecske *pillanatnyi nyugalmi inerciarendszereiből* végigkövetve a mozgást (egy-egy ilyen inerciarendszerben a részecske világvonala a lokális időtengely irányába mutat) a részecske mindig az adott inerciarendszer  $x$ -tengelyének  $c^2/a'_b$  osztású pontjában tartózkodik, és *éppen nyugalomban van*. Hasonló módon a  $j$  világvonallú részecske is mindvégig ugyanakkora,  $c^2/a'_j$  „téridő-intervallumnyira” van az origó-eseménytől, tehát *ő is minden* jobbra mozgó inerciarendszer  $x$ -tengelyének ugyanazon jelzésű pontjában (a  $c^2/a'_j$  pontban) tartózkodik – és éppen nyugalomban van! –, amikor az adott inerciarendszer órái 0-t mutatnak. (Az ilyenkor szokásos módon feltettem, hogy az összes inerciarendszer origója a kezdő időpillanatban egybeesik.) Ez viszont azt jelenti, hogy *abban az inerciarendszerben, amelyben a bal oldali cernavég éppen áll, a jobb oldali cernavég is éppen áll*. Ilyen értelemben a két cernavég közötti távolság – ami ez esetben a cerna *saját hossza*, hiszen abban a rendszerben mért hossz, amelyben a cerna végei állnak – *nem változik*. A cerna nem szakad el, mindvégig ugyanabban a megfeszítettségi állapotban marad.

Azt a tényt, hogy az egyik cernavég pillanatnyi nyugalmi inerciarendszerében a másik cernavég is mindig éppen áll, a 9. ábra illusztrálja. Az ábrán látható – és analitikusan is könnyen megmutatható –, hogy a két hiperbola *meredeksége*, azaz a két cernavég *sebessége* minden olyan eseménypárban megegyezik, amelyek

9. ábra. Az egyik cernavég pillanatnyi nyugalmi inerciarendszerében a másik cernavég mindig éppen áll.





10. ábra. A bal oldali cérnavég (dimenziótlanná normált) gyorsulása a jobb oldali cérnavég (dimenziótlanná normált) gyorsulásának függvényében.

egy-egy adott inerciarendszer  $x$ -tengelye mentén a kezdő időpillanatban egyidejűleg történnek. A két cérnavég tehát *egymáshoz képest* nem mozog. Érdekes ezt összevetni a  $b'$  és  $j$  jelű hiperbolák viselkedésével: abban az esetben is kijelenthető, hogy „minden pillanatban megegyezik a két cérnavég sebessége”, de ott a „minden pillanatban” szó a végig nyugvó laboratóriumi inerciarendszer egyidejű pillanatait jelenti.

A 8. ábra  $b$  és  $j$  jelű hiperboláival – (8) és (9) egyenletek – megtaláltuk tehát azt a mozgáspárt, amelyet a cérna bal és jobb oldali végének követnie kell, hogy a cérna mindvégig éppen megfeszített legyen, de ne szakadjon el. (Természetesen a cérna közbülső pontjainak is a megfelelő, egymástól eltérő gyorsulású mozgást kell végezniük. Világvonaluk a 8. ábrán olyan,  $b$  és  $j$  között elhelyezkedő hiperbolasegreget adna, amelyek középpontja az origóban van, és közös aszimptotájuk a  $45^\circ$ -os egyenes.) A fenti számolás – bár korrekt – azzal a zavarba ejtő következménnyel jár tehát, hogy a cérna *állandó* saját hosszának biztosításához a bal oldali végnek *jobban* (nagyobb gyorsítóteljesítménnyel) kell igyekeznie, mint a jobb oldali végnek. Ami még zavarbaejtőbb: a jobb oldali cérnavég adott gyorsulású mozgása mellett *minél hosszabb a cérna, annál nagyobb gyorsulással kell a bal oldali végnek igyekeznie, hogy a szakadást elkerülje*. Felmerül tehát a kérdés: a cérna hosszát növelve nem jutunk-e el előbb-utóbb valamilyen elvi korláthoz, vagyis olyan cérnahosszhoz, amikor a bal

oldali cérnavégnek *semmilyen* mozgása nem tudja a szakadást megakadályozni? Vagy: adott cérnahosszúság mellett *a jobb oldali vég sajátgyorsulását* növelve nem jutunk-e el előbb-utóbb valamilyen elvi korláthoz, vagyis olyan sajátgyorsuláshoz, amikor a bal oldali végnek *semmilyen* mozgása nem tudja a cérna szakadását megakadályozni?

A választ (de igen, *vannak* ilyen elvi korlátok!) a (11) összefüggésből kiindulva kaphatjuk meg. Sejthető, hogy a képlet jobb oldalán szereplő, gyorsulás dimenziójú  $c^2/d$  mennyiségnek fontos fizikai tartalma lesz. Vezessük be rá az  $a'_{jmax}$  jelölést (mindjárt kiderül, miért) és a segítségével normáljuk az  $a'_b$  és  $a'_j$  gyorsulásokat. A (11)-ből így az alábbi dimenziótlan egyenletre jutunk:

$$\frac{a'_b}{a'_{jmax}} = \frac{a'_j}{a'_{jmax}} \frac{1}{1 - \frac{a'_j}{a'_{jmax}}}, \quad (12)$$

A bal oldali cérnavég (dimenziótlanná normált) gyorsulását a jobb oldali cérnavég (dimenziótlanná normált) gyorsulásának függvényében a 10. ábra mutatja. A (12) egyenletből és a 10. ábrából világossá válik az  $a'_{jmax}$  konstans jelentése: ahogy a jobb oldali cérnavég gyorsulása megközelíti  $a'_{jmax}$ -ot, a bal oldali cérnavég gyorsulásának végtelenhez kell tartania, hogy a cérna azonos megfeszítettségi állapotban maradjon. Az

$$a'_{jmax} = \frac{c^2}{d}, \quad (13)$$

tehát azt a *kritikus sajátgyorsulást* adja meg, amelyet nem érhet el egy adott  $d$  hosszúságú, jobb felé mozgó objektum jobb oldali végének mozgása, ha azt akarjuk, hogy az objektum (ténylegesen, fizikailag) ne nyúljon meg (vagy szakadjon el). Ha a jobb oldali vég  $a'_{jmax}$ -ot elérő vagy meghaladó sajátgyorsulással mozog, akkor a bal oldali végnek még *végtelen sajátgyorsulás sem elég* ahhoz, hogy „lépést tartson” vele (hogy az objektum saját hosszát változatlan értéken tartsa).

#### Irodalom

1. E. Dewan, M. Beran: Note on stress effects due to relativistic contraction. *Am. J. Phys.* 27(1959) 517.



A szerkesztőbizottság fizika tanításáért felelős tagjai kéri mindazokat, akik a fizika vonzóbbá tétele, a tanítás eredményességének fokozása érdekében új módszerekkel, elképzelésekkel próbálkoznak, hogy ezeket osszák meg a Szemle hasábjain az olvasókkal.



# KÁROLYHÁZY FRIGYES, 1929–2012

Tisztelt Gyászoló Család!<sup>1</sup>  
Tisztelt Gyászolók!

*Az ember feljő, lelke fényfolyam,  
A nagy mindenség benne tükrözik.*

...

*Kiirthatatlan vággyal, a míg él,  
Tűr és tünődik, tudni, tenni tör;*

Károlyházy Frigyesre különösen ráillenek Vörösmarty Mihály sorai. Tudós emberként egész életében a minket körülvevő világ jobb megértésén tünődött, tudni szeretne volna hogyan működik, tanárként pedig sokat tett azért, hogy a tudást másoknak is továbbadja.

1929-ben született, így mindössze 3 évvel volt fiatalabb a kvantummechanikánál, annál a kvantummechanikánál, amit könyve címében *Igaz varázslatnak* nevezett és aminek jobb megértésének és megértésének szentelte egész életét. Habár briliáns matematikai képességekkel rendelkezett, a kvantummechanika tanításában többet szeretett volna, mint a formális matematikai megértés. Próbálta azt a matematikában kevésbé jártas ember számára is érthető módon, szemléletesen is elmagyarázni. Mindazok, akiknek szerencséjük volt legendás előadásait hallgatni, jól emlékeznek arra, ahogyan lerajzolja a táblára a hullámfüggvény időbeli változását és elmagyarázza azokat a hétköznapi tapasztalatunknak gyakran ellentmondó jelenségeket, amiket az elektron meg tud „csinálni”.

Kutatómunkáját is a kvantummechanika és a gravitáció jobb megértésének szentelte. A kvantummechanika egy – annak megszületésétől fogva – sokat vitatott kérdése a mérésre vonatkozó elv, amely azt mondta ki, hogy a mérés során a hullámfüggvény véletlenszerűen „beugrik” a mérőberendezés egyik sajátállapotába. Ezt a problémát Ő a kvantummechanika és a gravitáció egyesítésével kívánta tárgyalni és feloldani. Erről írta nagydoktori disszertációját is. Munkája több világhírű kutató: *Feynman*, *Wigner*, *Penrose* figyelmét keltette fel. A kérdéskör mind a mai napig megoldatlan. Károlyházy Frigyes több mint 40 évvel ezelőtt e témában íródott cikke újra érdeklődést vált ki.

Az egyetemi hallgatók mellett külön gondot fordított a középiskolásokkal való foglalkozásra is. Hosszú időn keresztül vett részt a *KöMaL* szerkesztésében és az Eötvös fizikaverseny feladatainak kitűzésében. És milyen feladatok voltak ezek! Ha valaki olvasta őket, gyakran ez volt az első benyomása: atya ég, hogy is van ez? A feladatok igazán helyes megoldását talán csak Ő tudta, de mindig bízott benne, lesz olyan gyerek, aki rájön, mire is gondolt és ebben nem is csalatkozott.

Tankönyveit nívódíjjal jutalmazták, tanári munkáját az oktatási miniszter Apáczai Csere János díjjal (1993), az Eötvös Loránd Fizikai Társulat Felsőoktatási Díjjal (2006), tudományos munkásságát a Magyar Tudományos Akadémia Eötvös József koszorúval (1997) ismerte el. Halála előtt nem sokkal a II. kerület emlékéremmel tüntette ki.

„Istennek örökké él minden teremtmény” énekeljük. Az öröklét földi megtestesüléseként az a különleges gondolkozás, ami Károlyházy Frigyes sajátja volt, ott él tovább azon tanárkollégák szavaiban, akik fizikát tanítanak a gyerekeknek, vagy azon kutató munkatársak gondolataiban, akik a fiatal kollégák munkájában segídeknek.

Az Eötvös Loránd Tudományegyetem Fizikai Intézet minden munkatársa nevében búcsúzom. Frici, emlékedet szeretettel megőrizzük.

*Groma István*

Kedves Frici!<sup>1</sup>

Az Eötvös Loránd Fizikai Társulat nevében búcsúzom Tőled.

Személyedben jól ismert és nagy hatású tagját vesztette el a magyar fizikusok közössége. A Károlyházy Frigyes név fogalom nagyon sok fizikus és fizikatanár számára.

Ismert az a tudományos eredményed, amire ma-napság Károlyházy-féle bizonytalansági reláció néven hivatkozik a szakirodalom. Én most az oktatásban, a tehetséggondozásban és az ismeretterjesztésben betöltött kiemelkedő szerepedet szeretném méltatni.

Mindig szíveden viseltd a fizikaoktatás kérdését, az általános iskolástól kezdve, a középiskoláson át, az egyetemi oktatásig. Alkotó módon, a hivatástudat által vezérelve dolgoztál az oktatás javításán. Nevedhez fűződik egy kiváló, alternatív tankönyvsorozat az általános iskolások számára.

Sokféle tanulmányi versenyen az általad kitűzött feladatok külön kategóriát jelentettek, és ez nagyon fog hiányozni a jövőben. Feladataid megoldásához mindig a fizikai lényeg felismerésére volt szükség, akár a Mikola-versenyről vagy a Károly Iréneusz versenyéről, a *KöMaL* pontversenyéről vagy az Eötvös-versenyéről volt szó. Külön kiemelendő, hogy az Eötvös-verseny versenybizottságának elismerten leginnovatívabb tagja voltál – majdnem negyven éven át!

Mindezek alapján jogosan kaptad meg az Eötvös Loránd Fizikai Társulat Felsőoktatási Díját 2006-ban. Nem ez volt az egyetlen díjad, hiszen tankönyveidet nívódíjjal jutalmazták, továbbá megkaptad a minisztériumi Apáczai Csere János díjat, az MTA Fizikai díját és az MTA Eötvös József koszorúját is.

Reguláris egyetemi előadásaid mellett legendásak voltak ismeretterjesztő előadásaid, írásaid. Közülük

<sup>1</sup> Elhangzott 2012. július 24-én a Farkasréti temetőben.

csak néhányat emelek ki: a *Fizikai Szemlé*ben vagy a *Természet Világá*ban megjelent cikkeidet, vagy az ismeretterjesztő irodalom egyik remekművét, az *Igaz varázslat* című könyvedet. Azután emlékszem egyik szellemes ábrára, amivel az 1983-as Fizikus Diákköri Nyári Iskola nyitó előadását illusztráltad.

Még a legutóbbi időkben is ugyanolyan fiatalos hévvel tartottad előadásaidat, mint a több évtizeddel előtti TIT rendezvényeken, vagy a Fizikai Társulat, illetve a *KöMaL* által szervezett különböző Ankéntokon.

Hogy csak a legutolsó nagy sikerű előadásaidat említsem: az 50. Fizikatanári Ankénton, Szegeden beszéltél a fizika tanításáról, és erről egy remek cikket írtál a *Fizikai Szemlé*ben, *Az őcskös felesége* címmel. Vagy egy másik előadásod *Tündérbert* – *egy kis időtöltés a téridőn* címmel az egyik Szkeptikus konferencián. Szerencsére ez utóbbiról készült videófelvétel megtekinthető az interneten.

Végül, szeretnék nemcsak mint az ELFT főtitkára búcsúztatni, hanem szabad legyen néhány személyes tartalmú mondatot is szólnom. Te azon néhány ember egyike voltál, akiknek hatására a fizikusi hivatást választottam életpályámul. Még gimnazista koromban jártam a kvantummechanikáról szóló TIT előadás-sorozatodra. Lenyűgözött szuggesztív előadásmódot. Borzongató, helyenként katartikus élmény volt átélni, ahogyan mély és kristálytisza gondolataid átjárták az agyamat. Később a *Természet Világá*ban a 70-es években a téridőről megjelent több részes írásod tett rám óriási hatást, amit tovább erősített az egyetemen erről a témáról tartott specid meghallgatása. A téridő geometriájának olyan tárgyalásával, ahogyan Te kezelted, sehol máshol nem találkoztam az irodalomban. Ez a koordinátáktól független leírás az egyik legszebb gondolatmenet, amit valaha is hallottam.

Kedves Frici! A magam és fizikus kollégáim nevében is: köszönöm/köszönjük mindazt, amit Tőled tanulhattam/tanulhattunk.

„Akik az igazságra oktatnak sokakat, Ragyogni fognak örökkön-örökké, Miként a csillagok.” E gondolat jegyében búcsúzom Tőled az Eötvös Loránd Fizikai Társulat nevében. Emlékedet megőrizzük.

Kürti Jenő



Életének 83-ik évében, 2012. július 2-án elhunyt Károlyházy Frigyes, az ELTE Elméleti Fizikai Tanszékének nyugalmazott egyetemi tanára.

