

# VEKTOROK PÁRHUZAMOS ELTOLÁSÁNAK SZEMLÉLTETÉSE – I. RÉSZ

A délirányt jelző kordé, a Foucault-inga és egyebek

Bokor Nándor, BME Fizika Tanszék

Laczik Bálint, BME Gyártástudomány és -technológia Tanszék

## Vektorok párhuzamos eltolása

Mikor párhuzamos két vektor? A válasz magától értetődőnek tűnik: ha ugyanabba az irányba mutatnak. Menjünk tovább: szeretnénk egy vektort a sík adott pontjából egy másikba párhuzamosan *elmozgatni*. Körülményesebbnek tűnő megfogalmazással: szeretnénk apró lépésenként úgy odébb vinni, hogy mindegyik lépés végén kapott vektor párhuzamos legyen a lépés kiinduló vektorával. Így joggal várhatjuk, hogy a teljes művelet végén kapott vektor is párhuzamos lesz a kezdeti vektorral. A mozgatósi szabály ismét magától értetődőnek tűnik (legalábbis sík felületen): úgy kell a vektort elmozgatni, hogy közben mindig az eredeti irányba mutasson (*1. ábra*).

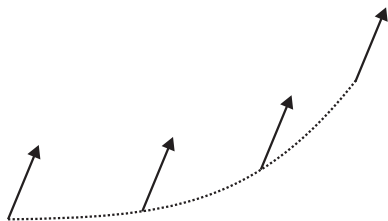
De mi a helyzet görbült felületen? Hogyan magyarázzuk el például egy gömb felületén élő „laposlényeknek” (akik számára nem létezik a harmadik dimenzió, nem látnak ki a felületből), hogy mi a teendő, ha a saját világukban egy vektort párhuzamosan akarnak eltolni? A precíz matematikai szabályt előbb saját magunknak kell kiokoskodnunk, hogy aztán tudathassuk kétdimenziós barátainkkal. Világos, hogy az „úgy eltolni, hogy végig a [3-dimenziós értelemben] eredeti irányba mutasson” szabály itt nem működik,

hiszen akkor a vektorok előbb-utóbb kifordulnának a felületből. Márpedig a laposlények vektorai mind a felület érintősíkjaiban állnak; különben olyan irányú komponensük is lenne, amely dimenzió nem is létezik (a laposlények számára).

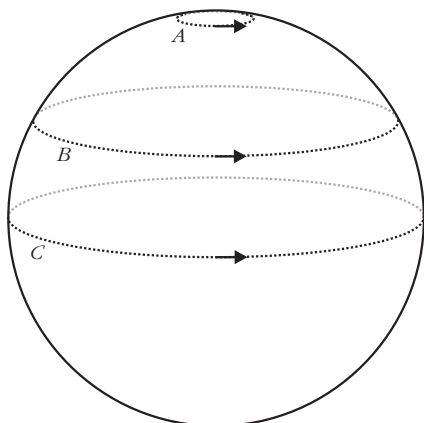
Nézzünk először néhány könnyen tárgyalható konkrét esetet a gömbfelületen, aztán próbáljuk meg megfogalmazni az általános szabályt. A *2. ábra* egy gömbfelületet, a laposlények univerzumát ábrázolja. Lapos barátaink szeretnének az *A*, *B* és *C* jelű görbéken párhuzamos eltolással körbevenni egy-egy olyan vektort, amelyek a kiinduláskor az adott görbével érintő irányúak. Ezt az első gondolat kísérletünket célszerű úgy megválasztanunk, hogy mindhárom görbe szabályos kör legyen. A nyilvánvaló analógia miatt szemléletes úgy gondolni ezekre, mint Földünk különböző szélességi köreire: az *A* jelű közel van az Északi Sarkhoz, a *B* jelű valahol az északi félteke közepe táján helyezkedik el, a *C* jelű pedig maga az Egyenlítő. Próbáljuk berajzolni az ábrába, hogyan néznek ki a három esetben az apró lépésenként párhuzamosan eltoló vektorok!

Az *A* görbe esetén a legegyszerűbb a dolgunk. A bejárt tartomány a teljes gömbnek nagyon kicsi része, amelyről tudjuk, hogy gyakorlatilag síknak tekinthető. Ahogy egy stadionban körbefutó atléta mozgásának elemzéséhez sem kell a Föld görbületét figyelembe venni, úgy itt is minden további nélkül alkalmazható a síkbeli szabály: ábránkat úgy kell megrajzolni, hogy az összes eltoló vektor „nézzen ugyanabba az irányba” (*3. ábra*). A vektor tehát előbb kifordul az *A* görbéből, aztán a teljes kör megtétele után visszajut eredeti állapotába. Az eredeti vektor és a teljes kör megtétele után visszajutott vektor 0 fokos szöveget zár be egymással, ahogy síkbeli rajzaink tapasztalatai után várjuk.

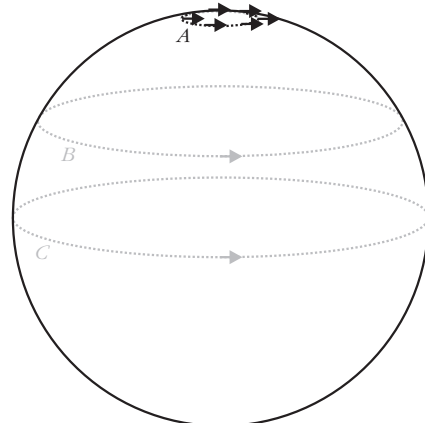
1. ábra

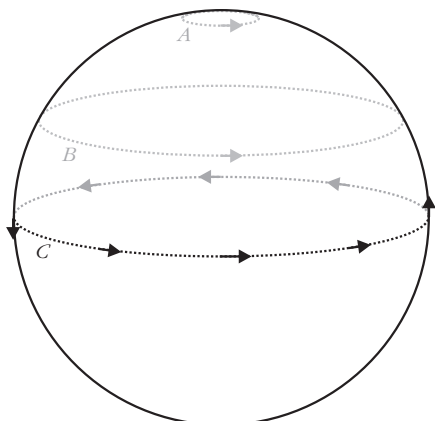


2. ábra

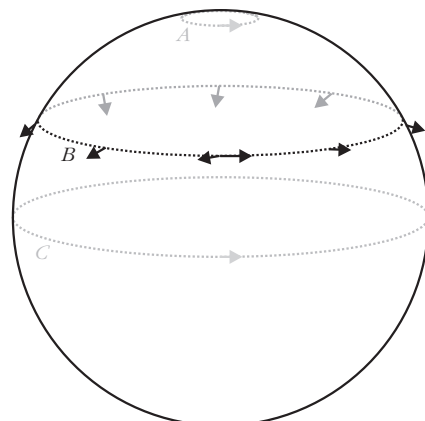


3. ábra





4. ábra



5. ábra

A  $C$  görbe esete is egyszerű. Először is, az ábrára a „párhuzamosan eltoló” vektorokat úgy kell berajzolnunk, hogy végig a felület érintősíkjában maradjanak (hiszen a laposlények számára csak ilyen vektor értelmezhető). Másodsor, mivel a  $C$  görbe a gömb egyenlítője, amely szimmetrikusan osztja két részre a gömböt, érintővektora a „párhuzamos eltolás” folyamán nem fordulhat ki sem lefelé, sem felfelé a görbéből, különben megsértené az ábra szimmetriáját. (Akár a lefelé, akár a felfelé elfordulást választjuk, nem tudnánk választásunkat megindokolni.) A vektor tehát mindvégig a görbe érintővektora marad (4. ábra). Mint az  $A$  görbe esetében, a vektor a kiindulópontba visszajutva ekkor is fedésbe kerül eredeti helyzetével, de most közben – kívülről, a 3 dimenziós térből nézve – tett egy teljes kört (ebből a nézőpontból nem igaz tehát, hogy mindvégig „ugyanabba a irányba mutatott”!). Helyesebb ezért, ha úgy fogalmazzuk: az eredeti vektor és a teljes kör megtétele után visszatért vektor  $2\pi$  szöget zár be egymással.

