

## A tömegáram-különbségek hatásai

Az 1. táblázat mérési és számított adatai szerint a teljes üzemidők változtatásával – a szelep állásának és a behelyezett fúvóka típusának megfelelően – különböző lefutású működéseket tudunk megvalósítani. Mindegyik regresszív jellegű volt, ám különböző hosszúságú üzemidővel. A szelep állásától függően az eltérő üzemidők egyben különböző nagyságú közepes hajtóanyagáramot jelentettek (a legnagyobb számított érték a 0,053 kg/s volt).

Amikor a szelepet teljesen kinyitjuk, a 8. számú próbánál az a lehető legnagyobb tömegű levegőt tudta átengedni, így 165 s alatt adta le azt a levegőmennyiséget, amelyre a 4. számú próbánál kétszer ennyi időre volt szükség. A közepes tömegáram elérte 0,053 kg/s-ot, a kamranyomás a 35 bart és jelentősen, 8,4 cm-rel nyomódott össze az erőmérő rugója.

## A fúvócső legszűkebb keresztmetszet és típus hatásai

A fúvókacserékkel jól kimutathatóan változott a nyomás és a tolóerő, velük pedig a számított értékek. A legszűkebb keresztmetszetek különbségeit számba véve jól látszik, hogy a 7. számú próbánál alkalmazott 11 mm-es kettős kúp alakú fúvócsővel nem tudtuk azokat az értékeket elérni, mint a 8. próba 6 mm-esével. Az előbbi próbánál a kamranyomást nem lehetett 10 bar fölé emelni, ezért hiába jelentene a nagyobb (legszűkebb) keresztmetszet nagyobb tolóerőt (az  $F_t = p_{\max}^{kamra} A_{\min}$  összefüggés miatt), ha közben a fúvóka nincs „kihasználva” (a nyomás a torkolatban nem csökken a kritikus értékig sem). Ezáltal a 7. indítás tolóereje meg sem közelíthette a 8. mintegy 120 N-os értékét.

A 6. és 8. próba során a kamranyomás közel ugyanakkora volt, viszont a rugó összenyomódása, így a tényleges tolóerő jelentősen eltért egymástól (a 8. során

elérte a 118 N-t). A mérés körülményei megegyeztek, a fúvókák viszont kialakításukban különböztek.

35 bar kamranyomásig az eszköz – bizonyítottan – megbízhatóan alkalmas többféle – dinamikai, hőtani stb. – mérési feladat elvégzésére, ezáltal számos összefüggés gyakorlatban történő igazolására. A rugós erőmérő és a manométer segítségével alapvető mérések, következtetések is elvégezhetők. Kiindulásként bemutatható a paraméterek függése a manométer által mutatott nyomásértékektől. Magasabb szintű képzéseken a mérési adatokból akár olyan számítások is elvégezhetők, mint kiáramlási sebesség, fajlagos impulzus, hajtósugár energiája, hajtóanyagáram, a hőmérséklet csökkenése révén belsőenergia-változás számítása stb.

Egyéni hallásvédő eszközök biztosítása esetén a berendezés alkalmas kisebb csoportok előtt bemutató mérések megvalósítására, sőt egy komplex téma, a *sugárhajtás elmélete és gyakorlata teljes körű feldolgozására* és további vizsgálatok elvégzésére. Munkahelyemen mindezért rakétatechnikai szakképzések ez évi képzési programja keretében a rakétahajtóművek általános működésének demonstrálására hajtóművünket már több alkalommal beüzemeltük.

Láthattuk, hogy megfelelő nyomáson betáplált gázközeggel képesek vagyunk nagy energiatartalmú, ám robbanásveszélyes, vagy mérgező hajtóanyagokat helyesen megválasztva sikerül kialakítani a megfelelő üzemi viszonyokat.

## Irodalom

1. H. Mielke: *A rakétatechnika alapjai*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1962. 22. old.
2. U.o. 99. old.
3. Nagy E.: *Rakétajárművek*. Táncsics Könyvkiadó, Budapest, 1968. 15. old.
4. H. Mielke, id. mű. 90. old.

# HULLÁMCSORPORTOK, LECHER-VEZETÉK

Wiedemann László  
Budapest

Az utóbbi évtizedben a fizika iránti érdeklődés erősen megfogyatkozott a fiatalok körében. De a tendencia ennél bonyolultabb; a tehetség és az érdeklődés nagyban polarizálódott. Most is vannak kiváló tehetségek. Több sikeres országos verseny össze is fogja őket és itt indítást kapnak.