A Budapesti Piarista Gimnáziumban érettségizett. Tanulmányait az Eötvös Loránd Tudományegyetemen folytatta matematika-fizika tanári, majd fizikus sza-

kon. Diplomája megszerzése után az egyetem Elméleti Fizikai Tanszékére került. 1963-ban egy évet töltött az Egyesült Államokban, a North Carolina Universityn, itt már a kvantumelmélet és az általános relativitás összekapcsolásán dolgozott, ami mindvégig kutatói munkásságának középpontjában állt. A *Nuovo Cimentó*ban 1966-ban megjelent cikkében a Minkowski-téridő minimálisan detektálható tartományára adott korlát Károlyházy-féle bizonytalansági relációként vált ismertté az irodalomban. Ez a cikke, amely

akadémiai doktori disszertációjának alapját képezte, több hivatkozást kapott, a legutóbbi – kínai szerzők dolgozata – ez év márciusában a kozmológiai sötét energiára vonatkozó következtetéseket vont le belőle. 1972-ben lett egyetemi tanár. Az 1996–97-es tanévben a Budapesti Kollégiumban egy kis csoport vezetőjeként folytatta kutatásait, sikeres konferenciát szervezett a kvantummechanika legújabb eredményeiről. Előadása, amelyben arról beszélt, hogy a testek hullámfüggvényének véletlenszerű redukciója anomális Brown-mozgást okozhat, komoly érdeklődést váltott ki. Sokáig bízott abban, hogy a gravitációs hullámokra vadászó kísérletek ezt a jelenséget is kimutathatják.

Nagyon tudott és szeretett tanítani. Nem bíbelődött a hosszú levezetésekkel, gondolkodni tanított. Tőle tanultuk meg, hogy a speciális relativitáselméletben a Minkowski-síkon, a téridőben bolyongva mennyi érdekességgel találkozhatunk, milyen könnyen megérthetjük e látszólag bonyolult elméletet. Az érdeklődő ma is megtekintheti az interneten *Tündérbert* – *egy kis időtöltés a téridőn* című előadását. Ő magyarázta el nekünk a kvantummechanika kétréses interferencia-kísérletét, ami világossá teszi a részecske – hullám kettős természetet. És nem csak egyetemi szinten tudott tanítani. Nívódíjjal jutalmazott tankönyvsorozatot készített fizikából az általános iskolásoknak, járta az országot, hogy felkészítse a tanárokat az újszerű tanítási módszerekre. Hosszú évtizedeken keresztül tagja volt az érettségizettek számára rendezett Eötvös-verseny feladatkitűző bizottságának. Szinte minden évben tudott adni olyan feladatot, amely eldönthette, kik lesznek a verseny díjazottjai.

1993-ban Apáczai Csere János díjjal, 1997-ben kiemelkedő tudományos életművéért a Magyar Tudományos Akadémia Eötvös József Koszorújával tüntették ki. Halála előtt a II. Kerületi Önkormányzat emlékérmét adományozott neki.

Csodálatos könyve az *Igaz varázslat* a kvantummechanikát magyarázza el úgy, hogy megértéséhez elvileg csak a négy matematikai alaplőveletre van szükség, gyakorlatilag azonban nagyon mély és kitaró

gondolkodásra. A bevezetés mottójául Szabó Lőrinc *Dsuang Dszi álma* című versének utolsó versszakát választotta:

*és most már azt hiszem, hogy nincs igazság,  
már azt, hogy minden kép és költemény,  
azt, hogy Dsuang Dszi álmodja a lepkét,  
a lepke őt és mindhármunkat én.*

Ilyen a kvantummechanika. Álmodj tovább békében  
Tanár Úr, kedves Frigyes!

Gálfi László

## Emlékezés a fizikatanárok tanárára

Gyászol a fizikatanár-társadalom. Meghalt Károlyházy Frigyes, aki mindig szívesen segített bárkinek, bármilyen oktatással kapcsolatos probléma megoldásában. Olyan tudós volt, aki nem csak megérteni akarta a természetet, de számára egész életében az is fontos volt, hogy mások is értsék. Tanszéki szobája mindig nyitva állt a tőle segítséget kérők előtt.

Magam először 1972-ben, Kőszegen hallgattam őt egy Marx György által szervezett nyári iskolán, ahol *A kvantummechanika alapfogalmainak szemléltetéséről* címmel tartott két részes előadást. Ezen és a későbbi nyári iskolákon is az egyik legnagyobb érdeklődéssel várt előadás az övé volt. Frici adott ötletet, hogyan lehetne a 12. évfolyamon a kvantummechanika, a mikrovilág jelenségeit elképzelhetővé tenni a diákok számára. Ő próbálta meg „aprópénzre váltani” a mások által megfogalmazott, fennkölt – és ugyanakkor elvont – gondolatokat. Ő magyarázta fáradhatatlanul, mit gondoljunk és taníthatunk mi, tanárok az alagúteffektusról, a hullámcsomagokról, a kettős résen áthaladva interferenciát adó elektronokról és fotonokról.

Én biztosan sokkal felületesebben tudtam volna tanítani ezeket a témákat, ha Frici nem korrepetál tanóráim előtt. Türelmesen magyarázott, legtöbbször este, telefonon át. Ezekért az órákig tartó telefonos segítségért életem végéig hálás leszek neki.

Károlyházy professzor úr sokat tett a tanárok továbbképzéséért. 1972 óta segítette – rémes ez a múlt idő! – a modern természettudományos oktatás szemléletének kialakítását.

1973-ban a tatai nyári iskolán *Mennyit hazudbunk lelkiismeret furdalás nélkül*, 1975-ben Sárospatakon *A természettudományi tárgyak tanításának egybehangolásáról*, 1977-ben Győrben a *Konfigurációs tér* címmel, 1978-ban Jászberényben az *Entrópia és élet*, Fonyódon a fizika oktatásával foglalkozó IV. Dunaszemináriumon *Quantum mechanics for material science in school* című előadásával segített megtalálni azokat a módokat, amelyekkel az érettségi előtt álló diákoknak képet adhatunk a szubatómi világról.

Ezekben az években a *középiskolai ankétok* szervező bizottsága is többször kérte fel őt előadások

tartására. 1973-ban Veszprémben *Oszttható-e az elektromágneses tér*, 1976-ban Zalaegerszegen *Nem tudja azt senki fia, mitől nő az entrópia*, 1977-ben Szolnokon *Fotonok és koherencia*, 1980-ban *Tudnak-e az erővonalak mozogni?*, 1986-ban Győrben *Anyaghullámok* címmel tartott előadást.

A fenti, egyáltalán nem teljes lista alapján látszik, hogy – a hagyományos tananyag fogalmainak tisztázásától a modern fizika fogalmainak középiskolai bevezetéséig – az iskolai tanítás során előkerülő, szinte valamennyi témáról tartott előadást.

Az *általános iskolai ankétok*nak – az ELFT Általános Iskolai Oktatási Szakcsoportjának megalakulása óta – csaknem minden évben előadója volt. Az elsőt, 1977-ben Nyíregyházán, az energiáról tartott nagy sikerű előadást. Azután, az akkori iskolarendszerben teljesen újszerű, úgynevezett *párbuzamos* tankönyveink megjelenése idején a tankönyv felépítéséről és a tanterv legproblémásabb fogalmairól beszélt a tanároknak.

1981-ben Egerben *A 6. osztályos új párbuzamos tankönyv felépítése, az energia fogalma és tanítása* címmel, 1982-ben Kaposváron *Az anyag korpuszkuláris szerkezete az általános iskolai fizikában*, 1985-ben Szekszárdon *Anyaghullámok*, 1986-ban Sopronban *Különösen nehéz fizikai fogalmak kialakulása*, 1987-ben Békéscsabán *A párbuzamos 7. osztályos tankönyv elektromosságtani részének felépítése*, 1988-ban Debrecenben *A 8. osztályos párbuzamos tankönyv felépítésével* ismertette meg a tanárokat.

Az általános iskolai fizikatanítás jobbításának szándékától indítva az éppen aktuális szakmai kérdések elméleti hátterének bemutatásával segítette az Általános Iskolai Ankétokon résztvevő fizikatanárok munkáját. 1989-ben Vácott a *Kulcsfontosságú kísérletek a fizikában*, 1993-ban Mosonmagyaróváron *A csábítás trükkje*, 1999-ben Zamárdiban az *Élővilág a fizikában*, 2001-ben Veszprémben *Ki lepét fog, lopva járjon*, 2002-ben *A kerettanterv és a fizikatanítás* című előadásaival segítette a hallgatóság látókörének bővítését, felső fokú tanulmányaik aktivizálását, modernizálást.

Előadásai az ankétok várva várt eseményei voltak. Jó hangulatú, közvetlen, szellemes rajzokkal illusztrált magyarázatai még hónapok múlva is beszédtemája volt a tanári közösségeknek. Sokat tett a fizika nehéz, elvont fogalmainak tisztázása, és az alapfokú tanítás sikeressé tétele érdekében. Elméleti fizikusként sem sajnálta az időt annak kigondolásától, hogyan lehetne ezeket minél egyszerűbben, szakmailag mégis pontosan tanítani.

A *közoktatás érdekében* végzett legmaradandóbb, és a szó szoros értelmében vett *kézzel fogható* munkái az általános iskolák 6., 7. és 8. évfolyamai számára készített tankönyvei. A könyvek elkészítésében természetesen mi, tanárok is részt vettünk, de az érdemi munka Károlyházy Fricié. Életéből évtizedeket vett el e könyvek létrehozása, illetve – az évek múlásával és az óratervek változásával – átírása az újabb kiadások számára.

A könyvsorozat elkészítésére az akkori minisztertől kaptuk a felkérést. Az 1978-as tantervi reform radikálisan változtatta meg az addig érvényben lévő tanítási gyakorlatot, nevezetesen, hogy az általános iskolai fizikaórákon elsősorban a mindennapi életben tapasztalható *jelenségekre* kell a tanulók életkori sajátosságait figyelembe vevő magyarázatot adni. Addig első sorban a „mi történik?” és a „milyen?” kérdésekre próbáltunk tudományosan elfogadható válaszokat adni a gyerekek számára.

Az új tanterv azonban azzal kívánta a tudományosságot fokozni, hogy a jelenségek bemutatása mellett minden esetben ki kellett térni azok *kölcsönhatás* jellegére is. Ez sok, nem várt nehézséget okozott még az olyan egyszerű, hétköznapi jelenségek esetében is, mint egy alma földre esése. Bár világos, hogy a kölcsönhatásban résztvevő egyik test az alma, de mi a másik?! Erre és ehhez hasonló kérdésekre kellett a 12 évesek számára elfogadható és fizikailag korrekt választ találni. A „Föld” nem jó válasz a kérdésre, mert mindenki látja, hogy a Föld esés közben nem ér hozzá az almához. Márpedig kölcsönhatás csak két olyan test között jöhet létre, amelyek érintkeznek egymással. A távolhatást túlhaladott elméletnek nyilvánította az akkori oktatásirányítás, nem korszerű, tehát nem fogadható el magyarázatként – mondta a „szakma” annak idején. Ebben az esetben a gravitációs mezőt kellett az almával kölcsönható *testként* megjelölni... (Elképzelhetőek a 12 éves gyerekeknek ennek hallatán?)

A tanterv másik alapvető elvárása volt annak bemutatása, hogy a kölcsönhatások közben *energiaváltozások* is történnek. Még hozzá úgy, hogy az egyik testé csökken, a másiké pedig nő. Sőt: a csökkenés éppen akkora, mint a növekedés! Vagyis: nem csak kvalitatív megállapítással kell élni, hanem az energiát mérhető mennyiséggé kell tenni (a 6. osztályban!), hiszen máskülönben a *megmaradást* minek alapján lehetne kimondani? És akkor még hátra volt annak megválaszolása, hogy az alma esésekor minek csökken az energiája és minek nő?

Ez tipikusan Károlyházy Fricinek való probléma volt. Mi tanárok, nem tudtuk erre – a 12 évesek által elfogadható – magyarázatot adni. Mi csak azt tudtuk, amit annak idején az egyetemen tanultunk, ami ugyan elmondható a 6. osztályban is, de elég kicsi az esélye, hogy lesz, aki azt megérti. Arra pedig, hogy ilyen magyarázatok után egy gyerek beleszeret a fizikába, még kisebb volt az esély.

De volt még más is. A jelenségek makroszkopikus bemutatása, megfigyeltetése mellett *mikroszkopikus szinten* is magyarázatot kellett adni rájuk. Ez azért okozott nehézséget, mert a látható, érzékelhető jelenségekre a nem érzékelhető világban kellett magyarázatot találni – a 12 évesek számára. Erre az elvont gondolkodásra pedig nem minden gyerek képes még 12 évesen, sőt, általában nem is érdeklik őket az ilyen kérdések. Figyelmük addig terjed, amíg valami érzékelhető változás tapasztalható: például melegítés hatására bizonyos anyagok színe megváltozik; a melegített jód kristályokból fantasztikus lila „köd” keletke-

zik, amiből lehűlés után pedig csodás, csillogó kristályok csapódnak ki az edényt záró óráüvegre. Rá tudnak csodálkozni a színkép színeire, érdekesnek találják, hogy van olyan folyadék, amelyben az a gyertya, amely a vízben úszik, lemerül, hogy a nehéz vasgolyó úszik a higanyban, lelkesen készítenek Cartesius-bűvart stb. stb. De, hogy mit csinálnak közben az anyag részecskéi, már nem izgalmas e korosztálynak.

E problémák megoldásához is Károlyházy Frici szakmai ismeretei, lelkiismerete és zsenialitása kellett. Azért, hogy lássa a gyerekek reakcióit a felvetett problémákra, hogy megtapasztalja, meddig terjed az elvont magyarázatokat befogadó képességük, a Tanár Úr sokat járt hospitálni iskolákba. Figyelte a gyerekek reakcióit a kísérleti tananyagra. Soha nem írt le a tankönyvben semmi olyat, aminek taníthatóságáról előzőleg nem győződött meg. Csak kipróbált kísérleteket írtunk bele a könyvekbe, amelyeket szellemes illusztrációival tett érdekessé, egyedivé, a gyerekek és minden olvasójának figyelmét felhívóvá. Segítette a tananyag eredményes elsajátítását a sok eredeti, gondolkodást igénylő, de a tananyag alapján megoldható tankönyvi feladat is.

A sok munka egyik legértékesebb eredménye a gyerekektől kapott *Tetszés díj* volt. A Tankönyvesek Országos Szövetsége versenyeztette minden évben az összes, adott évben forgalomban lévő tankönyvet. Az elektromosságtannal foglalkozó 8. osztály számára készített könyvünket értékelték így a diákok a '90-es évek végén.

Az Akadémia doktora, elméleti fizikus létére több évtizedet áldozott életéből a közoktatás jobbítására, csak mert lelkiismerete nem engedte, hogy a gyerekeknek és tanáraiknak olyasmikkel kelljen küzdeniük, amelyekre nem találják a megoldást. Hogy segítsen nekik tudásával, emberségével.

Nagyon fog hiányozni!