Az  $A$  és a  $C$  görbe esete markánsan különbözik egymástól: az  $A$  görbe mentén – jó közelítéssel sík felületen – végigvitt vektor a teljes kör megtétele után is ugyanabba az irányba mutat, bár menet közben a görbétől erősen kifordul. A  $C$  görbe mentén végigvitt vektor viszont a görbéhez képesti helyzetét őrzi meg, miközben a külső (3 dimenziós) szemlélő számára drasztikusan változtatja az irányát. Szerencsés vélet-

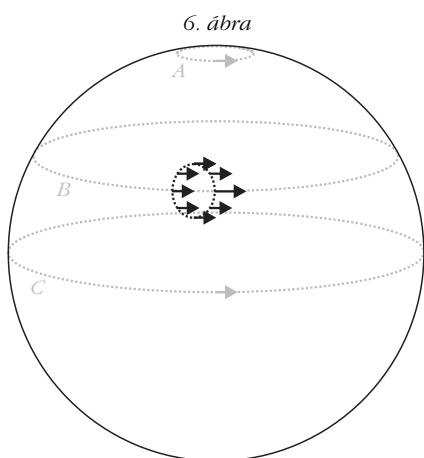
lennek tűnik, hogy a teljes kör megtétele után éppen  $2\pi$ -nek adódik az összes szögelfordulás.

A  $B$  görbe közbülső eset. Eddigi tapasztalataink alapján a következőképpen okoskodhatunk: a vektor a párhuzamos eltolás során biztosan ki fog fordulni a görbétől (hiszen nem alkalmazható rá a  $C$  görbénél indokolt szimmetria-érvelés), de *nem olyan mértékben*, mint az  $A$  görbe esetén (5. ábra). Bár okoskodásunk hibátlan, a kapott ábra mégis bántóan ellentmond az ösztöneinknek. A berajzolt vektorok egyszerűen „nem tűnnek párhuzamosnak”; ráadásul az a zavarba ejtő furcsaság adódik, hogy a kiindulási vektor és a teljes kör után ugyanoda érkezett eredmény-vektor nyilvánvalóan egészen más irányba mutatnak.

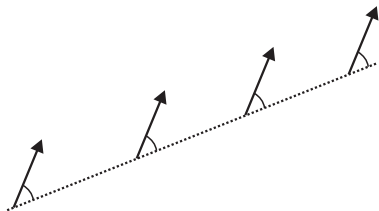
Mielőtt pontosan megértenénk, miért történik ez, gondoljuk végig a következőket: a gömb olyan alakzat, amelynek minden pontja egyenértékű. A  $B$  görbén végigvitt vektor furcsa viselkedéséért tehát a bejárt görbe a felelős, nem pedig a kiindulópontnak a gömbön elfoglalt helyzete. Ha ugyanabból a kiindulópontból ugyanazt a vektort egy kis tartományon hordoztuk volna körbe (mondjuk egy az  $A$ -hoz hasonló kör mentén), a végeredményül kapott vektor biztosan fedésbe került volna a kiindulási vektorral (6. ábra).

Gondolkodjunk el ezek után, milyen általános szabályt tudunk megfogalmazni, amely a szemléletünknek is megfelel, és az 5–6. ábrák furcsaságait is megnyugtatóan magyarázza. Érezhetjük, hogy naiv szabályunkkal mi volt az egyik baj: a „mindig ugyanarra mutasson” követelmény csak a vektorokról mond egy (ráadásul eléggé pongyolán megfogalmazott) állítást, a görbéről, amely *mentén* a vektort eltoljuk, tudomást sem vesz. A gömbi példákból viszont láttuk, hogy a vektor helyzetét ahhoz a görbéhez *képest* kell megadni, amely mentén odébb visszük.

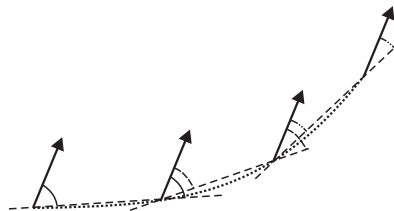
Térjünk vissza oda, ahol a legnagyobb biztonságérzettel mozgunk: egy sík felületre. Először toljuk el vektorunkat párhuzamosan egy *egyenes mentén* (7. ábra). Megfigyelésünk egyszerű: az eltolás során a vektor *a bejárt egyenes vonallal mindvégig azonos szöget zár be*. (Érezzük, miért nagy lépés ez: a felület két vonala közötti szög a laposlények számára is könnyen értelmezhető, ellentétben a kissé megfogha-



6. ábra



7. ábra

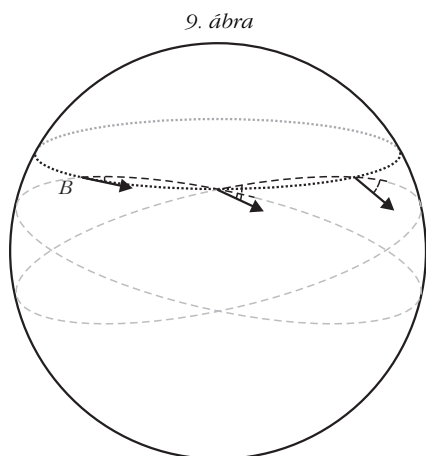


8. ábra

tatlan „ugyanarra mutasson” szabállyal.) Új szabályunk tehát: „Ha egyenes mentén akarod párhuzamosan eltolni a vektorodat, akkor lépésről lépésre gondoskodj arról, hogy a vektor mindvégig azonos szöget zárjon be az egyenessel.” A biztonságot adó sík felületen most görbe vonal mentén vigyük végig a vektort (8. ábra). A görbével bezárt szög nyilvánvalóan változik. Előbb felállított szabályunkat mégis átmenthetjük erre az esetre, az alábbi módon: „Ha görbe mentén akarod párhuzamosan eltolni a vektorodat, akkor a görbét közelítsd kicsiny egyenes szakaszokkal – ezek adják az eltolás lépéseit –, és minden kicsiny egyenes szakaszra követeld meg, hogy a szakasz elején és végén a vektor azonos szöget zárjon be az adott egyenes szakasszal” (8. ábra). Másodikként felállított szabályunk természetesen önmagában is megállja a helyét, hiszen az egyenes mentén történő eltolás speciális esetként kiadódik belőle. De alkalmas-e arra, hogy görbült felület (például gömb) felületén élő laposlényeknek használható receptet adjon a párhuzamos eltolásra? Egyetlen apró átfogalmazásra van csak szükség: az „egyeses” szó görbült felület esetén homályos értelmű, ezért cseréljük ki az általánosításaként használt „geodetikussal” szóval. (A geodetikussal definiációja: a két adott pontot összekötő vonalak közül a legrövidebb.)