Az ilyen indításokhoz tartoznak az érdeklődést felkeltő, a tananyagot túllépő cikkek is, amelyek nemcsak a diáknak szólnak. Ennek adott hangot *Ujvári Sándor*; a *Fizikai Szemle* szerkesztőbizottságának egyik tagja a *Szemle* 2003/11. számában (405. oldal), amikor a Fizika Tanítása rovat tematikájáról szövegezt. A szigorú levezetéseket mellőzve, mégis az egyetemes törekedve igyekszik ez a cikk a szemléletformálást erősíteni.

## Hullámok

A tömegpont mozgásai közül a harmonikus rezgés központi szerepet tölt be az oktatásban. Egyenes menti mozgás esetén a dinamikai feltétel az  $F = -Dx$  erőtvény. Ebből adódik a mozgásegyenlet:  $x = A \sin \omega t$ , ahol  $x$  a kitérés,  $A$  az amplitúdó,  $\omega$  a körfrekvencia és  $t$  az idő. Az  $\omega$ -t kifejezhetjük az  $f$  frekvenciával:  $\omega = 2\pi f$ . Rugalmas közegben a rezgés terjedhet is, vagyis a rugalmas közeg egyes tömegpontjai az előzőtől időközönként átvesszik a rezgést.

Ha a homogén és izotróp közegben a rezgés terjedési sebessége  $v$ , akkor az így kialakult hullámmozgás  $y$  kitérése  $t$  időpontban a kezdőponttól  $x$  távolságban:

$$y = A \sin \omega \left( t - \frac{x}{v} \right).$$

A hullámterjedésre érvényes a  $v = \lambda f$  összefüggés, ahol  $\lambda$  a hullámhossz. Defináljuk a  $k$  hullámszámot:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Ezt behelyettesítve kapjuk az  $x$  irányban terjedő végtelen hosszú, csillapítatlan hullám egyenletét, amely a harmonikus rezgés térbeli kiterjesztéseként értelmezhető:

$$y = A \sin(\omega t - kx). \quad (1)$$

A hullám terjedési sebessége, vagyis a fázissebesség, tehát egy adott rezgési állapot terjedési sebessége a fentiek alapján

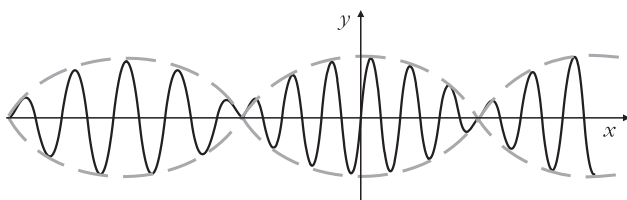
$$v = \frac{\omega}{k}. \quad (2)$$

A közeg paramétereitől függően lehetséges, hogy különböző hullámhosszúságú hullámok esetén maga a  $v$  terjedési sebesség is hullámhosszfüggő, így  $v = v(\lambda)$ , ezáltal (2)-ben  $\omega$  és  $k$  között már nemlineáris a kapcsolat, hanem  $\omega = \omega(\lambda)$  is fennáll, ezért általános esetben

$$v = \frac{d\omega}{dk}, \quad (3)$$

vagyis a körfrekvencia  $k$  szerinti deriváltját kell venni. A jelenség neve diszperzió. Itt jegyezzük meg, hogy fényterjedéskor a diszperzió alapvető fontosságú. Mivel a fény is hullám, elektromágneses hullám, például a prizával való színbontás a diszperzió alapján megy végbe, tehát a spektrum megjelenése ennek köszönhető. A fehér fény különböző hullámhosszúságú fénysugarak keveréke. Ezek a prizmán más-más sebességgel haladnak át, tehát a különböző színek más-más szög alatt jelentkeznek, mivel a törésmutató függ a hullámhossztól:  $n = n(\lambda)$ . A továbbiakban kidolgozták a diszperzió részletes elméletét (*Drude, Helmholtz, Lorenz*). Ez azon alapszik, hogy a beeső fényhullám kölcsönhatásba lép a közeg atomjaiban kváziasztikusan kötött elektronokkal. Ez az elektronpolarizáció. A közeg  $\epsilon$  dielektromos állandóját a beeső fény hullámhossza és a közeg atomjainak polarizáltsága együttesen határozza meg. A kváziasztikusan kötött elektronok a beeső, vagyis a gerjesztő fény hatására szekunder hullámokat bocsátanak ki. Az anyagban haladó fény ezen hullámok és a beeső fény interferenciája révén jön létre. Ezt

1. ábra. Az amplitúdók az  $x$  tengely mentén időben eltolódnak.