Csákány Judit

## Károlyházy Frigyes írásai a Fizikai Szemlében<sup>2</sup>

- A foton — 1953/88
- Űr és órák — 1959/80
- A téridő szerkezete — 1960/269
- Niels Bohr, 1895–1962 — 1963/3
- Van-e az elektromágneses potenciáloknak abszolút jelentése? — 1963/54
- A Mach-elv az általános relativitáselméletben — 1964/18
- A tételmeleti módszer a részecskefizikában — 1967/161
- A kozmológia általános relativitáselméleti alapjai — 1971/12
- Tóth Eszter: Kvantummechanika középiskolásoknak (könyvismertetés) — 1973/32
- A kvantummechanika alapfogalmainak elfogadtatása — 1974/243
- Az energia eloszlása — 1976/471
- A teljesség igazsága — 1979/214
- Gravitációs, de nem mező: mi az? — 1979/88
- Száz éve halt meg James Clerk Maxwell — 1979/443
- Máthé János — 1983/24
- Rendtelenség a rend lelke — 1984/401
- Bay Zoltán: Az élet erősebb (könyvismertetés) — 1991/148
- Hungaræ gentis decus — 1998/397
- Az öcskös felesége — 2007/367

<sup>2</sup> Összeállította Kármán Tamás.

# A KVANTUMMECHANIKA KÁROLYHÁZY-MODELLJE

Frenkel Andor  
MTA Wigner FK, Részecske- és Magfizikai Intézet

A fizikában két olyan elmélet van, amely minden anyagi folyamatot érint: az általános relativitáselmélet és a kvantummechanika. Furcsa módon ez a két elmélet nem vesz tudomást egymásról. A kvantummechanikában nem veszik figyelembe az általános relativitáselméletet, és az általános relativitáselmélet nem építi be a téridő geometriai szerkezetébe a testek helyzetének és sebességének kvantummechanikai határozatlanságát. Ezek a tudomásul nem vételek annyiban jogosak, hogy mindkét elmélet így is igen nagy pontossággal írja le a maga területét. Következésképpen egymásra hatásuk csak igen kis mennyiségi változásokat eredményezhet.

A fentiekől látszólag független probléma, hogy a kvantummechanika szerint bármely szabad fizikai rendszer tömegközéppontjának térbeli helyzete egyre határozatlanabbá válik a kvantummechanikai hullámfüggvény korlátlan szétfolyásának megfelelően. Márpedig a tapasztalat szerint míg a mikrorészecskék helyhatározatlansága lehet makroszkopikus méretű (ez történik a neutronnal a neutron-interferométerben), egy makroszkopikus test tömegközéppontjának térbeli helyzete mindig jól lokalizált, ellentétben a hullámfüggvény szétfolyásának korlátlan voltával.

Valószínűleg *Károlyházy Frigyes* volt az első, aki megmutatta, hogyan lehet az általános relativitáselméletet és a kvantummechanikát úgy kombinálni, hogy egyúttal határ szabassék a hullámfüggvény szétfolyásának [1, 2].

## A téridő-szerkezet minimális határozatlansága

Az általános relativitáselmélet és a kvantummechanika néhány alapvető összefüggésére, többek között a Schwarzschild-sugár képletére és *Heisenberg* határozatlansági relációjára támaszkodva *Károlyházy* megállapította [1, 2], hogy az einsteini téridő szerkezetének van egy minimális határozatlansága, amelyet a

$$\Delta T \approx T_p^{2/3} T^{1/3} \quad (1)$$

képlet fejez ki.<sup>1</sup> (1)-ben  $T$  egy időintervallum hossza,  $\Delta T$  a  $T$ -hez tartozó minimális határozatlanság és

$$T_p = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^5}} = 5,3 \cdot 10^{-44} \text{ s} \quad (2)$$

a Planck-idő.  $G = 6,7 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^3 \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$  a newtoni gravitációs állandó,  $\hbar = 1,1 \cdot 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{s}$  a redukált Planck-állandó,  $c = 3 \cdot 10^{10} \text{ cm/s}$  a fénysebesség. (1)-ben és a továbbiakban „ $\approx$ ” nagyságrendi egyenlőséget

<sup>1</sup> Matematikai képleteink nem [1]-hez és [2]-höz, hanem [3]-hoz állnak közel.

jelöl. Az általános relativitáselmélet és a kvantummechanika egyesített elméletének hiányában nincs mód a  $T$  és  $\Delta T$  közötti pontos összefüggés megállapítására.

*Károlyházy*  $\Delta T$ -s képletének megjelenése előtt elterjedt volt az a nézet, hogy egy  $T$  intervallum minimális határozatlansága mindig maga a parányi Planck-idő. (1) szerint ez nem így van,  $\Delta T$  sokkal nagyobb is lehet  $T_p$ -nél. Például  $T \approx 1 \text{ s}$  esetén

$$\Delta T \approx 10^{-29} \text{ s}, \quad (3)$$

ami még mindig igen kis érték, de 15 nagyságrenddel nagyobb a Planck-időnél. Megjegyzendő, hogy  $T_p$ -nél kisebb  $T$  időintervallumokra magának a téridőnek a fogalma kérdéses, így (1) csak  $T_p$ -nél nagyobb időkre alkalmazandó.

Mivel (1)-ben nem szerepel semmilyen partikuláris objektum adata, a képlet magának a téridőnek a szerkezetére vonatkozó relációnak tekinthető.

## A hullámfüggvény relatív fázisainak határozatlansága. Mikrorészecske és szilárd test koherenciacellája és $a_c$ cellahossza

A téridő szerkezet (1)-es határozatlansága határozatlanságokat indukál bármely fizikai rendszer kvantummechanikai hullámfüggvényében. Ezek a határozatlanságok elsősorban a hullámfüggvény relatív fázisában jelentkeznek, és annál nagyobbak, minél nagyobb tömegű a vizsgált rendszer, adott rendszeren belül pedig annál nagyobbak, minél távolabbi pontok közötti relatív fázisról van szó.

### Mikrorészecskék koherenciacellája és cellahossza

$m$  tömegű mikrorészecske esetén a relatív fázis  $\Delta_\phi$  határozatlanságára a tér  $\mathbf{x}$  és  $\mathbf{x}'$  pontjai között

$$\Delta_\phi(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \approx L_p^{2/3} \frac{a^{1/3}}{L_m} \quad (4)$$

adódik, ahol

$$a = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \quad (5)$$

a két pont távolsága,

$$L_m = \frac{\hbar}{cm} \quad (6)$$

az  $m$  tömeghez tartozó Compton-hullámhossz, és

$$L_p = c T_p = 1,06 \cdot 10^{-33} \text{ cm} \quad (7)$$



a Planck-hossz. Látjuk, hogy  $\Delta_\phi$  monoton növekszik az  $a$  távolsággal.  $\Delta_\phi$  csak  $a = 0$  esetén zérus, bármilyen kis  $a$ -ra  $\Delta_\phi > 0$ , a hullámfüggvény koherenciája mikrorészecskék esetében sem tökéletes. Mikor  $\Delta_\phi$  eléri a  $\pi$  értéket, a relatív fázis teljesen határozatlaná válik, a koherencia az ennek megfelelő  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{x}'$  pontpárok között elvész. Jelöljük az ehhez tartozó  $a$  értéket  $a_c$ -vel:

$$\Delta_\phi(a_c) \approx L_p^{2/3} \frac{a_c^{1/3}}{L_m} = \pi \approx 1, \quad (8)$$

ahonnt ([1, 2, 3])

$$a_c \approx \left( \frac{L_m}{L_p} \right)^2 L_m. \quad (9)$$

Egy  $a_c$  átmérőjű tartományon (egy „koherenciacellán”) belül a koherencia részlegesen fennáll, de egymástól  $a_c$ -nél, a „cellahossznál” nagyobb távolságokra lévő pontok között elvész.

Nézzük meg  $a_c$  tipikus értékeit. Elektronra  $L_m^{\text{el}} = 3,9 \cdot 10^{-11}$  cm, amivel (9)-ből

$$a_c^{\text{el}} \approx 10^{35} \text{ cm} \quad (10)$$

adódik, míg neutronra  $L_m^{\text{ne}} = 2,1 \cdot 10^{-14}$  cm-rel

$$a_c^{\text{ne}} \approx 10^{25} \text{ cm}. \quad (11)$$

Mikrorészecskékre  $a_c$  nagyobb, mint a Galaxisunk  $10^{21}$  cm-es átmérője. Egy mikrorészecske hullámfüggvénye a valóságban csak a koherenciacella igen kis tartományára terjed ki, így  $\Delta_\phi$ -je sokkal kisebb mint  $\pi$ , a koherencia majdnem tökéletes. Ennek fényében nem csoda, hogy a neutron hullámfüggvénye koherensnek bizonyul a neutron-interferométerben, és ez akkor is így lenne, ha a jelenlegi közel 1 méter helyett az interferométer mérete mondjuk 100 kilométer lenne.

Szilárd testek koherenciacellája és cellahossza

$M$  tömegű,  $R$  sugarú homogén szilárd test esetén  $a$  jelölje a test tömegközéppontjának (tkp) két helyzete közötti távolságot:

$$a = |\mathbf{x}_{\text{tkp}} - \mathbf{x}'_{\text{tkp}}|. \quad (12)$$

A relatív fázisok viselkedésének vizsgálata azt adja, hogy határozatlanságuk most is monoton növekszik  $a$ -val, és a koherencia akkor vész el, mikor  $a$  eléri az alábbi  $a_c$  értéket [1, 2, 3]:

$$a_c \approx \begin{cases} \left( \frac{L_M}{L_p} \right)^2 L_M, & \text{ha } a_c \geq 2R, \\ \left( \frac{2R}{L_p} \right)^{2/3} L_M, & \text{ha } a_c \leq 2R. \end{cases} \quad (13a)$$

$$\left( \frac{2R}{L_p} \right)^{2/3} L_M, \quad \text{ha } a_c \leq 2R. \quad (13b)$$

Vegyük észre, hogy  $a_c$  mikrorészecskékre vonatkozó (9) képlete egyezik az  $a_c \geq 2R$  tartományban érvényes (13a) képlettel ( $m$  és  $M$  mindkét esetben a vizsgált rendszer tömege). Ennek így is kell lennie: a kvantummechanikában a mikrorészecskék pontszerűeknek tekintetnek, így  $2R = 0 \leq a_c$  nyilván teljesül. De ebbe a tartományba nem csak mikrorészecskék tartoznak. Például egy  $\rho \approx 1 \text{ g/cm}^3$  sűrűségű,  $R \approx 10^{-6}$  cm sugarú, tehát  $M \approx 4\pi\rho R^3/3 \approx 4,2 \cdot 10^{-18}$  g tömegű szemcsére (13a)-ból

$$a_c^{\text{sz}} \approx 5 \text{ km} \quad (14)$$

adódik. A szemcsé tömegközépponti hullámfüggvénye a szemcsé méreténél sokkal nagyobb tartományra terjedhet ki anélkül, hogy koherenciája elveszne.

Tekintsünk most egy példát az  $a_c \leq 2R$  tartományban. Ott  $a_c$  képlete függ a vizsgált test sugarától is.  $R \approx 1$  cm sugarú, 1 grammos golyóra (13b)-ből azt kapjuk, hogy

$$a_c^{\text{g}} \approx 10^{-16} \text{ cm}. \quad (15)$$

A golyó tömegközépponti hullámfüggvényében inkoherens pontpárok jelennek meg, amint a függvény túlterjed  $10^{-16}$  cm-en, vagyis amint a tömegközéppont helyhatározatlansága ennél nagyobb lesz.

(Megjegyzés: Nem gömbölyű testeknél a koherenciacella sem gömb alakú. Például homogén cylinder esetén két cellahossz lép fel, a cylinder magasságának és átmérőjének megfelelően.)

Expanzió-kontrakció ciklusok.

A  $\tau_c$  ciklusperiódus

A koherenciacellán túl bekövetkező teljes koherenciavesztést Károlyházy objektív, megfigyeléstől független jelnek tekintette, amelynek hatására fellép egy koherenciavesztést ellensúlyozó reakció. Azt javasolta [2], hogy a Schrödinger-egyenletnek engedelmessé terjedhessen a hullámfüggvény a koherenciacellán túl egy  $2a_c$  átmérőjű tartományra, amikor már diszjunkt, egymáshoz képest teljesen inkoherens cellák is megjelennek. Ekkor pillanatszerűen és stochasztikusan kontrahálódjék a hullámfüggvény az általa elfoglalt  $2a_c$  átmérőjű tartomány valamelyik koherenciacellájára, ezáltal megszüntetve a teljes koherenciavesztést. Ezután a hullámfüggvény ismét terjedhessen ki egy  $2a_c$ -s tartományra, onnét újra kontrahálódjék, és így tovább. Mivel a kontrakció pillanatszerű, egy expanzió-kontrakció  $\tau_c$  ciklusperiódusát az  $a_c \rightarrow 2a_c$  expanzióhoz szükséges

$$\tau_c \approx \frac{M a_c^2}{\hbar} \quad (16)$$

idő adja.

Mint már láttuk, a mikrorészecskék  $a_c$ -i asztromikus méretűek, egy mikrorészecske hullámfüggvé-

nye csak a koherenciacella igen kis tartományára terjed ki, így kontrakcióra nem kerül sor. Ezt  $\tau_c$  értékei is mutatják. Figyelembe véve, hogy az elektron tömege  $9,1 \cdot 10^{-28}$  g, a neutroné pedig  $1,7 \cdot 10^{-24}$  g, (16), (10) és (11) azt adja, hogy

$$\tau_c^{el} \approx 10^{69} \text{ s} \quad \text{és} \quad \tau_c^{ne} \approx 10^{53} \text{ s}. \quad (17)$$

A mikrorészecskék  $\tau_c$  ciklusperiódusai sokkal nagyobbak, mint az Univerzum életkora...

Más a helyzet egy 1 grammos golyó esetén.  $a_c^g \approx 10^{-16}$  cm-rel (16) szerint

$$\tau_c^g \approx 10^{-5} \text{ s}, \quad (18)$$

a golyó tömegközépponti hullámfüggvénye másodpercenként százezerszer kontrahálódik. Ennek köszönhetően a tömegközéppont helyhatározatlansága nem nő korlátlanul, hanem  $a_c^g \approx 10^{-16}$  cm és  $2a_c^g$  között ingadozik, tehát lokalizáltsága nagyságrendileg  $10^{-16}$  cm-es marad.

Károlyházy vizsgálta a koherencia elveszését légnemű közegben is, nevezetesen Wilson-kamrában képződő nyomok szuperpozíciójának szétesését [2]. Helyszűke miatt erre az érdekes kérdésre itt nem térhetünk ki.

A kvantummechanikai méréselmélet szerint a hullámfüggvény redukcióját egy klasszikus mérőműszerrel, vagy az emberi tudattal való kölcsönhatás indukálja. Károlyházy-nál a redukciót felváltják a mérőműszertől és a megfigyeléstől független kontrakciók.

1986-ban *Ghirardi, Rimini* és *Weber* alkottak egy kvantummechanikai modellt [4], amelyben az expansió-kontrakció ciklusokat stochasztikus differenciálegyenlet írja le. A GRW-modell és a Károlyházy-modell összehasonlításával [5] foglalkozik. A hullámfüggvény objektív, stochasztikus kontrakcióját tartalmazó modellt javasolt *Diósi Lajos* [6] és *Roger Penrose* is [7].

## Anomális Brown-mozgás. A Károlyházy-modell kísérleti ellenőrizhetősége

Minden egyes, a hullámfüggvény kiterjedését  $2a_c$ -ről  $a_c$ -re csökkentő kontrakciónál fellép egy

$$\Delta p \approx \frac{\hbar}{a_c} \quad (19)$$

nagyságrendű impulzushatározatlanság. Ez oda vezet, hogy egy szabad makroszkopikus golyó tömegközéppontja nem pontosan a newtoni egyenes pályán mozog, hanem körülötte ingadozva halad növekvő ingadozási amplitúdóval. Bár ez az ingadozás igen kicsiny, elvileg lehetőséget ad Károlyházy módosított kvantummechanikájának kísérleti ellenőrzésére. Egy makroszkopikus test kellő izolálása a környezetől igen nehéz feladat. A kísérletet a nanotartományba eső objektummal kellene elvégezni.