Összefoglalva tehát eddigi tapasztalatainkat, bármilyen felületen élő laposlényeknek a következő eltolási szabályt adjuk:

*Ha adott vonal mentén párhuzamosan akarod eltolni a vektorodat, akkor a vonalat közelítsd kicsiny geodetikussal szakaszokkal – ezek adják az eltolás lépéseit –, és minden kicsiny geodetikussal szakaszra követeld meg, hogy a szakasz elején és végén a vektor azonos szöget zárjon be az adott geodetikussal szakasszal.*



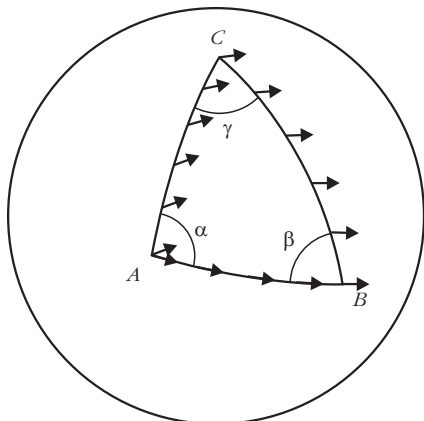
9. ábra

Ellenőrizzük szabályunk használhatóságát a gömbi laposlények esetére! Ismert (és a laposlények is tudják), hogy gömbfelületen két pont közötti legrövidebb út főkör mentén vezet: a főkörök a gömbfelület geodetikussai. A 2. ábra  $C$  görbéje pontosan ilyen. Szabályunk azt diktálja, hogy például az ilyen görbe érintővektorának párhuzamos eltolja mindvégig a görbe érintővektora maradjon. És valóban: a 4. ábra megrajzolásakor – más megfontolásból kiindulva – pontosan ezt az eredményt kaptuk. Ami még ennél is meggyőzőbb: szabályunkat a  $B$  görbe mentén való eltolásra következetesen alkalmazva valóban az 5. ábrán látható, elsőre furcsának tűnt viselkedést kapjuk. (A repülés történetének jelentékeny eseménye volt, amikor a légitársaságok rádöbbsentek, hogy az azonos szélességi körön fekvő városok – például New York és Isztambul – között *nem* az őket összekötő szélességi kör mentén érdemes repülni, mert *nem* az a legrövidebb út.) Természetes, hogy a vektor kifordul a  $B$  szélességi körből, hiszen ez a szélességi kör görbe vonal a gömbön, amit „egyeses” (= geodetikussal) szakaszokkal kell közelítenünk. A szabályunk alkalmazását illusztráló 9. ábra tulajdonképpen a 8. ábra megfelelője gömbfelületre.

## A Gauss–Bonnet-tétel

Már tudjuk, hogy a vektor teljes szögelfordulása, miután zárt görbén párhuzamos eltolással visszavittük eredeti helyzetébe, függ a görbe alakjától, az általa bezárt terület nagyságától. De mekkora ez a teljes szögelfordulás? Ezt a kérdést a Gauss–Bonnet-tétel válaszolja meg, amelynek *Eulertől* származó elegáns bizonyításváltozatát [1] az alábbiakban vázoljuk.

Görbült felületre éppúgy rajzolhatunk sokszögeket, mint síkra, csak a sokszög síkbeli definícióját – egyenes szakaszokkal határolt alakzat – kell értelmesen módosítanunk: a sokszög *geodetikussal* szakaszokkal határolt alakzat. Példaként a 10. ábra egy gömbfelületre rajzolt háromszöget mutat. Mindhárom oldal a gömb geodetikussának – azaz egy-egy főkörének – darabja. Vigyünk körbe egy vektort a gömbi háromszögon a párhuzamos eltolás szabályának megfelelően. Mint láttuk, geodetikussal vonal mentén párhuzamosan eltoló vektor megtartja a geodetikushoz képesti irányát (4. ábra). Mivel alakzatunk csupa geodetikussal vonalból áll, a párhuzamos eltolás ábrája könnyen megrajzolható. Az egyszerűség kedvéért az  $A$ -ból kiinduló vektor legyen az  $AB$  oldal érintővektora. Érintő irányát megtartja egészen addig, amíg a  $B$  csúcshoz ér. Ott a  $BC$  oldallal  $\beta - \pi$  szöget zár be (úgy is mondhatjuk, hogy az  $AB$  oldallal be-



10. ábra

zárt  $0^\circ$ -os szöghöz ekkora *szögnövekmény* adódik), és ezt a szöget a  $BC$  oldalon való végighaladás során mindvégig megtartja. Amikor a  $C$  csúcshoz ér, és elindul a  $CA$  oldalon, újabb, ezúttal  $(\gamma - \pi)$  nagyságú szögnövekményt kap, azaz a  $BC$  oldallal bezárt szöge  $(\beta - \pi) + (\gamma - \pi)$  lesz. Végül az  $A$  csúcshoz, azaz a kiinduló ponthoz érve az  $AB$  oldallal – és saját eredeti irányával – bezárt szöge immár  $(\beta - \pi) + (\gamma - \pi) + (\alpha - \pi)$  lesz.

A vektor a teljes hurok megtétele után tehát

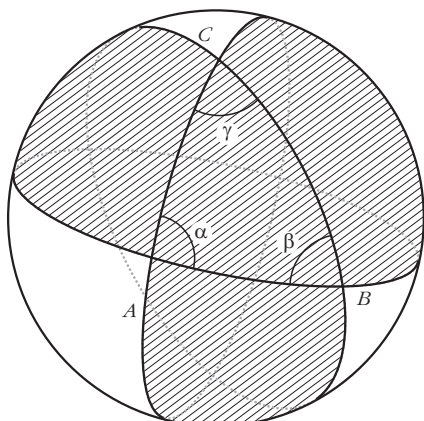
$$\begin{aligned} \delta &= (\beta - \pi) + (\gamma - \pi) + (\alpha - \pi) \\ &= \alpha + \beta + \gamma - \pi \end{aligned} \quad (1)$$

szögelfordulást végez (a szögelfordulást „moduló  $2\pi$ ” értelmezzük, tehát  $2\pi$  többszöröse elhagyhatók).

A képlet gyors ellenőrzése: síkháromszög esetén  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ , tehát  $\delta$ -ra zérus adódik, amint egy sík felületen párhuzamosan eltol vektortól el is várjuk.

Tegyünk fel egy látszólag nem ide tartozó kérdést: mekkora a 10. ábrán látható gömbi háromszög *területe*? A válaszhoz rajzoljuk le a háromszöget még egyszer, de úgy, hogy az oldalakat adó főköröket végig kirajzoljuk (11. ábra). A három főkör – ezt egy gumilabdán, a főköröket golyóstollal berajzolva könnyen ellenőrizhetjük – a gömbfelületet nyolc részre osztja. Ha ezek közül kiválasztunk négyet: az eredeti  $ABC$  gömbháromszöget, valamint az  $AB$ , a  $BC$  és a  $CA$  oldalakkal érintkező további 1-1, összesen három gömbháromszöget – lásd

11. ábra



a vonalkázott részeket a 11. ábrán –, érdekes megfigyelést tehetünk (segít a már említett gumilabda): a bevonalkázott rész a gömb felületének éppen a felét fedi le, sőt egybevágó a be nem vonalkázott maradék résszel. A vonalkázott terület tehát

$$\frac{4 R^2 \pi}{2} = 2 R^2 \pi,$$

ahol  $R$  a gömb sugara.

Az ábrán az is látszik, hogy az  $ABC$  háromszög voltaképpen három elnyújtott (és bevonalkázott) „kifli-alakzat” metszet-tartománya. Mindhárom kifli-alakzat úgynevezett gömbi kétszög (az elnevezés teljesen logikus; mindazonáltal ennek az egzotikus sokszögnek hiába keresnénk a síkbeli megfelelőjét, ott ugyanis két egyenes nem metszheti egymást kétszer.) A gömbi kétszög egy narancsgerezd héjához hasonlít, ezért területének kiszámítása magától értetődő: területe a gömbfelületnél annyiszor kisebb, ahányszor kisebb a nyílásszöge  $2\pi$ -nél. A 11. ábrán bevonalkázott,  $A$  csúcshoz kétszög területe például:

$$4 R^2 \pi \frac{\alpha}{2\pi} = 2 R^2 \alpha.$$

Az  $ABC$  gömbi háromszög  $T$  területét ezek után a következő gondolatmenettel kaphatjuk meg: ha a három gömbi kétszög területét összeadjuk, majd az eredményből kétszer kivonjuk a triplán figyelembe vett  $ABC$  gömbháromszög területét, megkapjuk a bevonalkázott összterületet:

$$2 R^2 \alpha + 2 R^2 \beta + 2 R^2 \gamma - 2 T = 2 R^2 \pi, \quad (2)$$

amiből a gömbháromszög területe:

$$T = R^2 (\alpha + \beta + \gamma - \pi). \quad (3)$$

A (3) és (1) egyenletek egybevetésével azonnal látjuk, hogy párhuzamosan körbevitt vektor teljes  $\delta$  szögelfordulása a bejárt területtel arányos:

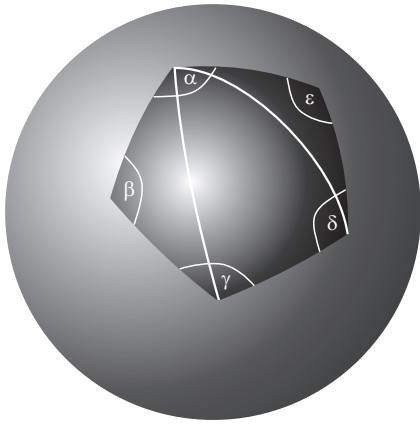
$$\delta = \frac{T}{R^2}. \quad (4)$$

(Innen adódik a  $\delta$ -ra gyakran használt *felületi excesszus* elnevezés.)