úgy vesszük figyelembe, hogy a Maxwell-féle hullámegyenletbe már a frekvenciafüggő dielektromos állandót helyettesítjük.

## Hullámcsoportok

Adott közegben egyszerre több hullám is terjedhet, ugyanakkor ezek interferálnak. Tekintsünk először két egyenlő amplitúdójú, egyenes mentén azonos irányban terjedő végtelen szinuszhullámot, amikor is  $\omega$  és  $k$  értékei csak kissé különböznek. Vizsgáljuk az eredő hullámot. Ez a következő:

$$y = A \sin(\omega_1 t - k_1 x) + A \sin(\omega_2 t - k_2 x). \quad (4)$$

Az argumentumokat  $\alpha$ -val és  $\beta$ -val jelölve, a (4) képlet így szól:

$$y = A(\sin\alpha + \sin\beta),$$

Így az eredő hullám, felhasználva a megfelelő trigonometriai azonosságot:

$$y = 2A \cos\left(\frac{\Delta\omega t - \Delta k x}{2}\right) \sin(\omega_{\text{átl}} t - k_{\text{átl}} x), \quad (5)$$

ahol  $\omega_{\text{átl}} = (\omega_1 + \omega_2)/2$  és  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ , hasonlóan  $k$ -ra is.

Ez úgy értelmezhető, hogy az eredő hullám jó közelítéssel valamelyik komponenshullám, amikor is annak  $A$  amplitúdója nem állandó, hanem az idő és hely függvényében az úgynevezett vivő hullám fázisához képest gyengén változik. Ez az amplitúdóhullám. Ez jól látható, ha (5)-ben a szinuszfüggvény előtti kifejezést egyetlen függvénynek tekintjük. Tehát egy amplitúdómodulált szinuszhullámot kaptunk. Most már kétféle sebesség jellemzi a hullámot: egyik a komponenshullámok közel azonos fázissebessége, a másik a moduláció sebessége, vagyis az amplitúdóhullám fázissebessége:

$$v = \frac{\omega_{\text{átl}}}{k_{\text{átl}}}, \quad c = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}. \quad (6)$$

Azt mondjuk, hogy két hullámból összetett hullámcsoportot alkottunk és az amplitúdóhullám  $c$  sebessége a csoportsebesség. A kétféle sebesség általában nem azonos, például az amplitúdóhullámban egyik maximum siet vagy elmarad a vivő hullám egy adott maximumához képest. Szemléletesen úgy fogalmazhatunk, hogy a hullámcsoport a tömegpont rezgésekor adott körülmények között fellépő lebegés térbeli általánosítása. A legegyszerűbb hullámcsoportot az 1. ábra mutatja.

Ha a közegben diszperzió lép fel, akkor (6)-ban a  $c$  csoportsebesség  $\omega$  deriváltja:

$$c = \frac{d\omega(k)}{dk}.$$

Fizikai értelme ennek akkor van, ha sok hullámból állítjuk elő a hullámcsoportot, vagyis adott hullám-

sávból vesszük a komponenshullámokat. Ha ez a hullámsáv elég kicsi, akkor (6)-nak megfelelően egyetlen  $c$  értékkel tudjuk jellemezni a hullámcsoportot. Ha azonban a hullámsáv viszonylag széles, akkor a  $\Delta\omega$ ,  $\Delta k$  hullámsávokat kicsiny intervallumokra osztjuk és így minden rész-hullámsávintervallumhoz (6) segítségével más-más hullámcsoport és csoportsebesség tartozik. Így egy ilyen hullámcsoport az idő folyamán – ahogy mondjuk – „szétfolyik”, amelynek a fizika különböző területein nagy jelentősége van. A későbbiekben ennek megvilágítására több példa szolgál.

Alkossunk most (4) alapján sok komponensből épülő hullámcsoportot. Legyen  $n$  számú komponens, mindegyik amplitúdója azonos és az amplitúdók összege legyen véges  $A$  érték. Ekkor egy komponens amplitúdója  $A/n$ . Így most a (4)-gyel analóg hullámegyenlet:

$$y = \sum_{v=0}^{v=n} a_v \sin\left[\left(\omega_1 + \frac{\Delta\omega}{n} v\right)t - \left(k_1 + \frac{\Delta k}{n} v\right)x\right], \quad (7)$$

ahol  $v$  futóindex és  $a_v = A/n$ .  $\Delta\omega$  és  $\Delta k$  most is kicsiny értékek  $\omega$ -hoz és  $k$ -hoz képest. A (7) eredő argumentumát átírjuk, legyen

$$(\omega_1 t - k_1 x) + (\Delta\omega t - \Delta k x) \frac{v}{n} = a + b \frac{v}{n}.$$