## Dominánsan mikroszkopikus (kvantummechanikai) és dominánsan makroszkopikus (klasszikus) viselkedés. A mikro-makro átmeneti tartomány

A fentiekből látszik, hogy az  $a_c \gg 2R$  tartományba eső szilárd testek a mikrorészecskékhez hasonlóan viselkednek: tömegközépponti hullámfüggvényük a test méreténél sokkal nagyobb tartományra terjedhet ki jelentős koherenciavesztés nélkül. Ezzel szemben az  $a_c \ll 2R$  tartományba tartozó szilárd testek viselkedése közel áll a klasszikushoz. Hullámfüggvényük elveszti koherenciáját már akkor, amikor a test méreténél sokkal kisebb tartományra terjed ki. Ennek megfelelően a test tömegközéppontja – a gyakran ismétlődő kontrakcióknak köszönhetően – majdnem pontoszerűen lokalizált. A tömegközéppont mozgása közel klasszikus, a kvantummechanikai háttérre csak az anomális Brown-mozgás emlékeztet.

A mikro-makro átmenetet nyilván az  $a_c \approx 2R$  reláció jellemzi, ahol a koherencia elveszése a test méretének nagyságrendjébe eső tartományban történik.  $1 \text{ g/cm}^3$  sűrűségű testre (13a) – és természetesen (13b) is – azt adja, hogy

$$a_c^{tr} = 2R^{tr} \approx 10^{-5} \text{ cm}, \quad (20)$$

ahonnan az átmeneti (transition) tömegre

$$M^{tr} \approx 10^{-14} \text{ g} \quad (21)$$

adódik. Ez a porszemek és a kolloidszemcsék tömegtartománya.

Régebben úgy gondolták, hogy az általános relativitáselméletnek nem lehet köze a mikro-makro átmenethez, mert ha lenne, akkor az átmeneti tartományt az

$$M_p = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = 2,2 \cdot 10^{-5} \text{ g} \quad (22)$$

értékű Planck-tömegnek kellene jellemeznie, mivel az általános relativitáselmélet és a kvantummechanika alapvető természeti állandóiból,  $c$ -ből,  $G$ -ből és  $\hbar$ -ből ez a tömeg kombinálható ki. Azonban egy  $10^{-5}$  grammos tömeg makroszkopikusan viselkedik, nem lehet köze az átmeneti tartományhoz.

Károlyházy mutatta meg, hogy a koherencia elveszésének mértékét nem csak az említett természeti állandók, hanem a vizsgált fizikai rendszer tulajdonságai (tömege, mérete, alakja, halmazállapota) is befolyásolják, és ennek figyelembe vétele a Planck-tömegnél jóval kisebb, plauzibilis értékű átmeneti tömeget ad.

## Konklúzió

A kvantummechanikai méréselmélet szerint ahhoz, hogy a kvantummechanikából konkrét eredményeket kapjunk, szükség van egy, a kvantummechanikán

kívüli klasszikus mérőműszerre, vagy – végső soron – egy megfigyelő tudatára. Azonban Károlyházy megmutatta, hogy ha figyelembe vesszük az einsteini téridő minimális szerkezeti határozatlanságának hatását a hullámfüggvény relatív fázisaira, akkor nincs szükség az anyagi világ éles felosztására kvantummechanikai és klasszikus objektumokra. Minden fizikai rendszer egy közös dinamikai törvénynek engedelmeskedik. Ebben a determinisztikus, schrödingeri evolúció ötvöződik a hullámfüggvény stochasztikus kontrakcióival. Elvileg egy mikrorészecske hullámfüggvénye is kontrahálódhat, de a valóságban erre nem kerül sor. Makroszkopikus szilárd testeknél a kontrakciók gyakoriak, és biztosítják a tömegközéppont erős lokalizációját akkor is, ha a test szabadon mozog és senki sem figyeli meg.

pont erős lokalizációját akkor is, ha a test szabadon mozog és senki sem figyeli meg.

#### Irodalom

1. Károlyházy, F., *Nuovo Cimento XLII A* (1966) 390.
2. Károlyházy, F.: Gravitáció és makroszkopikus tek kvantummechanikája. Akadémiai doktori értekezés. *Magyar Fizikai Folyóirat XXII* (1974) 23.
3. Frenkel, A., in: *Quantum Reality, Relativistic Causality, and Closing the Epistemic Circle: Essays in Honour of Abner Shimony*. W. C. Myrvold, J. Christian editors, Springer, 2009, p 293.
4. Ghirardi, G. C., Rimini, A., Weber, T., *Physical Review D34* (1986) 470.
5. Frenkel, A., *Foundations of Physics 20* (1990) 159.
6. Diósi, L., *Physics Letters 105A* (1984) 199.
7. Penrose, R., *General Relativity and Gravitation 28* (1996) 581.

## A FIZIKA TANÍTÁSA

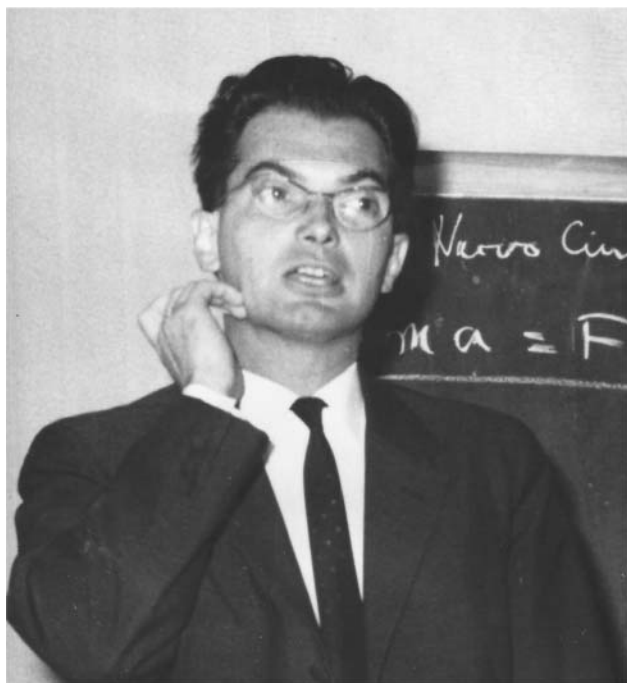
# KÁROLYHÁZY-FELADATOK AZ EÖTVÖS-VERSENYEN

## I. RÉSZ – MECHANIKA

*Károlyházy Frigyes* több mint fél évszázadon át volt tagja az Eötvös-verseny versenybizottságának. Ő maga diákkorában nem indult ezen a versenyen, mivel amikor érettségizett, már éppen szétszakadóban volt a versenyt jegyző Eötvös Loránd Matematikai és Fizikai Társulat, és nem rendezték meg a versenyt. A matematikusok külön társulatot hoztak létre Szegeden, a fizikusok pedig éppen csak ébredtek a kábulatból,

amelyet például *Ortway Rudolf* elvesztése okozott. *Selényi Pál*, akinek aktív szerepe volt a fizikai társulat háború utáni megalakításában, a nála munkára jelentkező *Vermes Miklóst* bízta meg a fizikai tanulóverseny megszervezésével. Vermes kimutatása szerint az első hivatalos fizikai Eötvös-versenyt 1949-ben rendezték, amikor Károlyházy Frigyes már másodéves hallgató volt az egyetemen, ezért nem is indulhatott rajta. Ő ugyan emlegetett egy előző évben tartott versenyt, amelyen elindult és amelyen sikeresen szerepelt, sőt még arra is emlékezett, hogy *Sós Vera* is indult a versenyen, de lehet, hogy az matematikaverseny volt és semmi írásos nyoma nem maradt.

Hogyan került Károlyházy Frigyes a versenybizottságba? Kezdetben *Selényi Pál*, majd *Pócza Jenő* volt a versenybizottság elnöke, 1959-től lett *Vermes Miklós*, aki addig is a verseny szervezője, mindenese volt. Valószínűleg még Pócza idejében történt, hogy nem sokkal a verseny után valaki felhívta Vermest telefonon és az egyik feladat megoldása iránt érdeklődött. Vermes évtizedekkel később is kuncogva mesélte el a történetet: az illető azt kérdezte, hogy ugye az ennek a feladatnak a megoldása, hogy... – és elmondta a megoldást, amire a bizottság gondolt. – Ugyanis az a helyzet – mondta az illető rendkívül tapintatosan –, hogy az úgy nem jó. Az illetőt Károlyházy Frigyesnek hívták, akit Vermes már a következő évben behívott a versenybizottságba. Ezután már csak egyetlen évben engedte meg neki, hogy távol maradjon, amikor tanulmányúton volt az Egyesült Államokban, 1974-ben. Ekkor hívta meg a bizottságba Vermes e sorok íróját.



Károlyházy és Vermes kiegészítették egymást. Károlyházy menekült minden adminisztratív tevékenység elől, ezt rábízta Vermesre, aki viszont bátran rábízta magát Károlyházy fizikai szemléletére, meglátásaira. Ők ketten minden alkalomra kirukkoltak egy-egy nehéz feladattal, olykor többel is, hogy tudjon miből választani a bizottság. Vermes általában számításos feladatokat hozott, amelyek megoldásához biztos tárgyi tudásra és problémamegoldói gyakorlatra volt szükség, Károlyházy viszont majdnem mindig „meglepő” feladatokkal érkezett, amelyek megoldásához kreativitás kellett. Ezen feladatok közül fogunk most válogatni. A régi versenyzőknek alkalmuk lesz nosztalgiázni, a fiatalok pedig megismerhetik azt a fizikus gondolkodásmódot, ahogyan Károlyházy Frigyes nézte – és nézni tanította – körülöttünk a világot.

Több mint 50 éve, 1961-ben szerepelt Eötvös-versenyen a következő Károlyházy-feladat.

*Ostornyél egyik végére vékony cérnaszálon elenyésző tömegű tollpíhét kötünk, és körbe forgatjuk. Milyen pályán mozog a pihe?*

Megoldás. A pihére jellemző, hogy nincs tömege, súlya, és csak a légellenállási erő hat rá. Az  $R$  hosszú pálcá végéhez  $L$  hosszúságú fonálra kötött pihére a légellenállási erő a sebesség irányával ellentétesen hat, tehát a fonál iránya a pihe pályagörbéjének érintője. A bot vége  $R$  sugarú kört ír le, ezért ha  $L < R$ , akkor a pihe is körpályán mozog, amelynek  $x$  sugarát Pitagorasz tételével számíthatjuk ki:

$$x = \sqrt{R^2 - L^2}.$$

Ha a cérna hosszabb, mint a pálcá, akkor nincs stabil pálya.

1972-ben a következő kérdést tette fel Károlyházy Frigyes.

*Felfűjt, könnyű műanyag labdát taláalomra megpörgetve síma vízfelületre ejtünk. Azt tapasztaljuk, hogy mielőtt megáll, rendszerint függőleges tengely körül forog. Mi a jelenség magyarázata?*

Megoldás. A ferde helyzetű tengely körüli forgás vízszintes és függőleges tengely körüli forgás eredőjeként fogható fel. A vízszintes tengely körüli forgást a súrlódás erősen fékezi, mert a gömb „egyenlítője” mentén nagy a sebesség, és emiatt nagyobb a folyadékban a súrlódás. A függőleges tengely körüli forgásnál az érintkező felület kis gömbsüveg, ahol a sebesség és így a súrlódás is kisebb; a forgásnak ez az összetevője lassabban fékeződik le, és idővel már csak ez érvényesül.

1985-ben egy igazi gravitációs feladatot adott fel.

*Egy  $U$  alakú csőben folyadék van egyensúlyban. Ezután a bal oldali szár alá igen nagy tömegű golyót helyezünk. Hogyan változnak meg a folyadékszintek?*

Megoldás. A közlekedőedény folyadékfelszínei vívfelületen helyezkednek el, ezek eredetileg vízszin-

tes síkok. A nagy tömegű golyó odahelyezése után a vívfelületek jobb oldalt kissé lefelé hajlanak, tehát a folyadékszint a bal oldali szárban kissé emelkedik, a jobb oldalon süllyed.

1989-ben pedig egy, a mindennapi életből elesett problémával lepte meg a versenyzőket.

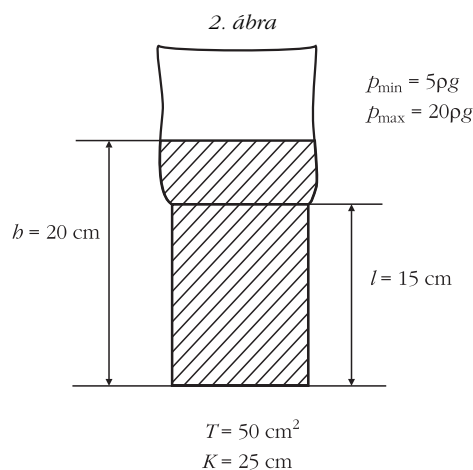
*Gergő gyakran segít a háztartásban. A zacskós tejet az 1. ábrán látható módon a zacskónál valamivel szűkebb keresztmetszetű, levágott tetejű és alul kilyukasztott műanyag flakonban szokták tárolni. Gergő megfigyelése szerint a szájával lefelé fordított flakonból a még felbontatlan zacskós tejet magától kiesik, viszont a tetejénél megfogott tejes zacskóról még akkor sem esik le a flakon, ha alulról egy másik zacskó tejet akasztunk rá. Mi lehet a magyarázat?*

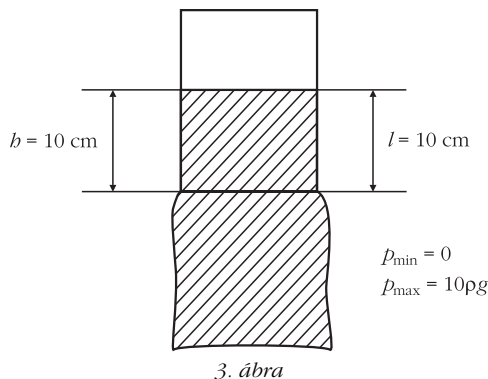


1. ábra

Megoldás. A flakont a súrlódási erő tartja meg. A súrlódási erő a flakon falára ható nyomóerővel arányos, ez a nyomóerő pedig a tej hidrosztatikai nyomásából származik. A súrlódási erő nagyságát becsléssel állapítjuk meg. Azt kell megmutatnunk, hogy a flakonra ható súrlódási erő az ábrán látható helyzetben 10 N-nál is nagyobb lehet, viszont a szájával lefelé fordított flakonban a tejeszacskóra 10 N-nál kisebb súrlódási erő hat.

Most egy becsléssel megmutatjuk, hogy ez teljesül. Az egyszerűség kedvéért mérjük a távolságot centiméterben (2. ábra). A tejeszacskó kerülete valamivel kisebb, mint 25 cm, ezért a flakonban a zacskó kissé meggyűrődik, így a tej egyenletesen nyomja a zacskót a flakon falához. A zacskóban a tej fölött levegő van, ennek nyomása megközelítőleg egyenlő a külső légnyomással. Esetleg még nagyobb is lehet, ha – miközben tartjuk – jól meg is szorítjuk a zacskót. Ezzel a nyomóerőt és így a súrlódási erőt is tovább növeljük. Most azonban ezt ne vegyük figyelembe; e nélkül is meg kell tartsa a flakont (a ráakasztott másik zacskó tejjel együtt) a súrlódási erő.