Ahogy egy szöghöz tartozó körív hossz osztva a kör sugarával adja a radiánban mért szög definícióját, úgy a szteradianban mért térszög definíciója: a térszöghöz tartozó *gömbfelület*-darab osztva a gömb sugarának *négyzetével*. A (4) egyenlet jobb oldalán tehát éppen az  $ABC$  gömbháromszöghöz tartozó  $\Omega$  térszög szerepel, azaz a végeredmény ebbe az egyszerű alakba írható:

$$\delta = \Omega. \quad (5)$$

Szavakkal: a gömbi háromszög mentén párhuzamosan eltol vektor teljes felületi excesszusa (radiánban



12. ábra

mérve) egyenlő a háromszög által lefedett (és szteradiánban mért) térszöggel.

A (4) egyenlet könnyen általánosítható: érvényesége igazolható előbb tetszőleges gömbi sokszögre, majd tetszőleges zárt görbére a gömbfelületen. Egy gömbi sokszög ugyanis felbontható gömbi háromszögekre (12. ábra). Könnyen belátható, hogy a teljes felületi excesszus megkapható, mint a háromszögekhez tartozó felületi excesszusok összege. Ugyanakkor – triviális módon – a teljes terület is a háromszögek területének összegeként adódik. A (4) egyenlet tehát változatlan formában igaz. Másrészt a gömbfelületen tetszőleges zárt görbe közelíthető – tetszőleges pontossággal – gömbi sokszöggel, azaz a (4) egyenlet a gömb felületén valóban tetszőleges görbére igaz.

Gaussnak a görbült felületek geometriájában elért egyik legfőbb eredménye az volt, hogy talált egy olyan mérőszámot – ezt tiszteletére Gauss-görbületnek nevezük –, amely egyértelműen és pontról pontra jellemzi az adott felület görbültségének mértékét [2]. A probléma nehézsége abból adódik, hogy a görbület-mérőszámtól elvárjuk: a felület deformációmentes változtatása – mint például egy sík lap felgörgetése hengerré – „ne tudja becsapni”: egy újságlap a lényegét tekintve akkor is sík felület, amikor legyet akarunk vele agyonütni.

A Gauss-görbület kiszámításának módját a következő gondolat kísérlet illusztrálja: az adott pontban húzzuk meg a felület érintősíkját. Állítsunk erre az

érintősíkra merőleges síkokat az összes létező irányban. Ezeknek a merőleges síkoknak és a görbült felületnek a metszsvonalai síkgörbék, amelyeknek az adott pontban meghatározható a görbületi sugaruk. A végtelen sok merőleges síkhoz végtelen sok síkgörbe tartozik, mindegyikhez 1-1 görbületi sugár. Ezeket a görbületi sugarakat előjelesen értelmezzük, attól függően, hogy az adott érintőkör középpontja a felület „alatt” vagy „fölött” helyezkedik-e el. A végtelen sok görbületi sugár érték között lesz egy (előjelesen) legkisebb és egy legnagyobb:  $R_{\min}$  és  $R_{\max}$ . Gauss zseniális meglátása az volt, hogy a

$$K \equiv \frac{1}{R_{\min} R_{\max}} \quad (6)$$

mennyiség tökéletesen megfelel a céloknak. Igazi mérőszáma a felület adott pontban értelmezett görbületének, ráadásul előjeles mennyiség. Nem csak síkra, hanem – a sík felületté torzításmentesen kiteríthető – hengerfelületre is zérust ad (utóbbi esetben  $R_{\max} = \infty$  miatt) Nyeregfelületre negatív szám, gömbfelületre pozitív. Hangsúlyozandó, hogy  $K$ , a Gauss-görbület, pontról pontra értelmezett mennyiség, csak éppen gömbfelület esetén minden pontra ugyanaz:  $K = 1/R^2$ . Ez utóbbi összefüggéssel a (4) egyenlet a következő alakba írható:

$$\delta = TK. \quad (7)$$

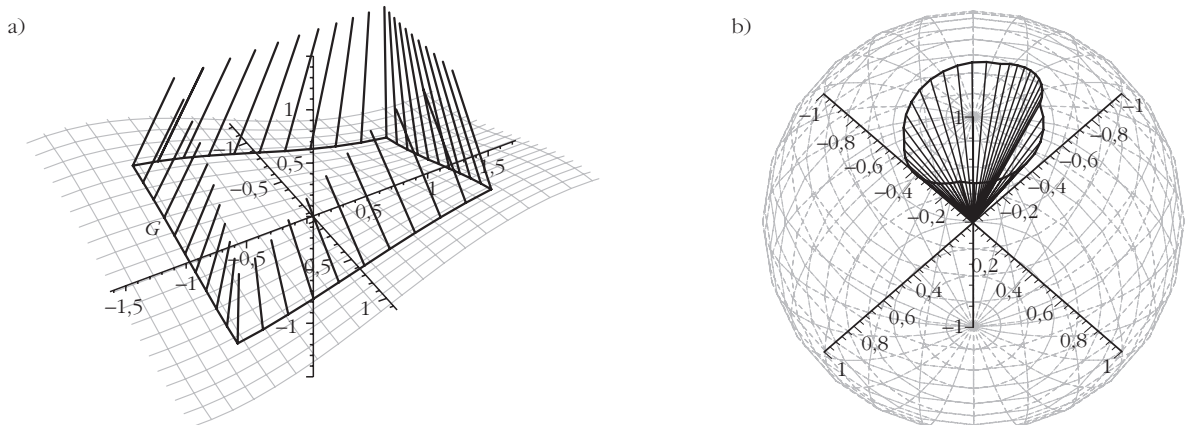
Ez a felírásmód csak állandó görbületű felületekre (a gömbre, és a később tárgyalandó pseudoszférra) alkalmazható. Tetszőleges görbült felületre így általánosítható: a felületen, adott zárt görbe mentén párhuzamosan eltolt vektor teljes felületi excesszusa egyenlő a Gauss-görbületnek a görbe által körülzárt felületre számított integráljával:

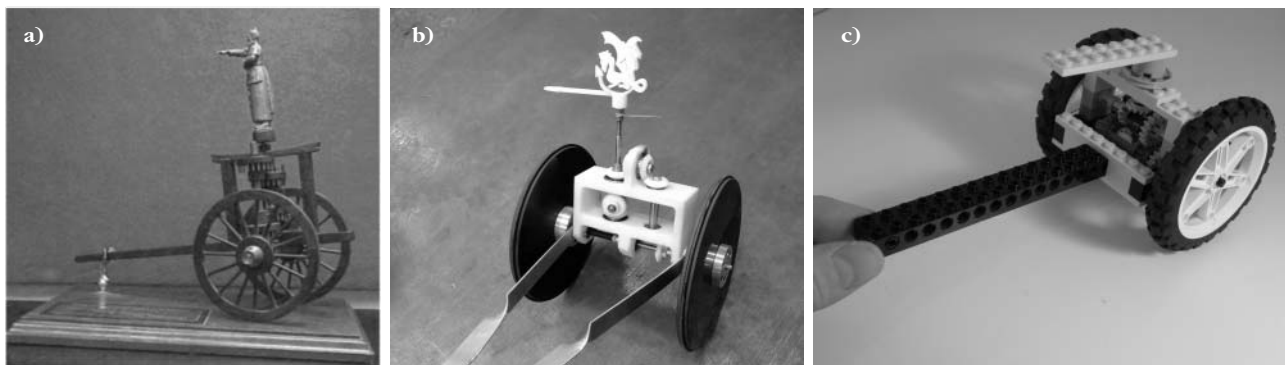
$$\delta = \int_T K dT. \quad (8)$$

*Ez a Gauss–Bonnet-tétel.*

Érdekesség, hogy a Gauss–Bonnet-tételnek az (5) egyenlet változtatás nélkül, általánosan használható alakját adja. Ilyenkor, tetszőleges (nem gömbi) gör-