Ezzel (7) ilyen lesz:

$$y = \sum_{v=0}^{v=n} \frac{A}{n} \sin\left(a + b \frac{v}{n}\right). \quad (8)$$

Képzeld el, hogy végtelen sok, egyenlő amplitúdójú komponenshullámból állítjuk elő a hullámcsoportot, tehát (7)-ben  $n \rightarrow \infty$ . Keressük az eredőt! Tehát most a (8) hullámfüggvény az eredő  $\Psi$ -re így néz ki:

$$\Psi = \lim y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{v=0}^{v=n} \frac{A}{n} \sin\left(a + b \frac{v}{n}\right). \quad (9)$$

A (9)-ben adott határérték meghatározásához a (0,1) intervallumot beosztjuk  $n$  részre és egy  $\zeta$  változóval (9) átmegy egy integrálba:

$$\frac{1}{n} \rightarrow d\zeta \dots \frac{v}{n} \rightarrow \zeta.$$

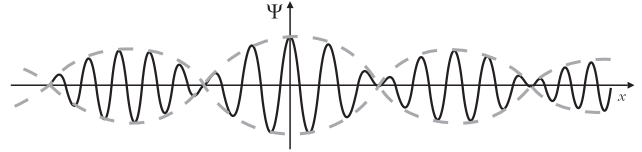
Így kapjuk, hogy

$$\Psi = A \int_0^1 \sin(a + b\zeta) d\zeta. \quad (10)$$

Ezt kiszámítva:

$$\Psi = A \frac{\cos a - \cos(a + b)}{b}.$$

Ismert trigonometriai azonosságot felhasználva, majd  $a$  és  $b$  kifejezését behelyettesítve, kapjuk a végtelen sok komponenshullámból álló hullámcsoport kifejezését:



2. ábra. Sok szuperponált szinuszhullámból előálló hullámcsoport.

$$\Psi = \left[ 2A \frac{\sin\left(\frac{\Delta\omega t - \Delta k x}{2}\right)}{\Delta\omega t - \Delta k x} \right] \sin(\omega_{\text{átl}} t - k_{\text{átl}} x), \quad (11)$$

ahol

$$\omega_{\text{átl}} = \frac{\omega_1 + (\omega_1 + \Delta\omega)}{2}$$

és hasonlóan  $k_{\text{átl}}$ -ra is.

Helyben és időben amplitúdómodulált csillapított hullámcsoportot kaptunk, ahol [...] kifejezés az amplitúdóhullám, amely  $c = \Delta\omega/\Delta k$  csoportsebességgel terjed. A (11)  $\Psi$  függvénynek sehol sincs szakadása, ahogy lennie is kell, hiszen a  $(\Delta\omega t - \Delta k x = 0)$  fázisállapotokban is a

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$$

ismert határérték alapján [...] =  $A$ . Mindezt a 2. ábra mutatja. A hullámcsoport az  $x$  tengely mentén az időben eltolódik.

A teljes általánosításhoz egy lépéssel még tovább megyünk. Lehetséges, hogy a komponenshullámok amplitúdói nem egyenlők, hanem a komponensek  $\lambda$  hullámhosszának függvényei. Ekkor bevezetjük az  $a(k)$  amplitúdósűrűséget ( $k = 2\pi/\lambda$ ), amely definíciószerűen az egységnyi hullámszámváltozásra jutó amplitúdót jelenti. Az  $a(k)$  sűrűségfüggvényt az adott fizikai helyzet alapján kell meghatározni. Például egy kifeszített húrt egyik végénél rá merőlegesen megpendítünk, vagy egy egyszerű áramkörre egyenfeszültséget kapcsolunk és a stacionárius állapot előtti helyzetet vizsgáljuk, vagyis a bekapcsolási feszültségimpulzust. Visszatérve az  $a(k)$  függvényre, mondhatjuk, hogy  $dk$ -ra jut  $a(k) dk$  amplitúdódifferenciál, és a teljes amplitúdót egy integrál adja:

$$\int_{k_1}^{k_1 + \Delta k} a(k) dk.$$

De nekünk a hullámcsoport  $\Psi$  függvénye kell, így (11) analogonja, a hullámcsoport általános leírása az alábbi:

$$\Psi = \int_{k_1}^{k_1 + \Delta k} a(k) \sin(\omega t - kx) dk, \quad (12)$$

ahol az  $a(k)$  sűrűségfüggvényt a probléma fizikai elemzése alapján ismerni kell. Másrészt  $\omega$ -ra nézve  $\omega = \omega(k)$ . Ha ez  $k$ -nak lineáris függvénye, akkor nincs diszperzió, ha nem, akkor van diszperzió. Ez esetben,