3. ábra

Mivel a hidrosztatikai nyomás lefelé lineárisan nő, átlagos értéke a 2. ábra alapján:

$$\bar{p} = \frac{p_{\min} + p_{\max}}{2} = 1,25 \text{ kPa.}$$

A flakon falának területe:

$$K \cdot l = 375 \text{ cm}^2 = 3,75 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2.$$

E kettő szorzatának  $\mu_0$ -szorososa adja meg a súrlódási erő maximális értékét. ( $\mu_0$  a tapadási súrlódási együttható, amelynek értéke legalább 0,3 és legfeljebb 0,6 a zacskó és a flakon fala között.) A legkisebb  $\mu_0$  értéket véve is:

$$F_{\text{súrl}} > 13 \text{ N,}$$

tehát a súrlódási erő valóban meg tudja tartani a mintegy 10 N súlyú másik zacskó tejet.

A feladat megoldása akkor teljes, ha azt is megmutatjuk, hogy a lefelé fordított flakonból magától kiesik a tejeszacskó, még a lehető legnagyobb  $\mu_0$  esetén is.

Tegyük fel, hogy a lefelé fordítás után a zacskó még nem mozdult el, csak a tej ömlött át a zacskó alsó részébe (3. ábra). A flakon falára ható hidrosztatikai nyomás átlagértéke most csak

$$\bar{p} = 0,5 \text{ kPa,}$$

és ez a kisebb nyomás ráadásul kisebb területen is hat a flakon falára:

$$K \cdot l = 250 \text{ cm}^2 = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2.$$

E két érték szorzatának  $\mu_0$ -szorososa még  $\mu_0 = 0,6$  esetén is csak 7,5 N, tehát

$$F_{\text{súrl}} < 8 \text{ N.}$$

Ezért a tejeszacskó kiesik a lefelé fordított flakonból.

*Megjegyzés.* A megoldáshoz tartozik  $\mu_0$  értékének becslése is. A példaképpen bemutatott gondolatmenetben a  $0,4 \leq \mu_0 \leq 0,6$  becslést alkalmaztunk, ez összhangban van a Középiskolai Fizikai Táblázatokban, illetve középiskolai és egyetemi tankönyvekben közölt adatokkal. Ugyanakkor, ha a tejeszacskó kívül zsíros,  $\mu_0$  jóval kisebb is lehet, s a zsíros tejeszacskó-

ról bizony lecsúszhat a flakon a ráakasztott másik liter tejjel együtt. Most azonban nem erről a tapasztalatról volt szó, nem ezt kellett megmagyarázni.

Látjuk, a fenti feladat megoldásához már némi számolásra, numerikus becslésre is szükség volt. 1992-ben viszont ismét elég volt „csupán” gondolkozni a problémán.

*Körülbelül 1 cm<sup>2</sup> keresztmetszetű, 80 cm hosszú, felül nyitott üvegcsövet színültig megtöltünk higanynyal. A cső felső végére ráhúzzuk és befőttesgumival a csőhöz szorítjuk egy teljesen összelappadt (levegőt nem tartalmazó) lufi száját. Ezután a csövet a levegőben tartva felfordítjuk. Mi fog történni? (Készítsen rajzot is!)*

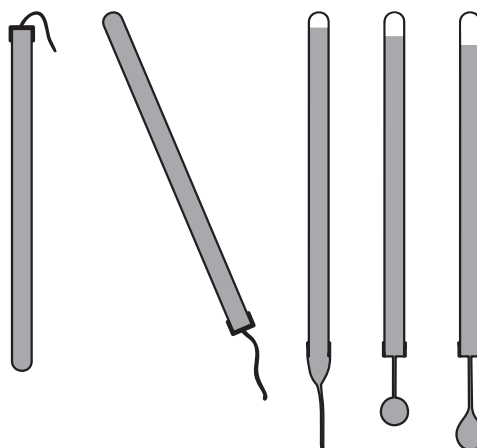
Megoldás. Feltételezhetjük, hogy amikor az összelappadt lufit ráhúzzuk az üvegcső szájára, a higany feletti részben nem lesz levegő, és később sem tud bejutni levegő a lufi belsejébe.

Fordítsuk meg a csövet! Függetlenül a helyzetben a cső – most már alul levő – szájánál a lufihártyára belülről 80 cm magas higanyoszlop nyomása, kívülről pedig a külső levegő nyomása hat. (Vegyük ez utóbbit 76 Hgcm-nek.) A belső, nagyobb nyomás kissé szétnyitja az összelappadt lufit, s a higany elindul lefelé.  $80 - 76 = 4 \text{ cm}^3$  higany lefut egészen a lufi aljára, és ekkor a folyamat leáll. A csőben marad 76 cm magas higanyoszlop, fölötte vákuum (a higanygőz nyomása elhanyagolható). Alul, a cső szájától kezdve a lufi újra összelappadt állapotban van, mert a külső légnyomás összenyomja. Legalul, az összelappadt lufiban lévő  $4 \text{ cm}^3$  higany kicsi, kidudorodó zacskóban gyűlik össze.

A folyamat legfontosabb pillanatait a 4. ábra sorozata szemlélteti („oldalnézetben”).

Ha túl gyorsan fordítjuk meg a csövet, esetleg a végén még meg is lökjük kissé,  $4 \text{ cm}^3$ -nél több higany is le tud folyni a lufi aljára. Ekkor a végállapotban a külső légnyomás kissé visszanyomná a lufit a cső szájánál a cső belseje felé. Ugyanakkor a lufit a higany lefelé húzza, kissé megnyújtja a gumit, s ez a hatás a cső szájánál is érvényesül. Mindezek azonban olyan kicsiny nyomáskülönbséget és többleterőt eredményeznek.

4. ábra



nyeznek, hogy a lufinak ebből származó alakváltozása szabad szemmel alig vehető észre, s a megoldást lényegesen nem módosítja.

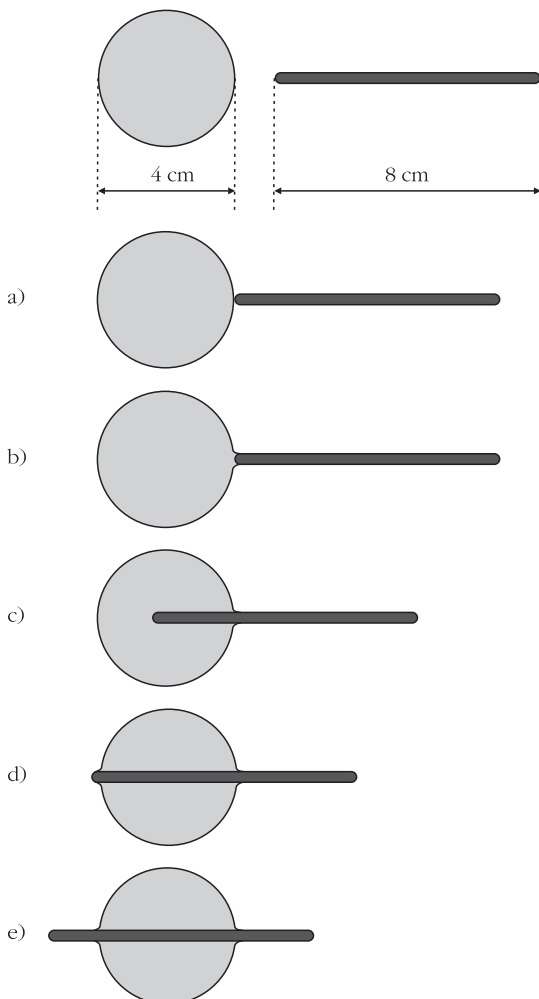
Károlyházy Frigyes figyelmét nem kerülte el az űrhajózás sem, és egy sajátos problémát vetett fel 2003-ban.

*Egy szabadon keringő űrhajó kabinjának belsejében mozdulatlanul lebeg egy körülbelül 4 cm átmérőjű vízgolyó és a közelében egy körülbelül 8 cm hosszúságú, vékony, kör keresztmetszetű, legömbölyített végű üvegpálca. A pálca egyik végét egészen finoman érintkezésbe hozzuk a „vízcseppel”. Vázolja fel, milyen alakot vesz fel a víz!*

Megoldás. A kiindulási helyzetben (5.a ábra) a vízgolyó közelében lebeg az üvegpálca.

A folyamat akkor kezdődik, amikor a pálca egyik végét egészen finoman érintkezésbe hozzuk a vízcseppel (5.b ábra). A víz nedvesíti az üveget, kissé „ráfolyik” a pálca legömbölyített végére (5.c ábra). Itt azonban a folyamat nem állhat le, mert az üvegpálcára ható erők eredője *nem nulla*. Igaz ugyan, hogy az  $R$  sugarú vízcsepp belsejében a nyomás egy kicsit nagyobb, mint a külső légnyomás ( $\Delta p = 2\alpha/R$ ), és ez  $r^2\pi\Delta p$  erővel tolná kifelé az  $r$  sugarú pálcát, de ennél sokkal nagyobb a pálcára rásimuló vízhártya által kifejtett  $2r\pi\alpha$

5. ábra



nagyságú húzóerő. A pálca tehát benyomul a vízcseppbe, egy közbülső helyzetet a 5.d ábrán látható.

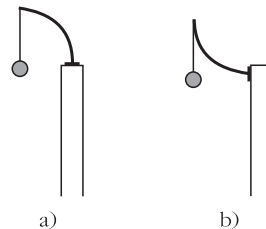
Az erőegyensúly ebben a helyzetben sem áll fenn, nincs ok, amiért a pálca megállna, egészen a 5.e ábrán látható állapotig. Most már a pálca elérte a vízcsepp bal oldali szélét, kissé túl is ment rajta, a vízfelszín itt kissé kinyomódik. Az erőegyensúly azonban csak akkor áll be, amikor a pálca bal oldali vége teljesen kibújik a vízcseppből, ekkor a pálca mindkét végét körülölelő víz felszíne ugyanolyan alakú (5.f ábra).

Meg kell gondolnunk még, hogy vajon a vízcsepp nem folyik-e szét a pálcán. A rendszer összenergiája a levegővel érintkező víz felületi energiájának és a vízzel érintkező üveg energiájának összegével egyenlő; ez a mennyiség igyekszik minél kisebb lenni. Tekintettel arra, hogy a pálca *vékony*, a üveg teljes felülete elhanyagolható a vízgolyó felületéhez képest. A rendszer egyensúlyát tehát a legkisebb vízfelszín követelménye határozza meg, ez pedig (adott térfogatú víz esetén) a gömb alaknál teljesül.

A végállapotban a vízgolyó majdnem pontosan gömb alakú, az üvegpálca ezen gömb egyik átmérője mentén helyezkedik el, és mindkét végét „kidugja” a vízből.

Egy év múlva szokatlan rugalmassági problémával állt elő, amelyet jellegzetesen „Károlyházy Frigyes módra” fogalmazott meg.

*Egy habókos lakberendező állófogast tervez, két változatban. Egy negyedkörív alakú, vékony, de erős, rugalmas fémszálat egyik végénél szilárdan hozzáerősít egy merev törzshöz, egyszer az a), másszor a b) elrendezésben (6. ábra). Meglepődve tapasztalja, hogy ha ugyanakkora terhet akaszt a fogásokra, a fémszálak végpontja nem ugyanannyival süllyed le a két esetben.*



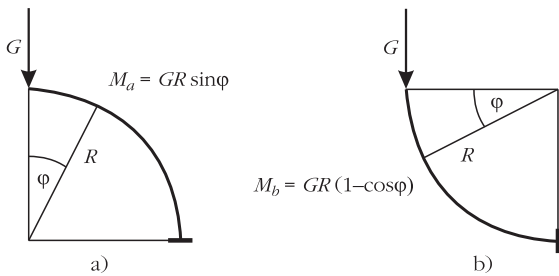
6. ábra

Okoskodjunk ki egyszerű megfontolásokkal, hogy melyik esetben nagyobb a végpont lesüllyedése!

Megoldás. Vegyük észre, hogy a külső erő hatására a negyedkörív alakú rugalmas fémszál *alakja* fog megváltozni, pontosabban az erő által kifejtett (ponttól pontra változó) forgatónyomaték okozza a szál alakjának megváltozását. A szál hosszának megváltozása (megnyúlása) elhanyagolható a szál alakjának megváltozása (lehajlása) mellett.

Célszerű lesz a két fémszál alakváltozását úgy összehasonlítani, hogy kölcsönösen egyértelműen megfeleltetjük egymásnak a két szál pontjait. A megfeleltetett pontokban fellépő deformációkat (elhajlásokat) hasonlítjuk össze, majd megvizsgáljuk, hogy ezek a deformációk milyen mértékben járulnak hozzá a végpontok lesüllyedéséhez.

Képzeljük – modellezzük – a rugalmas fémszálat nagyon kis szemekből álló láncnak, ahol az egyes (merev) láncszemeket piciny spirálrugók kapcsolják egymáshoz. A lánc (amelynek saját súlyát elhanyagoljuk) terheletlen állapotában pontosan negyedkört formál.



7. ábra

Írjuk fel, hogy mekkora forgatónyomatékokat gyakorol a teher függőleges irányú  $G$  súlya a fémszálnak  $\varphi$  szöggel jellemzett helyén az ottani „spirálrugóra” (7. ábra)! (Ezen rugó elfordulása nyomán kialakuló visszatérítő nyomaték fogja majd  $G$ -nek azon a helyen fellépő forgatónyomatékát kiegyenlíteni, kompenzálni.)

Amint az az ábráról is leolvasható, ugyanazon  $\varphi$  szöghöz tartozó pontokban az  $M$  forgatónyomaték az a) esetben sohasem lehet kisebb a b) esetben fellépőnél, mivel  $\sin\varphi \geq \cos\varphi$ . Az egyenlőség csak  $\varphi = 0$  és  $\varphi = \pi/2$  esetben (vagyis a szál végpontjainál) áll fenn, közben  $M_a$  mindig határozottan nagyobb, mint  $M_b$ .

Ebből már látszik, hogy a fémszál deformációja (görbültségének megváltozása) minden bizonnyal az a) esetben lesz nagyobb. Azt kell még megnéznünk, hogyan jelentkezik mindez a szál végpontjának lesüllyedésében. Sejtésünk az, hogy a nagyobb deformáció nagyobb lesüllyedést is eredményez.

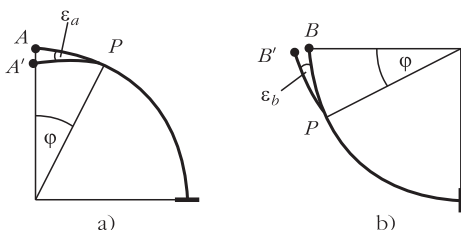
Vizsgáljuk meg, hogy ha csupán a  $\varphi$  szöggel megjelölt pontban jönne létre deformáció (ha csak az ottani kis spirálrugó csavarodna el), ez a végpont mekkora függőleges elmozdulását (lesüllyedését) eredményezné!

Az a) esetben a 8. ábrán látható  $\widehat{PA}$  ív elhajlása ( $\varepsilon_a$ ) az  $M_a$  forgatónyomatékkal, a b) esetben a  $\widehat{PB}$  ív ( $\varepsilon_b$ ) elhajlása az  $M_b$  forgatónyomatékkal arányos. Mondhatjuk, hogy az  $AA'$  szakasz hossza annyiszorosa a  $BB'$  szakasz hosszának, ahányszorosa az  $M_a$  nyomaték nagysága az  $M_b$  nagyságának.