13. ábra





14. ábra

bült felület esetén, az (5) jobb oldalán szereplő  $\Omega$  térszöget a 13. ábra szerint értelmezzük: amint a görbült felület normál egységvektora végigvándorol a  $G$  zárt görbén, ugyanezek a normál egységvektorok egy egységgömb középpontjából kiindítva egy másik zárt görbét írnak le az egységgömb felületén. Ennek az egységgömb felületén kialakult zárt alakzatnak a területe adja  $\Omega$ -t (egyben a  $G$  görbéhez tartozó  $\delta$  felületi excesszust, egyben az eredeti görbült felület Gauss-görbületének a  $T$  felületre számított integrálját).

A 13.a ábra az

$$\mathbf{r}(u, v) = \begin{bmatrix} u \\ v \\ \frac{1}{2} \sin(u) \sin(v) \end{bmatrix}$$

felületet és az  $-0,8 \leq u \leq 0,7$ ,  $-1 \leq v \leq 1,1$  tartomány határán az

$$\mathbf{n} = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right|}$$

normál egységvektorokat szemlélteti, a tartomány úgynevezett gömbi képét (azaz az egység sugarú gömb középpontjából indított normál egységvektorok végpontjai által kijelölt alakzatot) pedig a 13.b ábra mutatja.

Szellemes technikai megoldásokkal vagy egyszerű fizikai elvek kihasználásával többféle olyan eszköz konstruálható, amelyek – adott felület adott görbéje mentén elmozogva – ténylegesen megvalósítják vektorok párhuzamos eltolását. (Itt a „vektort” például egy a felület érintősíkjában adott irányban álló rúdnak képzeljük el, amely az eszköz többi részéhez képest elfordulhat, de mindig a felület érintősíkjában marad.<sup>1</sup>) Az ilyen eszközökkel kétféle alapkísérlet is végezhető: (1) adott felületen adott zárt görbe mentén végigtolva az eszközt, a „vektor” teljes elfordulásából megkapható a felületi excesszus, és így belső méréssel meghatározha-

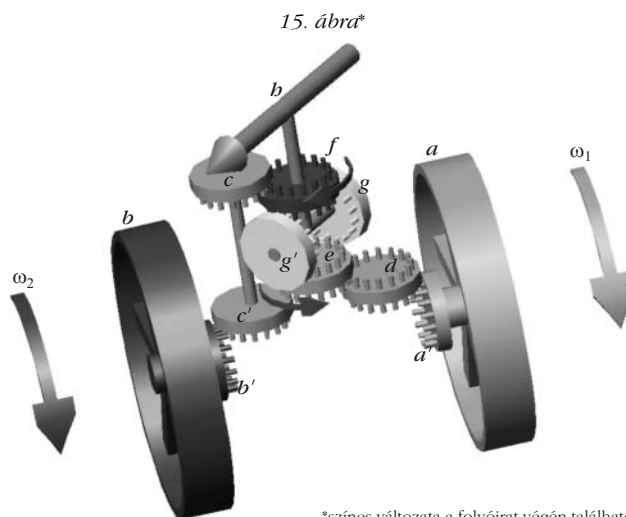
tó az integrált Gauss-görbület; (2) ügyeskedve úgy végigtolva az eszközt a felületen, hogy a „vektor” orientációja (az eszközhöz képest) ne változzon, meg lehet találni a felület geodetikus vonalait.

## A kínai délirányt jelző kordé

A délirányt jelző kordé [3–5] nevű ókori kínai találmány – egyes feljegyzések szerint i.e. 2634-ben (!) találta fel a „Sárga császár”, a nagy birodalom akkori uralkodója – a kietlen terepen utazók tájékozódását segítette. Szerkezetének legfontosabb része egy briliáns műszaki lelemény, a fogaskerék differenciál (amely a gépkocsik mindmáig fontos szerkezeti része). A délirányt jelző kordé egy, a British Museum-ban kiállított modellje a 14.a ábrán látható. A működő szerkezet felső részén álló szobor kinyújtott karja a jármű mozgásirányától függetlenül állandó irányba mutatott. (A kordé indulásakor tetszőleges alapirányt lehet választani, a korabeli kínai navigáció szerint azonban a figura a déli világtájt jelezte.)

A 14.b képen egy általunk készített modell látható. Az interneten számos LEGO-változat található, ezek egyikét is összeraktuk (14.c ábra).

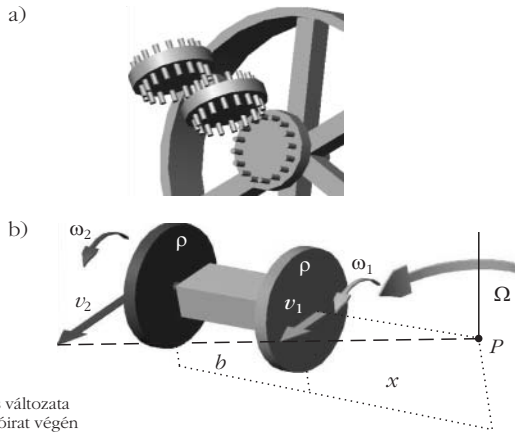
A szerkezet eredeti verziójának egyszerűsített vázlatát a 15. ábra szemlélteti. Az eredeti mechanizmusban a fogaskerek legrégebbi alakjai, az úgynevezett



15. ábra\*

\*színes változata a folyóirat végén található

<sup>1</sup> Ez a megjelenítés annyiban félrevezető, hogy egy valóságos vektor „kezdő-” és „végpontja” ugyanabban a pontban van.



\*színes változata a folyóirat végén

16. ábra\*

homlokcsapos vagy pálcás fogazatok találhatók. Az  $a$  és  $b$  jelű, azonos átmérőjű kereken gördül a szekér; a bal és jobb oldali kerek szögsebessége  $\omega_2$ , illetve  $\omega_1$ . A fogaskerekek azonos átmérőjűek, homlokfelületükön megegyező osztású pálcákból épülnek fel. A koronaszerű kialakítás lehetővé teszi mind a párhuzamos, mind a merőleges tengelyrendezésű kerek kapcsolódását (16.a ábra). (Az ábrán a fogaskerekek tengelyeit nem tüntettük fel.)

Azonos alakú fogaskerekek esetén a bal oldali kordékerek a hozzákapcsolt  $b'$ , a két részből álló  $c$ , valamint az  $f$  jelű fogaskerekeket  $\omega_2$  szögsebességgel hajtja. Hasonlóképpen a jobb oldali kerék a vele összekapcsolt  $a'$ , valamint a mindkét homlokfelületükön fogazott  $d$  és  $e$  jelű fogaskerekeket  $\omega_1$  szögsebességgel forgatja. A felsorolt kerek mindegyike a szerkezethez rögzített tengelyek körül foroghat.