mivel  $\Delta k$  kicsi,  $\omega(k)$  sorba fejthető, ezt két tagig vesszük figyelembe:

$$\omega = \omega_1 + \frac{d\omega}{dk}(k - k_1). \quad (12.a)$$

Ha a (12.a) képletet (12)-be helyettesítjük, megkapjuk a  $\Psi$  hullámcsoport általános előállítását. Így például a (9)-ben adott hullámcsomag (12)-ből úgy adódik, hogy  $a(k) = \text{konstans}$ . Fontos megjegyezni, hogy (12.a)-ban a  $k$  szerinti derivált a  $k_1$  helyen tekintendő. Így kapjuk például az előbbi speciális eset (11) formulájában található  $\omega_{\text{ait}}$  kifejezést. A (12) formula akkor is alkalmazható, ha a hullámcsoport nem építhető fel a  $\Delta k$  intervallumból vett szinusz hullámok összegeként, hanem csak véges nagy  $\Delta k$ -ból. Ekkor ezt kis intervallumokra kell felosztani és külön-külön meghatározni a megfelelő (12) függvényt. Ez azt jelenti, hogy a vizsgált jelenség csak különböző csoportsebességű hullámcsoportok együttesével írható le. Így például egy kezdeti véges jel a terjedés folyamán egyre hosszabb lesz és alakját is változtatja. Ilyenkor mondjuk, hogy a hullámcsoport „szétfolyik”, amire számos példa van a fizikában.

A csoportsebesség másik előállítása is létezik, ez a Rayleigh-formula. Tekintsük a  $c = d\omega/dk$  alakképletet. Ha a definíciós egyenletben  $v = \omega/k$ -ban  $\omega = \omega(k)$ , akkor  $v = v(\lambda)$  is fennáll, tehát  $\omega = kv(\lambda)$ . Ezután mindkét oldalt  $k$  szerint deriváljuk és felhasználjuk a  $k = 2\pi/\lambda$  definíciót. Átalakítás után kapjuk a Rayleigh-formulát:

$$c = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}, \quad (13)$$

Ahol  $v$  a komponens hullámok fázissebessége.

## Példák, alkalmazások

### Kapilláris hullámok folyadékban

Ha vízzel telt tálba vizet csepegtetünk, diszkrét, egymás után induló felületi hullámok képződnek. Azt látjuk tehát, hogy hullámcsoportok terjednek a hullámforrástól radiálisan kifelé. Minden hullámcsoport, mivel közelítőleg csillapított szinuszrezgésekből áll, csak végtelen sok véges szélességű hullámsávból állítható össze. Ezért megfigyelhetjük, hogy terjedés közben hosszúságuk változik, „szétfolynak”. Ezek a felszíni, vagy kapilláris hullámok. Az elméleti számítás azt mutatja, hogy ezek  $v$  fázissebessége  $\lambda$ -függő, tehát diszperzió van, és cseppentéskor a keletkező hullámcsoport más sebességgel terjed, mint a komponenshullámok  $\Delta\lambda$ -ban adott  $v$  fázissebessége. A pontos képlet így szól:

$$v(\lambda) = \sqrt{\frac{2\pi\alpha}{\rho\lambda}},$$

ahol  $\alpha$  a folyadék felületi feszültsége,  $\rho$  a folyadék sűrűsége. Ha az előbbi képletet (13)-ban alkalmazzuk, átalakítások után szép és egyszerű formulát nyerünk:

$$c = \frac{3}{2}v.$$

Tehát a csoportsebesség más, mint a komponenshullámok fázissebessége, és mivel véges nagy hullámszámsávból épül fel a cseppentési folyamat, azért egyszerre több, különböző  $c$  sebességű hullámcsoport írja le azt. Ez a szétfolyás magyarázata.