Vegyük észre azt is, hogy az  $AA'$  irány közelebb áll a függőlegeshez, mint a  $BB'$  irány! Egyszerű geometriai megfontolásból következik, hogy a végpontok lesüllyedésének aránya

$$\frac{\Delta h_b}{\Delta h_a} = \frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_a} \frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\cos \frac{\varphi}{2}} = \frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_a} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}.$$

8. ábra



Másrészt

$$\frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_a} = \frac{M_b}{M_a} = \frac{1 - \cos\varphi}{\sin\varphi} = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2},$$

ezért

$$\frac{\Delta h_b}{\Delta h_a} = \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} \leq 1, \quad \text{ha } 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Beláttuk tehát, hogy a két fémszál egymásnak megfelelő pontjai közül (a végpontoktól eltekintve) mindig az a) esetbeli pontoknál fellépő deformáció ad nagyobb járulékot a szál végének lesüllyedéséhez. Mivel a teljes alakváltozás összetehető az egyes spirálrugók deformációiból származó alakváltozásokból, kimondhatjuk: az a) esetben nagyobb a szál végpontjának lesüllyedése.

*Megjegyzések.* 1. Energetikai megfontolásokkal és integrálszámítással numerikusan is meg tudjuk határozni a kétféle lesüllyedés arányát, jöllehet a versenyen ez nem volt feladat.

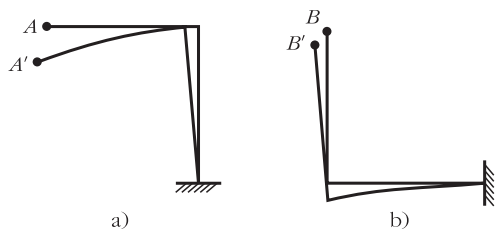
Ha a fogas végére – óvatosan növelve a terhelést – maximálisan  $G$  nagyságú erőt fejtünk ki, és ennek hatására a végpont  $\Delta h$ -val mélyebbre kerül, akkor összesen

$$W = \frac{1}{2} G \Delta h$$

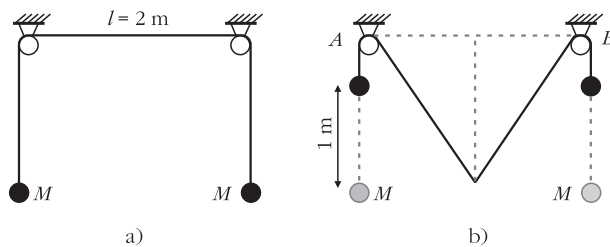
munkát végzünk. (Az 1/2-es faktor onnan származik, hogy az erő átlagértéke a maximális érték fele.) Ez a munkavégzés a kicsit meghajlított szálban tárolt rugalmas energiával egyenlő, ami a szál egyes darabkáiban tárolt energiák összegeként számítható. Egy-egy darabka rugalmas energiája – a megfeszített egyenes rugó energiaképletének analógiájára – a darabka hosszával és a végein ható forgatónyomaték négyzetével arányos. Ezek szerint a kétféle ruhafogas energiaviszonyait összevetve:

$$\begin{aligned} \frac{W_a}{W_b} &= \frac{\Delta h_a}{\Delta h_b} = \frac{\int M_a^2(\varphi) ds}{\int M_b^2(\varphi) ds} = \frac{\int_0^{\pi/2} \sin^2(\varphi) d\varphi}{\int_0^{\pi/2} (1 - \cos\varphi)^2 d\varphi} = \\ &= \frac{\frac{1}{2} \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2} - 2 + \frac{1}{2} \frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{3\pi - 8} \approx 2,2. \end{aligned}$$

2. Természetesen más úton is eljuthatunk a helyes válaszhoz. Minden egyszerű megfontolás során a negyedkör alakú rugalmas fémszálat valamilyen egyszerű módon modellezzük. Az egymásnak megfelelő ívek, szakaszok deformációit hasonlítjuk össze, s ebből következtetünk a végpont lesüllyedésére. Tekinthetjük az eredeti negyedkörívek helyett akár a 9. ábrán látható derékszögeket is! Ebben a közelítésben a teljes alakváltozás két tag összege-



9. ábra



10. ábra

ként, a (kezdetben) vízszintes, illetve függőleges szá-  
rak deformációjából tehető össze.

A vízszintes szakaszok lehajlása, ha a függőleges  
szárok nem tudnának elmozdulni, azonos terhelés  
esetén ugyanakkora lenne; eddig tehát még egyfor-  
mán viselkedik a két ruhafogas. A függőleges szaka-  
szak deformációjának hatása a végpont lesüllyedésé-  
re azonban a két változatnál már különböző lesz. Az  
a) esetben a derékszög függőleges szára is elgörbül  
(hiszen a vízszintes szár a sarokpontnál forgatónyo-  
matéket fejt ki rá), s ez az  $A'$  végpont további függő-  
leges elmozdulását eredményezi. A b) esetben viszont  
a függőleges szár alakja gyakorlatilag változatlan ma-  
rad, mindössze elfordul (a vízszintes szár lehajlása  
miatt); ez az elfordulás azonban a  $B$  végpont majd-  
nem pontosan vízszintes irányú elmozdulását hozza  
létre, tehát nem járul hozzá annak függőleges irányú  
lesüllyedéséhez.

Látható, hogy ebben a durva modellben az a) eset-  
beli végpont lesüllyedése körülbelül kétszerese a b)  
esetbelinek, és sejtethető, hogy az eredeti, negyedkörív  
alakú szárlakhoz visszatérve a lehajlások arányának  
számértéke ugyan más lesz, de az egyenlőtlenség  
iránya nem változik meg.

Egyedi és igazán Károlyházyra jellemző ennél a  
feladatnál a probléma felvetése; a fizikai mondanivaló  
elbújtatása egy banális, hétköznapi, és éppen ezért  
izgató, azonnali választ követelő kérdés mögé. A 2.  
kiegészítés ad példát egy kvalitatív, mégis elfogadha-  
tó válaszra.

Zárjuk ezt a visszatekintést azzal a 2005-ben feladott  
példával, amellyel Károlyházy Frigyes azt mutatta  
meg, hogy lehet még a sokat szidott állócsiga-mozgó-  
csiga témakörben is új és érdekes problémát felvetni.  
A megoldás itt se lesz könnyű, fel kell gyúrni az inguj-  
jat hozzá.

Két rögzített, egymástól  $l = 2 \text{ m}$  távolságra levő  
csigán erős, de nem nyúlékony fonalat vezetünk át,  
és a végeire egy-egy  $M = 1 \text{ kg}$  tömegű testet erősítünk  
a 10.a ábra szerint. (A fonál néhányszor  $10 \text{ N}$  terhelést bír  
ki szakadás nélkül. A csigák  
és a fonál tömege elhanyagol-  
ható.) Ha ujjunkkal lehúzzuk  
a fonál közepét úgy, hogy a  
két test 1-1 méterrel megemel-  
kedjék (10.b ábra), majd  
elengedjük, a fonál elpattan,  
amikor A és B között „kiegye-  
nesedik”. Ha azonban úgy

engedjük el, hogy előbb egy ugyancsak  $1 \text{ kg}$  tömegű  
testet erősítünk a fonál közepéhez, akkor a fonál a  
továbbiakban nem szakad el.

a) Magyarázzuk meg a jelenséget!

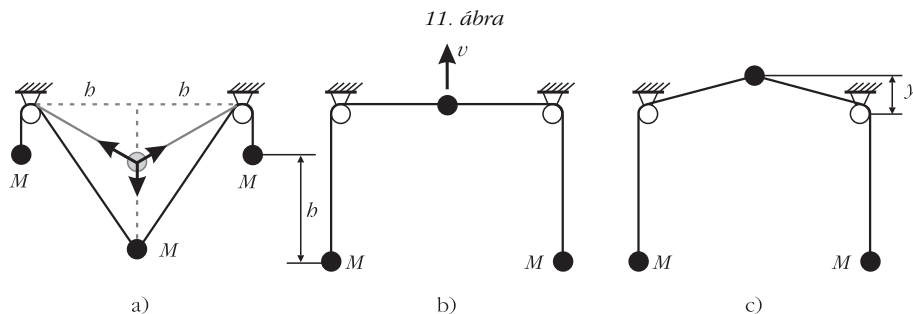
b) Mekkora erő feszíti a fonalat abban a pillanat-  
ban, amikor kiegyenesedik?

Megoldás. a) Azt kell észrevenni, hogy amikor a  
fonal kiegyenesedik, abban a pillanatban a fonalat  
két oldalról húzó testek már állnak. Rendkívül rövid  
idő alatt kell megállniuk, lefékeződniük arról a  $v =$   
 $(2gb)^{1/2} \approx 16 \text{ km/h}$  sebességről, amire addigi moz-  
gásuk (szabadesés) során felgyorsultak. (Itt és a to-  
vábbiakban  $b = \frac{1}{2}l = 1 \text{ m}$ .) Ha a fékezést „pillanat-  
szerűnek” gondolnánk, vagyis a fékezés ideje  $\Delta t \rightarrow 0$   
lenne, akkor a testek gyorsulása és a fonalat feszítő  
 $F$  erő is minden határon túl nőne, ezért elpattanna a  
fonal.

A valóságban természetesen még a „nem nyúlé-  
kony” fonal sem abszolút nyújthatatlan, hanem egy  
kicsit deformálható. Ehhez az alakváltozáshoz egy  
kicsiny, de véges  $\Delta t$  idő szükséges, így a testek gyor-  
sulása és ezzel együtt a fonalat feszítő erő, ha nem is  
végtelenné, de nagyon nagygyá válik. Mivel a fonal  
nem bír ki nagy erőt, elszakad.

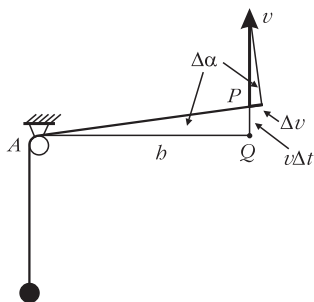
b) Ábrázoljuk a folyamat három jellemző állapotát!  
A 11.a ábrán a kezdőállapotot tüntettük fel, megje-  
lölve közben a középső test egyensúlyi helyzetét is,  
amelyen maximális sebességgel átlendül. A 11.b áb-  
rán a fonal középső része vízszintes, a középső test  
azonban még emelkedik fölfelé. A 11.c ábra azt a  
pillanatot mutatja, amikor a középső test éppen meg-  
áll. Ekkor ismét állnak a szélső testek is. (Persze el-  
képzelhető, hogy a középső test fel se emelkedik a  
11.b ábrán látható helyzetig, ezt a lehetőséget majd  
számítással kell ellenőriznünk.)

A b) kérdés megfogalmazása arra utal, hogy a  
fonal ki fog egyenesedni, tehát a középső test eljut a  
11.b ábrán jelzett állapotba. Lesz-e ott sebessége?  
Ezt érdemes kiszámítanunk. Írjuk fel a munkatételt a

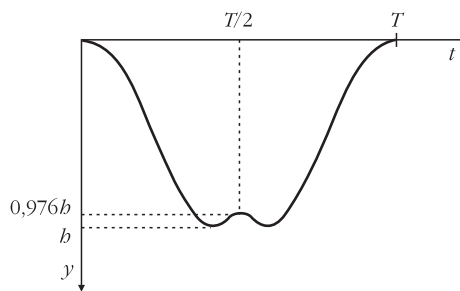


11. ábra





12. ábra



13. ábra

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v^2}{b}$$

11.a helyzettől a 11.b-ig jelzett folyamatra! A szélső testek  $b$  utat süllyednek, a középső  $b\sqrt{3}$  utat emelkedik, ezért

$$Mg b - Mg b\sqrt{3} + Mg b = \frac{1}{2} M v^2.$$

Felhasználtuk, hogy a 11.b helyzetben a szélső testek egy pillanatra megállnak, ezért csak a középső testnek lehet ekkor mozgási energiája. A felírt egyenletből a középső test sebessége:

$$v = \sqrt{2g(2 - \sqrt{3})b} > 0.$$

Tehát a középső test még valóban emelkedik. Meddig emelkedik? Ezt is kiszámíthatjuk, ha a 11.b és a 11.c állapotot energetikailag összehasonlítjuk:

$$2Mg(\sqrt{b^2 + y^2} - b) + Mgy = \frac{1}{2} M v^2.$$

Ez  $y$ -ra nézve másodfokú egyenletté alakítható, amelynek megoldásai:  $y_1 = -1,73b$  és  $y_2 = 0,22b$ . (Az első gyök nyilván a kezdőállapotot adja meg, a 11.c állapotnak  $y_2$  felel meg.)

Hogy válaszolni tudjunk a feladat b) kérdésére, vizsgáljuk meg tüzetesen a 11.b ábrán látható helyzetet! Ebben a pillanatban a fonalat feszítő erő gyorsítja az éppen álló, de felfelé induló szélső testeket. Mekkora ez a gyorsulás? Tegyük fel, hogy a bal oldali csigától a középső testhez vezető  $AP$  fonál  $\Delta t$  idő alatt már egy kicsiny  $\Delta\alpha$  szöggel túllendült a vízszintes helyzeten (12. ábra). Jelöljük a szélső testek sebességét  $\Delta v$ -vel! Ez a sebesség (a fonal nyújthatatlansága miatt) megegyezik a  $P$  pontban levő középső test sebességének  $AP$  irányú vetületével, vagyis

$$\frac{\Delta v}{v} = \sin\Delta\alpha \approx \Delta\alpha.$$

Másrészt a  $PQA$  derékszögű háromszögből

$$\frac{v\Delta t}{b} = \text{tg}\Delta\alpha \approx \Delta\alpha.$$

A fenti két egyenlet összevetéséből

$$\Delta v = \frac{v^2}{b} \Delta t,$$

vagyis a szélső testek gyorsulására

adódik.

Ugyanehhez a képlethez úgy is eljuthatunk, ha felírjuk, hogy a vízszinteshez közeli  $AP$  szakasz hossza időben hogyan változik. Mivel  $PQ \approx vt$  (ahol  $t$  a 11.b ábrán látható állapottól mért idő), Pitagorasztétele szerint

$$AP = \sqrt{b^2 + v^2 t^2} = b \sqrt{1 + \frac{v^2 t^2}{b^2}} \approx b + \frac{v^2 t^2}{2b} = b + \frac{a}{2} t^2.$$

Ebből leolvashatjuk, hogy az  $AP$  szakasz hossza  $a = v^2/b$  gyorsulással növekszik, és a fonal nyújthatatlansága miatt a bal oldali test is ugyanekkora nagyságú, függőlegesen felfelé irányuló gyorsulással kell, hogy rendelkezzen.

A fonal által kifejtett erő a szélső testek mozgásegyenletéből kapható meg:

$$F_{\text{fonal}} - Mg = M \frac{v^2}{b},$$

azaz

$$F_{\text{fonal}} = Mg \left[ 1 + 2(2 - \sqrt{3}) \right] = 1,536 Mg \approx 15 \text{ N}.$$

Így már érthető, miért nem szakad el ebben a helyzetben a „néhányszor 10 N terhelést kibíró” fonal.

Érdeemes felfigyelni arra, hogy a szélső testek kétszer is emelkednek és kétszer is süllyednek egy-egy periódus során, hiszen a 11. ábrán feltüntetett mindhárom állapotban éppen állnak. Süllyedésük az idő függvényében nagyjából a 13. ábrán vázolt módon történik.