A csúszás nélkül gördülő, azonos  $\rho$  sugarú kerek talajjal éppen érintkező pontjai pillanatnyi nyugalomban vannak, a kerek középpontjai pedig  $v_1 = \omega_1 \rho$ , illetve  $v_2 = \omega_2 \rho$  sebességgel mozognak (16.b ábra). Ha például  $\omega_1 < \omega_2$ , a jármű a  $P$  pont körül  $\Omega$  szögsebességgel elfordul:

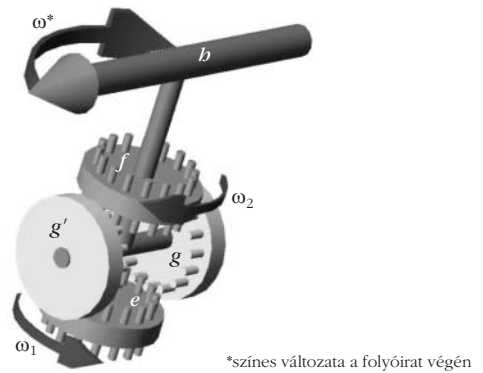
$$\Omega = \frac{v_2 - v_1}{b} = \frac{\rho}{b} (\omega_2 - \omega_1), \quad (9)$$

ahol  $b$  a kerek nyomtávolsága.

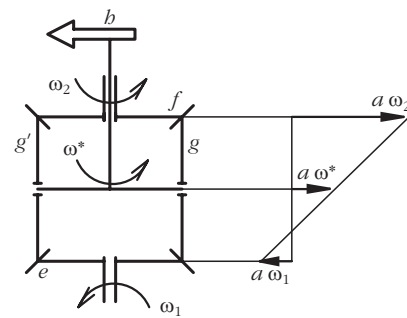
A szerkezet legérdekesebb része az  $e$ ,  $f$ ,  $g$  és  $g'$  jelű fogaskerekekből felépülő differenciálmű (17. ábra).

Az  $e$  és  $f$  fogaskerekek a kordéhoz rögzített függőleges tengely körül foroghatnak, a  $g$  és  $g'$  kereket hordozó vízszintes tengely azonban az  $e$  és  $f$  kerek közös tengelyvonala körül képes elfordulni. A  $g$  és  $g'$  kereket hordozó vízszintes tengelyhez kapcsolódik az állandó irányt jelző  $b$  kar. Az  $f$  kereket a kordé bal oldali kerékrendszere  $\omega_2$  szögsebességgel, az  $e$  jelű fogaskereket pedig a jobb oldali kerékcsoport ( $-\omega_1$ ) szögsebességgel hajtja. Azonos méretű fogaskerekek esetén a  $g$  és  $g'$  jelű fogaskerekek középpontjai

$$\omega^* = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \quad (10)$$



\*színes változata a folyóirat végén



17. ábra\*

szögsebességgel keringenek az  $f$  és  $e$  kerek tengelyei körül. (9) és (10) összevetéséből látható, hogy  $ba$  a kordé kerek  $2\rho$  átmérője megegyezik a  $b$  nyomtávval, az  $\omega^*$  szögsebességgel keringő tengelyhez kapcsolt  $b$  irányjelző éppen a jármű  $\Omega$  pillanatnyi kanyarodási szögsebességével ellentétes mértékben fordul el. Ez azt jelenti, hogy – hacsak a kerek nem csúsznak meg – bármilyen pályán is haladjon a jármű, a szobor mindig a jármű pillanatnyi kanyarodásával ellentétesen fordul, a jelző kar tehát mindvégig az indulásnál beállított irányba mutat.

Bár elemzésünket sík felületi mozgást feltételezve végeztük el, bizonyítható, hogy a kordét bármilyen felület bármely zárt görbéje mentén csúszásmentesen gördítve a szobor karja párbuzamos eltolást végez. A kordé használatával tehát elvileg vizsgálható a Gauss–Bonnet-tétel<sup>2</sup>, ennek azonban az a feltétele, hogy a  $b$  nyomtávolság sokkal kisebb legyen, mint a vizsgálan-

<sup>2</sup> A délirányt jelző kordé differenciálgeometriai alkalmazhatóságának eszméje világosan felsejlik Hilbert páratlan geometriai ismeretterjesztő művében. A kordéről szóló első európai beszámoló Herbert Allen Giles (1845–1935) angol diplomata és sinológus 1909-ben közzétett ismertetője. A beszámolót azonban – a szerzők véleménye szerint – Hilbert aligha olvasta.

„A geodetikus vonalakat úgy állíthatjuk elő, hogy valamely végtelen kis görbévet a felületen mindig »egyenest előre« tolunk. Megköveteljük, hogy  $A$  és  $B$  pályái egyenlő hosszúak legyenek, és hogy e pályák mindegyike  $AB$ -re merőleges legyen. Ez a pálya, amelyet ekkor  $AB$  középpontja ír le, tetszőleges pontossággal geodetikus, ha az  $AB$  görbévet elég kicsinynek választjuk. Ebből a definícióból valószínű, hogy mindegyik pontból mindegyik irányba pontosan egy geodetikus vonal indul ki. E definíció szerint továbbá a geodetikus vonalakat úgy lehet megközelítőleg előállítani, hogy a felületen lehetőleg kis kétkerékű kocsit gördítünk, amelynek kerekai mereven össze vannak kötve a közös tengelyükkel, tehát azonos a fordulatszámuk.”

Forrás: D. Hilbert, S. Cohn-Vossen: Szemléletes geometria. Gondolat Kiadó, 1982, 252 o., Strommer Gyula fordítása.

dó felület bármely görbületi sugara. Másképp megfogalmazva: a kordé karakterisztikus méretskáláján a felület nem lehet túl görbült vagy „göcsörtös”.

Ennek illusztrálására nézzünk egy egyszerű példát, amikor a kordé egy gömb szélességi köre mentén gurul, majd a továbbiakban elemezzük a mozgást az úgynevezett pszeudoszférán.

A kordé mozgása gömbfelületen

A differenciálmű által mozgatott szobor szögelfordulása a szekérvázhoz képest a mozgás  $T$  időtartama alatt

$$\Phi = \int_0^T \omega^* dt. \quad (11)$$

A kerekek szögelfordulásai a szekérvázhoz képest hasonlóképpen

$$\Phi_1 = \int_0^T \omega_1 dt, \quad (12)$$

$$\Phi_2 = \int_0^T \omega_2 dt.$$

A kerekek csúszás nélkül legördült ívhosszai

$$\begin{aligned} S_1 &= \rho \Phi_1, \\ S_2 &= \rho \Phi_2. \end{aligned} \quad (13)$$

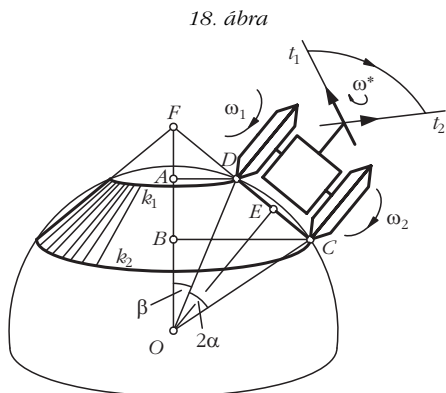
Mivel

$$\Phi = \int_0^T \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} dt, \quad (14)$$

a szobor  $\Phi$  szögelfordulása, valamint a kerekek által megtett  $S_1$  és  $S_2$  utak kapcsolata:

$$\Phi = \frac{S_1 - S_2}{2\rho}. \quad (15)$$

Gördüljön a kordé  $\omega_1$  szögsebességgel forgó kereke az  $O$  középpontú, ismeretlen  $R$  sugarú gömb  $k_1$  körvonalán, az  $\omega_2$  szögsebességgel forgó kerék pedig a  $k_2$  körvonalán (18. ábra).