### Energiaáramlás, információ átadás

Homogén, izotróp közeg energiát tárol, például rugalmas közeg mechanikai energiát, vagy szó lehet elektromágneses térről és abban a térenergiáról. Ha ismeretes a térenergia-sűrűség, ez alapja a közegben fellépő áramsűrűség meghatározásának. A vonatkozó hullámegyenlet (másodrendű parciális differenciálegyenlet) egyik alpmegoldása a végtelen hullámvonulatot leíró egyszerű hullámegyenlet, amelyet az (1) képlet ad meg. A hullámegyenlet tartalmazza a közegben haladó ilyen hullám sebességét, vagyis a fázissebességet. Például végtelen kiterjedésű, ideális rugalmas közegben haladó longitudinális hullám sebessége

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

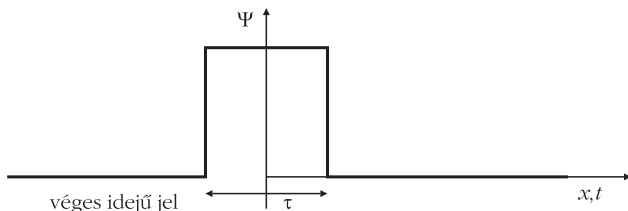
ahol  $E$  a közeg rugalmassági modulusza,  $\rho$  annak sűrűsége. Más esetben végtelen kiterjedésű, homogén, izotróp közegben a Maxwell-egyenletekből származtatható hullámegyenlet megadja az elektromágneses hullámok terjedési sebességét, a  $v$  fázissebességet:

$$v = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}},$$

ahol a számlálóban a vákuumbeli fénysebesség áll, a nevezőben a közeg relatív dielektromos állandója és mágneses permeabilitása. Eddig egy referencialhelyzetet írtunk le.

A valóságos helyzet ennél bonyolultabb. Csak véges kiterjedésű közegek léteznek, és információt csakis jelekkel vihetünk át. Így például véges hullámvonulatokkal, vagy akár egyszerű impulzusokkal vagy egyetlen impulzussal. Az első esetben a hullámegyenlet megoldásakor peremfeltételeket kell figyelembe venni, így végtelen sok szinuszfüggvény szuperpozíciójából kapjuk a megoldást, ami hullámcsoportot jelent. A második esetben viszont adott véges hosszúságú jel előállítása szinuszfüggvényekből eleve hullámcsoportra vezet, így (12)-t is felhasználva az adott jel  $c$  csoportsebességgel terjed. Ezért az átvitt energia áramsűrűsége  $j = cu$ , ahol  $c$  a csoportsebesség és  $u$  a közeg energiasűrűsége. Ettől függetlenül  $c$  egyenlő lehet a  $v$  fázissebességgel, ha nincs diszperzió.

Nézzünk konkrét esetet! Feszített rugalmas szálra rá merőlegesen hirtelen megütünk, tehát a szál rövid idejű impulzust nyer. Azt tapasztaljuk, hogy – a végen való visszaverődéstől eltekintve – egyetlen hullám vonul végig a szálon. A jelenség hullámcsoporttal írható le.



3. ábra. Véges idejű jel.

Újabb konkrét példaként feltöltött kondenzátor kisütésével feszültség-lökés is végigvonulhat valamilyen egyszerű áramkörön (3. ábra). Ha a jel alakja a 3. ábra szerinti, akkor annak időbeli lefolyása a Fourier-integrálok módszerével analitikusan megadható. Jelenleg nem hullámcsopotról van szó, hanem a jelfüggvény amplitúdósűrűségének meghatározásáról. Előbb, a megütött húr esetén a jelfüggvény argumentuma,  $\varphi = \omega(k)t - kx$ , erre nézve a jel lefutása, csupán a végeredményre szorítkozva:

$$f(\varphi) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega \frac{\tau}{2}}{\omega} \cos(\omega t - kx) d\omega, \quad (14)$$

ahol  $\tau$  az impulzus ideje. Ha azonban az említett elektromos feszültségimpulzusról beszélünk, akkor a koszinuszfüggvény argumentumában csak  $\omega(t)$  szerepel és a vízszintes tengelyen a  $t$  idő áll, míg (14) rögzített  $t$  mellett a húron haladó hullámcsoportot írja le. Látható, hogy a Fourier-integrálok módszerével egyaránt rugalmasan kezelhetők az előbbi, egymástól távol eső problémák. Itt az amplitúdósűrűség játssza az összekötő szerepet.

A (12) általános formulával összehasonlítva, az amplitúdósűrűség mindkét esetben a fentiek szerint

$$a(k) = \frac{2}{\pi} \frac{\sin \omega \frac{\tau}{2}}{\omega}. \quad (14.a)$$

A frekvenciasáv, amelyből a (14) hullámcsomag összetevődik, (14.a) szerint végtelen. Számoláskor egyszerűbben lehet eljárni, mivel a (14.a)-ban adott amplitúdósűrűség  $\omega$ -val gyorsan csökken. Integráláskor elegendő egy intervallumot tekinteni, ahol  $a(k)$  még elég nagy. Ezt az  $\omega\tau/2 = \pi$  egyenletből határozhatjuk meg. Átalakítva;  $f\tau = 1$ , így a frekvenciára a felhasznált sáv-szélesség:  $\Delta f = 1/\tau$ . Például 0,001 s ideig tartó négy-szögimpulzus előállításához jó közelítéssel 0–1000 1/s frekvenciataromány szükséges a (14) improprius integrál helyett. A (14) képletben az impulzus lefutásáról van szó, amit leválaszthatunk a kapcsolatos hullámcsopotról. Természetesen a szóban forgó hullámcsoport sebessége is meghatározható.