Radnai Gyula

Irodalom

1. Vermes Miklós: *Az Eötvös-versenyek feladatai I. 1959–1988.* Typotex, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1997, 163 o.
2. Radnai Gyula: *Az Eötvös-versenyek feladatai II. 1989–1997.* Typotex, Budapest, 1998, 131 o., <http://www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tkt/eotvos-versenyek/adatok.html>
3. <http://www.kfki.hu/education/verseny/eotvosverseny/report.html>

# AZ ENTRÓPIAPROBLÉMA – II. RÉSZ

Oláh Károly  
BME, Fizikai Kémia Tanszék

## A megoldás

Az első részben<sup>1</sup> a százötven évvel ezelőtt született és azóta változatlan entrópiadefiníció megértési problémáival foglalkoztunk. Emlékeztetőül a szóbanforgó energiamérleg-egyenlet:

$$dU = T dS_{cl} - P dV + \mu dN. \quad (1)$$

ahol  $U$  a belső energia,  $T$  az abszolút hőmérséklet,  $P$  a nyomás,  $V$  a térfogat,  $N$  az anyagmennyiség, és a két új mennyiség:  $S_{cl}$  a clausiusi entrópia (energia/hőmérséklet) és  $\mu$  a kémiai potenciál. Az így definiált entrópia nehezen értelmezhető kettős identitású: része az energiamérlegnek, a hőhatás képviselője, és ugyanez ugyanakkor egy struktúra képviselője, mértéke is. Emellett sajátos tulajdonsága: ha nincs egyensúly, természetes „törekvése” van: növekszik, az egyensúlyban maximális. Ez utóbbi viselkedés köré egész mitológia született.

A fenti alapegyenletnek azonban több egyenértékű variánsa lehetséges, más-más értelmezéssel. Így például,

$$\frac{dU}{RT} + dV \frac{P}{RT} - d\left(\frac{S_{cl}}{R}\right) = dN \frac{\mu}{RT}. \quad (2)$$

A dimenziómentes entrópiaváltozat:

$$S = \frac{S_{cl}}{R}. \quad (3)$$

Térjünk vissza *Harvey S. Leff* 1999-ben tett javaslataira.

Következtetéseit és javaslatait hat pontban sorolja fel. A négy legfontosabb:

1. A (clausiusi) entrópia dimenziója a hőmérséklet Kelvin-skálájához van kötve.
2. Dimenziómentes entrópia definiálható, ha  $T$  hőmérsékletet energiaként definiáljuk (*tempergy*).
3. A molekuláris dimenziómentes entrópia, amelynek számértéke 0 és ~80 között van, megkönnyíti az

összehasonlítást különböző anyagok között és megbecsüli az elérhető állapotok számát.

4. Ha a dimenziómentes entrópiát és a tempergiát használjuk a  $k_B$  Boltzmann-állandó fölöslegessé válik.

Ebben *Leff* állást foglal *Boltzmann* entrópiadefiníciója mellett és javasolja a clausiusi entrópia helyett a dimenziómentes boltzmanni entrópia használatát. (Ez írás szerzője bevallja, *Leff* álláspontját illetően véleménye szubjektív).

Az „entrópiaprobléma” megoldása meglepően egyszerű.

Legyen az entrópia definícióegyenlete az energiamérleg helyett annak a *dimenziómentes* változata. Ez az  $S$  entrópia az *eloszlások*, a struktúra elemeinek gyűjtőhelye. Minden elemi  $E_i$  energiárésznek van  $x_i$  részaránya. A makroszkopikus anyag entrópiája szintén ilyen részek részeinek, a „ $\ln x_i$ ” entrópielemeknek átlaga vagy összege. Boltzmann-nál az  $E_i$  energiájú részecskék *részaránya*  $x_i$ . Ez a kitevőben  $\ln x_i$ , majd  $x_i$  részarányokkal szorozva a  $\ln x_i$  mennyiségek is összegződnek. Ha a részletek egyformák ( $x_i = 1$ ), az entrópia zérus.

Az „anyag” potenciálja (az  $\Omega$  állapotösszeg logaritmus):

$$\ln \Omega = \frac{E_i}{RT} + \ln x_i. \quad (4)$$

(Energia – Hőmérséklet – Eloszlás)

És összegük, a teljes rendszer: *Gibbs* energiamérleget (*T* helyett)  $RT$ -vel osztottuk

$$\frac{\mu}{RT} = \frac{H}{RT} - S = \frac{U + P V}{RT} - (S^0 - \ln x). \quad (5)$$

(Energia – Hőmérséklet – Struktúra) Ezzel a változókat szeparáltuk!

- a. A  $H$  entalpia az energiákat képviseli.
- b. Az  $RT$  hőmérséklet az energia és az entrópia (a struktúra) kapcsolata.
- c. Az  $S$  entrópia a struktúrát, az összetételrendszert képviseli.
- d. A  $\mu/RT$  a kettő együttese, mindkét hatást tartalmazza.

Itt már világosan értelmezhető mennyiségek vannak, problémás kapcsolatok nélkül.

Az entrópia felépítése:

$$S = \sum_i x_i \ln x_i,$$

$$S_i = -\ln x_i,$$

$$x_i$$

És semmi más!

A *Fizikai Szemle* szerkesztőbizottsága az 1972-ben meghirdetett VÉLEMÉNYEK sorozatát az olvasók kérésére tovább folytatja ez évben is. A szerkesztőbizottság állásfoglalása alapján „a *Fizikai Szemle* feladatául vállalja el, hogy teret nyit a fizikai kutatásra és fizika oktatására vonatkozó véleményeknek, ha azok értékes gondolatokat tartalmaznak és építő szándékúak, függetlenül attól, hogy egyeznek-e a lap szerkesztőinek nézetével, vagy sem”. Ennek szellemében várjuk továbbra is olvasóink, várjuk a magyar fizikusok leveleit.

<sup>1</sup> *Fizikai Szemle* 62/7–8(2012) 243–248.

Nincs már szó hőről, információról, valószínűségről, irreverzibilitásról, rendezetlenségről, Univerzumról, tudjuk már, mik az elemei, van-e entrópia, ha nincs hőmérséklet, van-e entrópiaáram és mi a helyzet a produkcióval. És azt is tudjuk, miért és hogyan nő (Lásd: Függelék). Ha az arányok exponenciálisak, az entrópia maximális (de nem korlátlan). Ahol részek és részarányok vannak, ott *mindig értelmezhető* entrópia. Tehát nem csak „termikus” entrópia lehetséges. (Ennek illusztrálására Landsberg mutat be könyvében (1960) [1] egy nyelvészeti entrópiát, különböző nyelvek szavainak szótagszám-statisztikáját). Tág értelemben ebbe tartozik az elegy kémiai összetétele, a kémiai tömeghatástört és így tovább. Ezek már nélkülöznek minden misztikát. A kémiai potenciál kérdésköre külön történet lehetne.

Addig is:  
– Felejtjük el a clausiusi (energia/hőmérséklet) entrópiát!

- Felejtjük el a „redukált” energiákat!
  - Felejtjük el a „hőt”!
  - Felejtjük el a Boltzmann-állandót!
  - A hőmérsékletet az  $RT$  (a „tempergia”) képviselje!
- Sem az  $R$  gázállandót, sem a  $T$  hőmérsékletet ne használjuk más vonatkozásban.

Összefoglalva:

Az eredeti (Clausius, majd Planck) energia/hőmérséklet jellegű „hőhatás-entrópia” rejtélyes és „problémás” mennyiség. Másfél évszázada jelent problémát ezen entrópia megértése, megértetése, értelmezése. Az *AJP* szerzői a közelmúltban erre keresték a megoldást.

Gibbs fundamentális egyenletének a dimenziómentes változata az eredetinel egyszerűbb összefüggésrendszert ad meg. Ami történt, mindössze osztás az  $RT$  mennyiséggel. Az energia és a struktúra jellemzői szétváltak, a (duális) clausiusi entrópia helyét a boltzmanni  $H$ -függvény foglalta el (foglalta vissza). A dimenziómentes, „struktúraentrópia” már egyszerű, érthető, szemléletes.

A termodinamika oktatása ily módon megszabadul minden értelmezési nehézségtől. Jelentős lehet a megkönnyebbülés. És gondolkodni lehet eddig elhanyagolt kérdések megoldásán.

A hőmérséklet kérdése (Leff) felhívja a figyelmet a hőmérséklet és a gázállandó használatának problémáira. A hőmérséklet-probléma egy általánosabb problémakörre, a szorzatok kérdésére irányítja a figyelmet. Matematikailag megengedett szorzások, osztások nem mindig problémamentesek. És érdemes elgondolkodni a fizikai mennyiségek (idő, sebesség stb.) „alfajain”, értelmes és értelmetlen kapcsolataik felülvizsgálatán is.

Ha mindezt végiggondoljuk, meglep a termodinamikai összefüggésrendszer hihetetlen egyszerűsödése. Várható, hogy e javaslat hatása általánosan érvényesülni fog. Szemlélet, szóhasználatok, értelmezések sora változik vagy szűnik meg.

A tájékoztatás, ezen javaslatok ismertetése nem halogatható. Remélhető, hogy az olvasók közül sokan levonják a következtetéseiket.

## Egy kis-katé

Sok kérdésre már könnyen adhatjuk meg a választ.

- *Mi az entrópia?*
- Ez:  $\sum_i x_i \ln x_i$ .
- *Reális fizikai mennyiség az entrópia?*
- Igen.
- *Van entrópiája egy testnek, ha az nincs egyensúlyban?*
- Igen.
- *Van entrópiája egy olyan testnek, aminek nincs hőmérséklete?*
- Van.
- *Mindig minden testnek van entrópiája, vagy van, aminek nincs?*
- Mindig van.
- *Ha a rendszer csupa egyforma elemekből áll, akkor is van entrópia?*
- Igen. Ekkor számértéke zérus.
- *Lehet entrópiaváltozás, ha nincs hőfelvétel?*
- Igen.
- *Beszélhetünk entrópiaváltozásról, ha a hőfelvétel „nem reverzibilis”?*
- Igen.
- *Van entrópiája negatív hőmérsékletű anyagnak és az negatív vagy pozitív?*
- Van és pozitív.
- *Van egyértelmű kapcsolat az energia és az entrópia között?*
- Csak akkor, ha van hőmérséklet, tehát: csak az egyensúlyban.
- *Miért nő az entrópia?*
- Mert  $\ln x$  monoton függvénye  $x$ -nek és mert ilyen a dinamika.
- *A növekedés az entrópia természetes „törekvése”?*
- Nem tehet mást.
- *Meddig nőhet?*
- Véges számú elem esetében véges nagyságú.
- *Valóban a legrendezetlenebb állapotban a legnagyobb az entrópia?*
- Értelmetlen kérdés. Az egyensúlyban jelentős a rendezettség.
- *Minden fajta entrópiára jellemző a növekedési tendencia?*
- Csak ahol ilyen a dinamika, például az energiastruktúrájánál.
- *Az entrópia a második főtétel aktív résztvevője?*
- Csak „írnoka”.
- *Mértéke az entrópia az irreverzibilitásnak?*
- Nem.
- *Van aktív szerepe az entrópiának a hő  $\rightarrow$  munka átalakításánál?*
- Nincs. A változásoknak csak passzív elszenvedője.
- *A természetes irány („idő-nyíl”) forrása az entrópia?*
- A végső forrás a dinamika. Ez okozza az entrópia változását is. És sok mást.
- *Az entrópia a valószínűségnek vagy a valóság-nak mértéke?*

- Mindig csak a valóságnak.
- Van entrópiaáram?
- Nincs. Ahogyan nincs koncentrációáram, hőmérsékletáram sem. Az irreverzibilis termodinamika „entrópiaárama” nem az entrópia árama.
- Világmindenség: van entrópiája?
- Ha vannak részei és azoknak vannak részarányai, akkor igen.
- Hőbalál: számíthatunk rá?
- Nem kell tartanunk tőle.
- Feketelyuk: itt is az entrópia „működik”?
- Nem minden mögött entrópia van, ami növekszik (például, a fák).
- Mindenféle eloszlás definiálhat entrópiát?
- Igen, például nyelvtani statisztika is, de ez már tágabb értelem.
- Információs entrópia. Függ az entrópia attól, hogy mennyit tudok róla?
- Nem minden logaritmusfüggvény entrópia.
- Mértéke-e az entrópia a megvalósulható lehetőségek számának?
- Lehet, ha ez a szám a részarányban valósul meg.

## Függelék

Ha nincs egyensúly, a dinamika egyértelmű változások forrása. Formálódik egy szabályos struktúra, közös hőmérséklet, nő az entrópia. A lehető legegyszerűbb modellen figyelhetjük meg a jelenség eredetét. Legyen három (rögzített) ekvidisztans energiaszint ( $RT$  egységekben):

$$E_1 = 0,$$

$$E_2 = E,$$

$$E_3 = 2E.$$

Legyen a (rögzített) elem- (részecske-) szám:

$$N = N_1 + N_2 + N_3 = 333.$$

Legyen az összenergia:

$$N_1 E_1 + N_2 E_2 + N_3 E_3 = 36E.$$

(Rendszerünk tehát zárt térfogatra, anyagra és energiára). Így minden lehetséges eloszlás lineáris sorba rendezhető,  $N_3$  értéke szerint.

a. A tömeghatás törvény

Az energiacsere-folyamat:

$$A_1 + A_3 \rightleftharpoons 2 A_2.$$

A sebességi egyenlet:

$$W = \vec{k} N_1 N_3 - \overleftarrow{k} N_2^2,$$

$$\vec{W} = -\frac{dN_1}{dt} = -\frac{dN_3}{dt} = 2 \frac{dN_2}{dt} = -\overleftarrow{W}.$$

b. A Mikroszkopikus reverzibilitás:

$$\vec{k} = k = \overleftarrow{k}.$$

c. A sebességi állandó pozitív:  $k > 0$ .

d. A Részletes egyensúly elve:

$$N_{1,e} N_{3,e} = N_{2,e}^2.$$

(Egyensúlyban az ellentétes folyamatsebességek egyenlővé válnak). Legyen

$$X = \frac{N_1}{\sum N}, \quad Y = \frac{N_2}{\sum N}, \quad Z = \frac{N_3}{\sum N}.$$

A  $W$  nettó folyamatsebesség a különbség:

$$\frac{W}{k N^2} = XZ - Y^2.$$

A (negatív) entrópia (a  $H_B$ -függvény):

$$-S = X \ln X + Y \ln Y + Z \ln Z.$$

Ha egy sorozat összetételt kiszámolunk  $0 < Z < 7$  tartományban, akkor a következőket figyelhetjük meg:

$N_1$	$N_2$	$N_3$		$-X \ln X$	$-Y \ln Y$	$-Z \ln Z$	$= S$
297	36	0	↓	0,1020	+0,2405	+0	= 0,3426
298	34	1	↓	0,0994	+0,2330	+0,0174	= 0,3498
299	32	2	↓	0,0970	+0,2251	+0,0307	= 0,3525
300	30	3		0,0940	+0,2168	+0,0424	= 0,3532
301	28	4	↑	0,0913	+0,2082	+0,0531	= 0,3526
302	26	5	↑	0,0886	+0,1991	+0,0630	= 0,3507
303	24	6	↑	0,0859	+0,1895	+0,0724	= 0,3478
304	22	7	↑	0,0832	+0,1795	+0,0812	= 0,3439

$X \ln X$  elemi entrópiák monoton csökkennek, ezek (nyilak) az egyensúly érték (0,0940) fölötti értékeknél csökkennek, az egyensúly érték (0,0940) alatti értékeknél nőnek,

$Y \ln Y$  elemi entrópiák monoton csökkennek, ezek (nyilak) az egyensúlyi érték (0,2168) fölötti értékeknél csökkennek, az egyensúlyi érték (0,2168) alatti értékeknél nőnek,

$Z \ln Z$  elemi entrópiák monoton nőnek, ezek (nyilak) az egyensúly érték (0,0424) alatti értékeknél nőnek, az egyensúly érték (0,0424) fölötti értékeknél csökkennek.