18. ábra

Legyen  $AD = r_1$ ,  $BC = r_2$ . A korábbiakkal összhangban  $CD = b = 2\rho$  a nyomtáv. A  $k_2$  kör sugara a geometriai viszonyokból (elemi trigonometriai azonosságokat alkalmazva) könnyen megkapható:

$$\begin{aligned} r_2 &= r_1 \sqrt{1 - \left(\frac{b}{R}\right)^2} \left[ 1 - \left(\frac{b}{2R}\right)^2 \right] + \\ &+ b \sqrt{1 - \left(\frac{r_1}{R}\right)^2} \sqrt{1 - \left(\frac{b}{2R}\right)^2} \end{aligned} \quad (16)$$

A kerekek által megtett utak az  $r_1$ , illetve  $r_2$  sugarú körök kerületei:

$$\begin{aligned} \rho \Phi_1 &= 2\pi r_1, \\ \rho \Phi_2 &= 2\pi r_2. \end{aligned} \quad (17)$$

A (15)–(17) összefüggések alapján, a Maple R14 formulamanipulációs software alkalmazásával a

$$\begin{aligned} \frac{\rho \Phi}{\pi} - r_1 + \\ + \frac{2\rho \sqrt{R^2 - \rho^2} \sqrt{R^2 - r_1^2} + r_1 R^2 - 2r_1 \rho^2}{R^2} = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

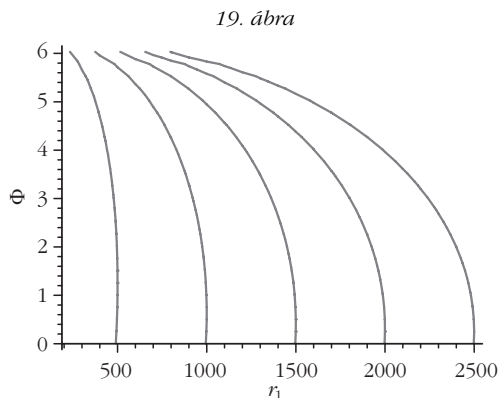
egyenlet adódik. A (18) egyenletet a gömb keresett  $R$  sugarára megoldva:

$$R = \pm \frac{2\sqrt{\pi} \sqrt{\pi \rho^2 - \Phi r_1 \rho + r_1^2 \pi}}{\sqrt{4\pi^2 - \Phi^2}}. \quad (19)$$

A 19. ábra a  $\rho = 100$  mm keréksugarhoz az  $r_1$  sugár és a  $\Phi$  szög függvényében az  $R =$  állandó függvényeket szemlélteti.

Legyen a továbbiakban  $r = r_1$ . A (20) formulából nyilvánvaló, hogy  $\Phi \rightarrow 2\pi$  esetén  $R \rightarrow \infty$ , vagyis a síkon egy teljes kört megtevő kordé irányjelzője pontosan egy teljes körfordulást végez. A kordé kerekeinek  $\rho$  sugarát – és egyúttal a  $b = 2\rho$  nyomtávot – 0-ra csökkentve a (19) határértéke:

$$\lim_{b \rightarrow 0} R = \frac{2r\pi}{\sqrt{4\pi^2 - \Phi^2}}. \quad (20)$$



19. ábra





20. ábra

A (20) kifejezésből a szobor elfordulása a szekérvázhoz képest ekkor tehát

$$\Phi = \pm \frac{2\pi \sqrt{R^2 - r^2}}{R}. \quad (21)$$

Az  $R$  sugarú gömbfelület  $r$  sugarú körvonala által határolt göbbsüveg felülete

$$T = 2\pi R \left( R - \sqrt{R^2 - r^2} \right). \quad (22)$$

(21) és (22) összevetéséből látszik, hogy a  $b \rightarrow 0$  határesetben a kordé szobrának  $\Phi$  szögű elfordulása valóban kimutatja a Gauss–Bonnet-tétel szerinti  $\delta$  felületi excesszust:

$$\delta = \frac{T}{R^2} = 2\pi \left( 1 - \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{R} \right), \quad (23)$$

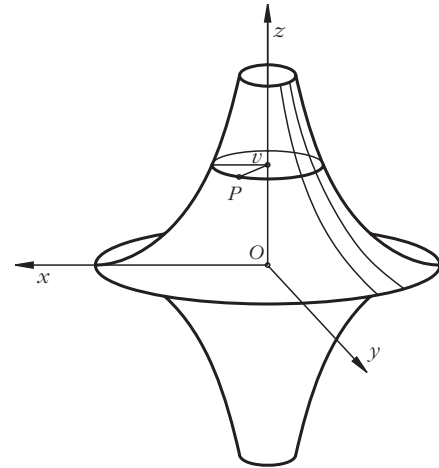
tehát

$$\delta = 2\pi - \Phi. \quad (24)$$

A 14.b ábrán szereplő kordéval az ELTE TTK Lágymányosi Campus központi épületének előcsarnokában álló földgömbön ellenőrző méréseket végeztünk (20. ábra).

A  $\rho = 103$  mm kerék sugarú,  $b = 206$  mm tengelytávú kordét a jó közelítéssel gömbnek tekinthető glóbuszon körbe gördítve,<sup>3</sup> az irányjelző  $\Phi = 285^\circ$  szögelfordulása mellett az egyik kereke  $n = 7^{1/3}$  körfordulást végzett. A vizsgált kerék ekkor az

<sup>3</sup> Az aulában tartózkodók csendes derűtségére a földgömböt – a működtető motor hibája miatt – a déli félteke óceánjain gördülő kordét helyben tartva, kézzel forgattuk körbe.



21. ábra

$$r_1 = \frac{2\rho\pi n}{2\pi} = 755,33 \text{ mm}$$

sugarú körön mozgott. A (19) formulát alkalmazva a gömb sugarára  $R \approx 1107$  mm-t kaptunk. (Ellenőrzésül: a földgömb egyenlítői kerülete a modell talpán látható felirat szerint 6660 mm, ez alapján a glóbusz sugarára  $R^* \approx 1060$  mm adódik.)

A pseudoszféra<sup>4</sup>

A gömb mellett egy további állandó,  $K = -1$  Gauss főgörbületű felület a pseudoszféra. Az  $[1,0,0]$  ponton<sup>5</sup> átmenő traktrix görbe  $z$  tengely körül forgatásával előállított pseudoszféra (21. ábra) egyenlete:

$$\mathbf{r}(u, v) = \begin{bmatrix} \operatorname{sech}(u) \cos(v) \\ \operatorname{sech}(u) \sin(v) \\ u - \tanh(u) \end{bmatrix}. \quad (25)$$

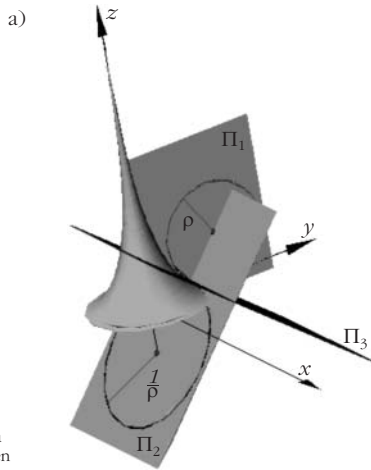
A pseudoszféra első rendű Gauss-féle főmennyiségei a definiáló összefüggésekkel ( $r_i$  a (25) vektor  $i$ -edik komponense):

$$\begin{aligned} E &= \left( \frac{\partial r_1}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial r_2}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial r_3}{\partial u} \right)^2 = \frac{\sinh(u)}{\cosh(u)^2}, \\ F &= \frac{\partial r_1}{\partial u} \frac{\partial r_1}{\partial v} + \frac{\partial r_2}{\partial u} \frac{\partial r_2}{\partial v} + \frac{\partial r_3}{\partial u} \frac{\partial r_3}{\partial v} = 0, \\ G &= \left( \frac{\partial r_1}{\partial v} \right)^2 + \left( \frac{\partial r_2}{\partial v} \right)^2 + \left( \frac{\partial r_3}{\partial v} \right)^2 = \frac{1}{\cosh(u)}. \end{aligned} \quad (26)$$

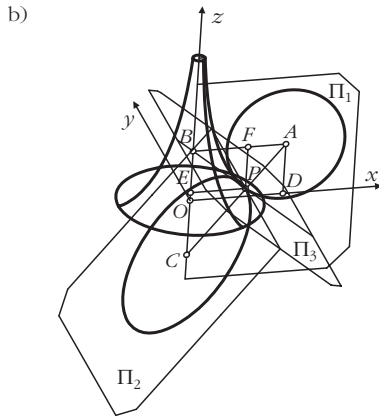
A pseudoszféra felszíne az  $a \leq u < \infty$ ,  $0 \leq v \leq 2\pi$  határok között:

<sup>4</sup> Lásd például Coxeter, H.S.M.: *A geometriák alapjai*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1987.