Még egy érdekes jelenség említhető meg a hullámcsoportokkal kapcsolatban. Ez a színkép-vonalak véges szélessége. Ideális monokromatikus fény spektroszkópban vékony vonalat hozna létre. Ez azonban nincs így, mivel emisszió esetén az atomban kvázi-elasztikusan kötött elektron a külső gerjesztés hatásá-

ra felvett energiáját véges idejű, csillapított szinuszrezgés formájában bocsátja ki, és a spektroszkóp ezt bontja fel. Ez viszont egy hullámcsoport, amely igen sok,  $\Delta\omega$  intervallumból felépülő tiszta szinuszrezgés eredője. Tehát egy spektrumvonal nem egyetlen meghatározott frekvenciájú rezgésből jön létre.

### Elektromágneses hullámok, Lecher-drótpár

Az elektromágneses hullámok egy konkrét alkalmazás kapcsán jól megragadhatók, a problémának egyben történeti érdekessége is van. Lecher 1890-ben végezte el e kísérleteket. A következőkben csak a Lecher-vezetékkel foglalkozunk.

Előzményként meg kell említeni, hogy az elektromágneses hullámokat a Maxwell-egyenletekkel maradéktalanul tárgyalhatjuk. Egy dimenzióban az  $E$  térerősségre vonatkozóan:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon \mu} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2},$$

ahol  $\epsilon$  és  $\mu$  a közeg teljes dielektromos állandója és mágneses permeabilitása. A jobb oldal első tényezője a hullám terjedési sebességének négyzete,  $v^2$ . Hasonló képlet vonatkozik a mágneses térerősségre is. A hullámegyenlet egyik egyszerű megoldása síkhullámot ad, vagyis a terjedésre merőleges síkban adott időben ugyanazok az  $E$  és  $H$  értékek érvényesek. Fontos összefüggés érvényes ez esetben az  $E$  és  $H$  vektorok között; abszolút értékben

$$E(x, t) = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} H(x, t). \quad (15)$$

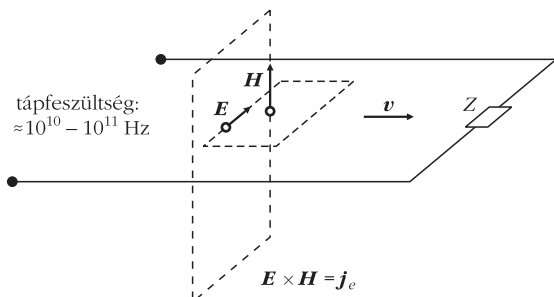
A Lecher-drótpár a tápvonalak alapesete, az elektromágneses energia továbbításának egyik módja. A fenti hullámegyenletekből levezethető a Lecher-vezeték-re vonatkozó speciális hullámegyenlet, a telegráf-egyenlet. Ennek megoldása azt adja, hogy a Lecher-tápvonalon, mint két egymáshoz közel fekvő párhuzamos vezető mentén elektromágneses síkhullámok terjednek, ha a tápvonal egyik végét időben szinuszfüggvény szerint változó nagyfrekvenciás feszültséggel tápláljuk. A vezetékek közötti térben az energia a Poynting sugárzási vektor szerint terjed síkhullám formájában úgy, hogy  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{v}$  vektorok jobbsodrású rendszert alkotnak és a  $v$  terjedési sebesség:

$$v = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}},$$

ahol a nevezőben a hosszegységre eső inductivitás és kapacitás szerepel. Nagy frekvenciákra ez azonos a

$$v = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}}$$

értékkel. A tápvonal mentén a vezetékek átellenes pontjai között a feszültség és egy-egy vezetékszaka-



4. ábra. A Lecher-vezeték.