Az egyik ilyen, a másik olyan irányban változik. Nem látható egy irány.

Irodalom

1. P. T. Landsberg: *Thermodynamics with Quantum-Statistical Illustrations*. Interscience-Wiley, 1960, p. 236.

## AZ AKADÉMIAI ÉLET HÍREI

### A természettudományok népszerűsítését szorgalmazta a hazánkba érkezett Nobel-díjas tudós

Európai körútjának állomásaként hazánkba érkezett *Roy J. Glauber*, Nobel-díjas fizikus, aki látogatásával a tudományos kutatások társadalmi fontosságát is hangsúlyozta. A magyar tudósokkal folytatott együttműködése során segíteni kívánja az Európai Nukleáris Kutatási Szervezet (CERN) Nagy Hadronütköztető (LHC) gyorsítójánál működő TOTEM-kísérlet méréseinek értelmezésén alapuló kutatómunkát.

Roy J. Glauber hosszú ideje közreműködik a CERN projektjeiben, jelenleg az LHC-ben proton-proton ütközéseket vizsgáló hét berendezés egyikében, a TOTEM-kísérletben részt vevő magyar tudósokkal dolgozik együtt. A kísérlet célja a nagy energián történő proton-proton ütközések megfigyelése, valamint a részecskék előreszórási szögének mérése. A professzor szemináriumot tartott az MTA Wigner Fizikai Kutatóközpontban, és találkozott a magyar PHENIX és TOTEM kutatócsoportok tagjaival, meghallgatta a fiatal kutatók beszámolóit.

Glauber professzort magyarországi látogatása során fogadta *Szabó Gábor* fizikus, akadémikus, a Szegedi Egyetem rektora, a Magyar Innovációs Szövetség ügyvezető igazgatója, aki tájékoztatást adott az Európai Lézeres Infrastruktúra beruházás szegedi projektjének jelenlegi helyzetéről.

Roy Glauber érdeklődése a fizika iránt gyermekkorára tehető: 10 éves lehetett, amikor technikai eszközök építésébe fogott, amelyekkel különféle kísérleteket végzett. Saját rádiót, távirót és távcsövet épített, utóbbival díjat is nyert egy diákok számára meghirdetett helyi tudományos kiállításon. 18 éves korában felkérték, hogy vegyen részt a Manhattan-tervben. „Soha nem gondoltam volna, hogy elméleti területen fogok majd dolgozni” – ismerte el, bár később éppen az optikai koherencia kvantumelméletének területén végzett munkájáért jutalmazták Nobel-díjjal. „A valódi probléma az volt, hogy felismerjük, mi is tulajdonképpen a fény, és ho-

gyan magyarázható kvantumelméleti megközelítésben. Először megtanultam, hogy a fény hullámtermészetű, de idővel arra is rájöttem, hogy részecsketulajdonságokkal is bír. Ezért viselkedése csak a kvantumelmélet segítségével írható le helyesen. A fény kis energiacsomagokból áll, amelyek bizonyos körülmények között részecskéként, más körülmények között pedig hullámként viselkednek: ezek a fénykvantumok, azaz a fotonok. A kvantumelmélet kidolgozói kezdetben csupán olyan rendszereket vizsgáltak, amelyekben mindössze néhány fényrészecske van jelen, az optikai vizsgálatokhoz azonban az igen sok fényrészecskét tartalmazó fénysugarak pontos elméleti leírására volt szükség. Ez nagyon szövevényes matematikai problémákhoz vezetett, és olyan területet nyitott meg, amelynek tanulmányozása ma is jelentős erővel folytatódik” – magyarázta Glauber professzor az mta.hu-nak adott interjújában.

A Nobel-díjas tudós a jelenleg legérdekesebbnek ítélte kutatási eredményekről is beszámolt. Az amerikai BNL RHIC gyorsító PHENIX-kísérletében a relativisztikus nehézion-ütközések során előállított 4-5 terakelvines hőmérsékletekről elmondta: „Különleges jelenségek után kutatni lebilincselő tevékenység. Igyekszünk megismerni a világunkat egyben tartó, alapvető szabályokat. Teljesen nyilvánvaló kapcsolat áll fenn a nagy energiák és a kis távolságok között. A nagy energiák vizsgálata révén a rendkívül kis távolságokon, közvetve a proton átmérőjénél ezerszer kisebb távolságon belül végbemenő folyamatok vizsgálatára is módunk nyílik. Habár e folyamatokat nem értjük teljes egészében, ismereteink folyamatosan gyarapodnak. A hétköznapi tapasztalatainktól távol eső, különleges állapotokat azonban csak különlegesen szélsőséges körülmények megteremtésével tudjuk tanulmányozni.”

A professzor megosztotta az LHC-ben a közelmúltban felfedezett Higgs-bozonszerű részecskékkel kap-



Roy J. Glauber a tudás fáját ülteti, segít Csörgő Tamás.

csolatos véleményét is: „Az elmúlt negyven évben sok találgatás látott napvilágot a részecske létezését illetően. Senki nem tudott választ adni a tömegét illető kérdésre, amelyet mind ez ideig rejtély övez. Részecskék ütköztetésekor rengeteg újabb részecske keletkezik, és komoly fejtörést okoz különbséget tenni közöttük. Ahhoz tudnám hasonlítani, mint amikor egy homokdűnében keresünk egyetlen arany szemcsét. Hogyan látnánk hozzá e részecske megkereséséhez? Ebben a kísérletben ilyen statisztikai jellegű nehézségbe botlottunk. Most azonban a kutatók egy valóban ígéretes jelöltre bukkantak, amely legalább egy, a Higgs-részecskétől elvárt tulajdonságot felmutat. További kutatás tárgyát képezi annak megállapítása, hogy a részecske rendelkezik-e a kutatók által előrevetített egyéb jellemzőkkel, és vajon ez-e az a részecske, amelyet kerestünk. Könnyen meglehet, hogy egy másikra bukkantak.”

A 87 éves professzor továbbra is aktív részt vállal számos, a fizikusok és a közvélemény érdeklődésére számot tartó projektben. Az mta.hu-nak adott interjújában arra a kérdésre, hogy mi motiválja a tudományos kutatásban, azt felelte: „Az a vágyam, hogy felfedezzem a világ egy eddig ismeretlen és érdekes tulajdonságát.” Továbbá úgy gondolja, a gyermekeket ak-

kor tudjuk leginkább bevonni a tudományos életbe, ha felismerjük, hogy „a világ többé nem az, mint amiben felnőttünk, és meg kell dolgoznunk azért, hogy megérthessük a tényleges valóságot”.

A Magyar Tudományos Akadémia atommag- és részecskefizikus doktora, *Csörgő Tamás* meghívására hazánkba érkezett Glauber professzor látogatást tett a gyöngyösi Berze Nagy János Gimnázium és az egri Dobó István Gimnázium Természettudományos Önképzőkörökének középiskolás nyári táborában Visznen, ahol meghallgatta a diákok előadásait, majd elültette a tudás fáját jelképező óriás mamutfenyő-csemetét. Két nappal később a fény útjáról tartott előadást egy hódmezővásárhelyi középiskolában azzal a céllal, hogy a természettudományos szakirány választására ösztönözze a következő nemzedék potenciális tudósait. A diákok hatalmas lelkesedése mély benyomást tett rá. Hangsúlyozta a természettudományos önképzőkörök és tanulócsoportok, valamint a kísérletek fontosságát, amelyek lehetővé teszik, hogy a fiatalok megismerjék a világot, hiszen mint elmondta: „minél távolabb kerülünk hétköznapi tapasztalataink körétől, annál különösebbé és érdekesebbé válik számunkra a világ, amelyben élünk”.

<http://mta.hu>

## A FIZIKA TANÍTÁSA

# KÍSÉRLETEZZÜNK OTTHON!

Härtlein Károly  
BME Fizikai Intézet

## 13. Mozgások fotózása

A fényképezés a technika fejlődésének köszönhetően példátlan módon alakult át. A hagyományos – papíralapú fényképezés – az exponálástól a kész fotóig a legjobb esetben is több órás tevékenység, amely speciális tudást és nagy eszközparkot igényel. A digitális fotó az exponálástól a kivetítésig csak pár másodperc, a szaktudás pedig a számítástechnikai eszközökbe van építve, jószerivel tudni sem kell róla. Egy kép néha többet mond ezer szónál – tartja a mondás –, és ha a kép elkészítése nem vesz el sok időt, akkor hasznos órai és otthoni kísérleti eszközzé válhat kezünkben egy digitális kamera. Ehhez egy kicsit el kell mélyülnünk a digitális fényképezőgépek által nyújtott szolgáltatásokban. Elsősorban otthonra ajánlom az elmélyedést, mert a képek elkészítése tervezést igényel,

nyel, ehhez pedig a fizikai alapismeretek nélkülözhetetlenek. Tehát otthon modern eszközzel játszva tanulhat diákunk. A tanítási órán én a módszert mutatom be, készítenék egy-két fényképet, és a többit rábíznám a diákok alkotóképességére.

Az 1. ábrán látható fotót a *Science on Stage* (2005) fesztivál nyitó ünnepségén készítettem. Labdákkal zsonglőröködik a két szereplő. A labdába számítógép-vezérelt ledeket építettek. A hatás fokozásáért sötét a nézőtér. Állványról fotóztam „Night Scene” programmal, amely mintegy négy másodpercig exponál. A képen látható a labdák útja: levegőben repülve parabolapálya, kis körív a zsonglőrök kezében mozogva. Az is látszik, hogy rajtam kívül ez alatt a négy másodperc alatt még valaki fotózott, mégpedig vakuvál. Ebben a pillanatban a levegőben három labda tartózkodott. Ezt bizonyítja a zsonglőrök mögötti

Szerkesztőség: 1121 Budapest, Konkoly Thege Miklós út 29–33., 31. épület, II. emelet, 315. szoba, Eötvös Loránd Fizikai Társulat. Telefon/fax: (1) 201-8682

A Társulat Internet honlapja <http://www.elft.hu>, e-postacíme: [mail.elft@gmail.com](mailto:mail.elft@gmail.com)

Kiadja az Eötvös Loránd Fizikai Társulat, felelős: Szatmáry Zoltán főszerkesztő.

Kéziratokat nem őröztünk meg és nem küldünk vissza. A szerzőknek tiszteletpéldányt küldünk.

Nyomdai előkészítés: Kármán Stúdió, nyomdai munkálatok: OOK-PRESS Kft., felelős vezető: Szatmáry Attila ügyvezető igazgató.

Terjeszté az Eötvös Loránd Fizikai Társulat, előfizethető a Társulatnál vagy postautalványon a 10200830-32310274-00000000 számú egyezményen.

Megjelenik havonta, egyes szám ára: 800.- Ft + postaköltség.

HU ISSN 0015–3257 (nyomtatott) és HU ISSN 1588–0540 (online)



1. *ábra.* Zsonglőrök világító labdákkal, jól kivehető a ferde hajítás parabolapályája.

három kerek árnyék. Még az is behatárolható, hogy honnan vakuztak, hiszen az előtte ülők feje hátulról jól be van világítva. A labdába épített ledek folyamatosan világítanak, csak olykor váltanak színt. Az is jól látszik, hogy a zsonglőr leány mozgott, hiszen elmosódott (bemozdult) a teste.

A következő kép (2. *ábra*) elkészítésekor egyszínnűen villogtak a ledek, amit a villogás szaporasága miatt csak a kamera látott. Ezen a képen nem labdákkal, hanem buzogányokkal zsonglőrködtek, amelyek tengelyében egyenlő távolságra hat ledet szereltek. Így az is megfigyelhető, hogy a buzogány mint kiterjedt test forogva repül. A kép készítése alatt senki sem vakuzott.

Ilyen mozgások fotózásához szükséges, hogy a vizsgált tárgy világítson, sőt kimondottan szerencsés ha nem folyamatosan, hanem villogva. A gyermekjátékok között – ezek a legtöbb esetben jól bírják a dobálást – sok ilyet találhatunk, de egy világító kulcstartó vagy egy kerékpárlámpa is lehet a fényképezendő tárgy. Rögzíthetjük a világító-villogó tárgyat a vizsgálandó mozgó testhez, vagy mozgathatjuk mi magunk is. Ezt mutatja be a 3. *ábra*. Egy játék rendőrbot –

3. *ábra.* Egyenletesen forgatott játék rendőrbot.



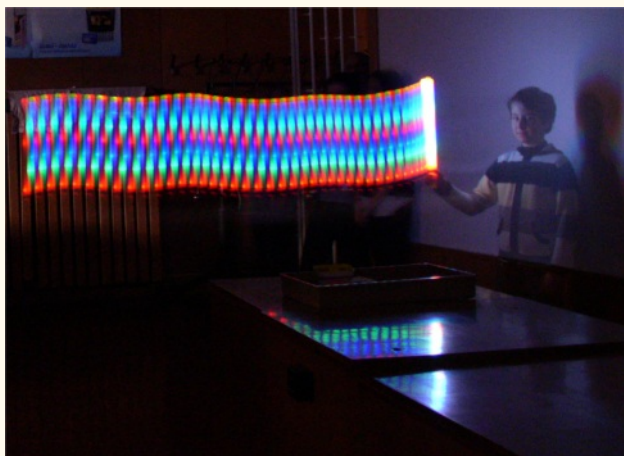
2. *ábra.* A villogó ledek a mozgás pillanatnyi gyorsaságáról is adhatnak információt.

amely villogó ledek tartalmaz – forgat egy diák sötétített teremben. Ugyanezt a botot kezében tartva sétál a kísérletező (4. *ábra*).

#### *Technikai alapok*

A fényképezőgépünket állványra kell rakni, vagy más módon kell biztosítani, hogy az exponálás ideje alatt ne mozduljon el. Sötétítsük be a helységet, de nem kell törekedni a teljes sötétségre. Ezt majd az első képek elkészülte után meg fogjuk „érezni”, a túlzottan nagy sötét csak hátráltatja munkánkat. Le kell tiltani a vakut és a „Night Scene” (éjszakai fényképezés) üzemmódba kell kapcsolni gépünket. A „Night Scene” üzemmódot még az egyszerűbb mobil telefonok fényképezőgépei is tartalmazzák. Tükörreflexes gépek „B” záridejét is használhatjuk, sőt ezek között találhatunk olyanokat is, amelyek programozottan akár 30 másodpercig is nyitva tartják a zárat. Ilyen géppel fényképezve precízen megadhatjuk a nyitás idejét, így időméréses felvételekre is módunk van. A fénykép elkészítéséhez két személy szükséges, egy aki kezeli a fényképezőgépet, és egy aki mozgatja vagy mozgásba hozza a megfigyelt tárgyat.

4. *ábra.* Majdnem egyenesvonalú, egyenletes mozgás bemutatása.



Jöjjön látogatóba Magyarország  
egyetlen atomerőművébe és  
ismerje meg annak biztonságos  
működését!



# Jövönk energiája



## paksi atomerőmű

Tájékoztató és Látogatóközpont  
7031 Paks, Pf. 71  
Telefon: (75) 508 833  
[www.atomeromu.hu](http://www.atomeromu.hu)



Várjuk vendégségbe Magyarországot!