<sup>5</sup> A vektor valamennyi komponensét  $q > 0$  számmal szorozva, a  $[q, 0, 0]$  ponton átmenő traktrix forgatásával adódó pseudoszféra egyenletét nyerjük. Az egyszerűbb tárgyalásmód érdekében azonban az „egység” objektumokat vizsgáljuk.



\*színes változata a folyóirat végén



22. ábra\*

$$A = \int_0^{2\pi} \int_a^{\infty} \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv = \frac{2\pi}{\cosh(a)}. \quad (27)$$

A  $\Pi_1$  jelű  $x$ - $z$  koordináta-síkban ( $v = 0$ ) a pszeudoszféra traktrix meridián görbéjének egyenlete:

$$\begin{aligned} x &= \operatorname{sech}(u), \\ z &= u - \tanh(u). \end{aligned} \quad (28)$$

A traktrix görbületi sugara (az  $u$  változó szerinti deriválásokat vesszővel jelölve):

$$\rho = \frac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}} = -\sinh(u) \quad (29)$$

és a görbületi kör  $A$  középpontjának koordinátái:

$$\begin{aligned} \xi &= x - x' \frac{x'^2 + y'^2}{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}} = \cosh(u), \\ \eta &= y + y' \frac{x'^2 + y'^2}{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}} = u. \end{aligned} \quad (30)$$

Mivel a pszeudoszféra forgásfelület, az  $y = 0$  helyzetű  $P$  pontjához tartozó  $\Pi_3$  érintősík merőleges  $\Pi_1$ -re. A  $\Pi_1$  és  $\Pi_3$  síkokra egyaránt merőleges  $\Pi_2$ , a felület normálmetszeti síkja. Mivel a pszeudoszféra Gauss-görbülete  $K = -1$ , a  $\Pi_2$  síkmetszetben a görbületi sugár:

$$\frac{1}{\rho} = \operatorname{cosech}(u). \quad (31)$$

A geometriai viszonyokat a 22. ábrák szemléltetik. A 22.b ábra jelöléseivel

$$\begin{aligned} \overline{AP} &= \rho = -\sinh(u), \\ \overline{CP} &= \frac{1}{\rho} = \operatorname{cosech}(u) = -\frac{1}{\sinh(u)}, \\ \overline{AF} &= \cosh(u) - \operatorname{sech}(u) = \cosh(u) - \frac{1}{\cosh(u)}, \quad (32) \\ \overline{AC} &= \overline{AP} + \overline{CP} = -\sinh(u) - \frac{1}{\sinh(u)}, \\ \overline{AB} &= \cosh(u). \end{aligned}$$

Az  $APF$  és  $ACB$  hasonló derékszögű háromszögek megfelelő oldalainak aránya:

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}. \quad (33)$$

A hiperbolikus függvények definíciói alapján nyilvánvaló, hogy

$$\frac{\cosh(u) - \frac{1}{\cosh(u)}}{-\sinh(u)} = \frac{\cosh(u)}{-\sinh(u) - \frac{1}{\sinh(u)}}. \quad (34)$$

Azaz a  $\Pi_2$  síkmetszet görbületi körének  $C$  középpontja éppen a  $z$  tengelyre esik.

A  $P$  ponthoz tartozó parallel kör sugara (28) szerint,  $u = a$  helyettesítéssel

$$r = \overline{EP} = \operatorname{sech}(a) = \frac{1}{\cosh(a)}. \quad (35)$$

A 22.b ábra jelöléseivel a gömbre levezetett (23) összefüggés:

$$\delta := 2\pi \left[ 1 - \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{\sinh(a)}\right)^2 - \left(\frac{1}{\cosh(a)}\right)^2}}{\frac{1}{\sinh(a)}} \right], \quad (36)$$

egyszerűsítve

$$\delta := 2\pi \frac{\cosh(a) - 1}{\cosh(a)} = 2\pi - \frac{2\pi}{\cosh(a)}. \quad (37)$$

Ezzel a pszeudoszféra példáján is illusztráltuk a Gauss-Bonnet-tétel állítását.

A pszeudoszféra  $r = \overline{EP}$  sugarú parallel körén gördített köré mérési eredményei nyilván megegyeznek a  $R = \overline{CP}$  sugarú gömb  $r$  sugarú parallel körén nyert

adatokkal.<sup>6</sup> A gömbfelület és a pszeudoszféra lakói azonban – ha csak *erre az egy* mérésre támaszkodnak – a kordé alkalmazásával nem tudják világaik erősen eltérő alakjait megkülönböztetni.

<sup>6</sup> Egy olyan kúpfelületen is ugyanezt a mérési eredményt kapnánk, amely érinti a gömböt és a pszeudogömböt a szóban forgó kör mentén. Ez a felület a kúp csúcsának a kivételével mindenütt görbületlen (sík)! (Lásd erről Hráskó Péter: *Relativitáselmélet*. Typo-text, Budapest, 2002, 401. oldalát.)

## Irodalom

1. J. von Bergmann, H. Ch. von Bergmann: Foucault pendulum through basic geometry. *Am. J. Phys.* 75/10 (2007) 888.
2. Lánzos Kornél: *A geometriai térfogalom fejlődése*. Gondolat Kiadó, Budapest, 1976.
3. Laczik B: A délirányt jelző kordé. *Term. Vill.* (2009) 2.
4. M. Santander: The Chinese south-seeking chariot: a simple mechanical device for visualizing curvature and parallel transport. *Am. J. Phys.* 60/9 (1992) 782.
5. F. Duditz, D. Diaconescu: Ein sinnreiches Zahnräderdifferential aus dem antiker China. *Maschinenbautechnik* 36/6 (1987) 268.

# AZ ELSŐ SOLVAY-KONFERENCIA CENTENÁRIUMÁN – I.

Radnai Gyula  
ELTE Anyagfizikai tanszék

*Simonyi Károly A fizika kultúrtörténete* című könyvében sok érdekes dokumentumot, fotót közöl. Az egyik legérdekesebb ezek közül, amelyik az első Solvay-konferencia résztvevőiről készült. A fotót egy brüsszeli fényképész, bizonyos *Benjamin Couprie* készítette egy szerencsés pillanatban. *Eduardo Amaldi* (1908–1989) olasz fizikus, az 1970-es és 1973-as Solvay-konferencia elnöke szerint ez talán minden idők leghíresebb fényképe, amit fizikusokról készítettek. A helyet és az időpontot is jól ismerjük: Brüsszel, Hotel Metropole, 1911. október 30. – november 3. Itt és ekkor tartották az első Solvay-konferenciát (*1. kép*).

## A konferencia létrejötte

A SOLVAY márkanév ma már egy multinacionális vegyi konsernt jelöl, amelynek központja Brüsszelben van és 40 országban 17 ezer embert foglalkoztat. Megalapítója *Ernest Solvay* (1838–1922) belga iparmágnás, aki az ipari méretű szódagyártás olcsó és hatékony módszerét dolgozta ki. Nem járt egyetemre (elég sokat betegeskedett), viszont nagybátyja kémiai üzemében sok jó ötlettel állt elő és nemsokára önállósította magát. 1872-ben szabadalmaztatta ipari szódagyártási találmányát, gyárakat létesített Németországban, Angliában, Amerikában és viharos gyorsasággal meggazdagodott (*2. kép*).

*1. kép.* Az első Solvay konferencia résztvevői. Ülnek (balról jobbra): Nernst, Brillouin, Solvay, Lorentz, Warburg, Perrin, Wien, Mme Curie, Poincaré. Állnak (balról jobbra): Goldschmidt, Planck, Rubens, Sommerfeld, Lindemann, de Broglie, Knudsen, Hasenöhr, Hostelet, Herzen, Jeans, Rutherford, Kamerlingh-Onnes, Einstein, Langevin.