szon pedig az áramerősség periodikusan változik. Ez azt mutatja, hogy a vezeték mentén elektromágneses hullámok terjednek. Érdekességképpen megemlítenődő, ha kvázistacionárius feszültséggel (például hálózati 50 Hz) tápláljuk a Lecher-vezeték egyik végét, akkor adott pillanatban a vezeték mentén mindenhol ugyanaz az áramerősség, tehát nem alakul ki elektromágneses hullám. Fontos ezen átmenet tudatosítása: csak nagyfrekvenciás gerjesztés esetén jönnek létre az elektromágneses síkhullámok. Ha a tápvonal szabad végeit egy fémlappal lezárjuk, akkor állóhullámok jönnek létre. A tápvonalra jellemző az úgynevezett hullámellenállás, általában egy komplex szám, amely adott pillanatban a két vezeték közt mérhető helyi feszültség és helyi áramerősség viszonya. Sokszor az ideális tápvonal esete tájékoztat a vezetés fő tulajdonságairól. Ideális a tápvonal, ha a vezetékek  $R$  ohmos ellenállásától és a beágyazó dielektrikum  $G$  elektromos vezetőképességétől eltekintünk. Ez esetben a hullámellenállás igen egyszerűen adható meg, nem komplex, a helytől és a gerjesztési frekvenciától független:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}},$$

ahol  $L_1$  és  $C_1$  ismét az egységre vonatkoztatott értékek. Érdekes, hogy az illesztésre nézve ugyanaz a törvényszerűség, mint a kvázistacionárius feszültséggel gerjesztett hálózatoknál; ha ugyanis a tápvonal szabad végeit (ideális esetben) éppen  $Z_0$  külső ellenállással zárjuk, a kicsatolt energia maximális lesz. Minél nagyobb a gerjesztő frekvencia, annál inkább kizárólagosan a Poynting-vektorral megadott energiasűrűséget szállítja a tápvonal. A pontos leíráshoz figyelembe kell venni a

$$j_e = \frac{\partial D}{\partial t}$$

eltolási áramsűrűséget, ahol  $D = \epsilon E$ . E tárgyalás eredményét mutatja a 4. ábra.

Általános esetben a síkhullám fázissebessége  $\omega$ -függő, vagyis a gerjesztési frekvenciától függ, tehát a Lecher-féle dróthullámok diszperziót mutatnak. Ez fontos következménnyel jár. Ha ugyanis különböző impulzusok, véges hosszúságú jelek formájában viszünk át energiát – ez történik például a telefonvezetékknél –, akkor az átvitel hullámcsoportok formájában történik, és mivel széles hullámsávból épül fel a hullámcsoport, ezért terjedés közben „szétfolyik”, a jel alakja torzul. Így például telefonbeszélgetéskor a torzítás lehetetlenné tenné a jó minőségű átvitelt, ha nem alkalmaznának szakaszonként korrekciót (Pupin-tekerecs).

#### Irodalom

1. B. Baule: *Die Mathematik des Naturforschers und Ingenieurs*, II. Hirzel Verlag, Leipzig, 1956.
2. Budó Ágoston: *Kísérleti Fizika II*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1968.
3. Karl Luchner: *Aufgaben und Lösungen*. B.I. Hochschultaschenbücher Verlag Mannheim/Zürich 1966.
4. Novobátczy K., Neugebauer T.: *Elektrodinamika II-IV*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1951.
5. Simonyi Károly: *Elméleti Villamosságtan*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1958.

## IX. WIGNER JENŐ ORSZÁGOS FIZIKAI FELADATMEGOLDÓ VERSENY

Sándor-Kerestély Ferenc  
Békéscsabai Evangélikus Gimnázium

A Békéscsabai Evangélikus Gimnázium természettudományos munkaközössége 2012. február 24. és 26. között kilencedik alkalommal szervezte meg az evangélikus iskolák Wigner Jenő Országos Fizikai Feladatmegoldó versenyét. A verseny célja a tanulók problémamegoldó képességének fejlesztése, a kísérletezés örömeinek megélése, a mért eredmények feldolgozása, törvényszerűségek megfogalmazása, a fizikatanár kollégák szakmai továbbképzése, a versenyzőknek tartott előadásokkal a tágabb ismeretek megszerzése.

A versenyt az evangélikus, protestáns és határon túli<sup>1</sup> iskoláknak hirdettük meg, amelyen az iskolák évfolyamonként egy-egy versenyzővel vettek részt.

Az első napon a versenyzőket csapatokba sorsoltuk (véletlenszerűen 4 fő/csapat). A csapatok három

<sup>1</sup> A versenyen az evangélikus iskolákon kívül részt vettek a szomszéd megyék protestáns iskoláinak (Bethlen Gábor Református Gimnázium – Hódmezővásárhely, Kecskeméti Református Gimnázium, illetve a határon túlról Kárpátaljáról a Nagyberegi Református Gimnázium és a Kolozsvári Református Gimnázium) diákjai.