A tanulók mindkét korcsoportban minden mérésről készítettek saját fényképfelvételeket, néhány esetben digitális fényképezőgéppel mozgóképet. A mérések után számítógépek segítségével csoportmunkában jegyzőkönyveket írtak, amelyek tartalmazták a mérés leírását, a mérési adatokat, a szükséges számításokat és grafikonokat, valamint a következtetéseket és magyarázatokat.

A csoportmunkát segítette, hogy a tanulók a foglalkozások közötti szünetekben, a Balaton partján lévő tábor előnyeit kihasználva változatos programokkal töltötték szabad idejüket.

A Műhely eddigi munkájának zárása

A program folytatásaként az októberi szülői értekezlet napjára a műhelytagok egy 45 perces bemutatóval készültek fel, amelyre meghívtuk a szülőket és az érdeklődő kollégákat. Mindkét csoport két-két számítógépes bemutatót állított össze (amelyek kivonata a www.vpg.hu oldalon megtekinthető), az egyik a biológia, a másik a fizika témákhoz kapcsolódott. A szülők ezen kívül a tábori munkákból, fényképekből, grafikonokból álló két színes tablót is megtekinthették, amelyeket az iskola aulájában állítottuk ki. A szeptemberi műhelyfoglalkozásokon a gyerekek a tablók és a prezentációk elkészítésével foglalkoztak, illetve kitöltöttek egy kérdőívet, amelyben megkérdeztük véleményüket a Műhely eddigi munkájáról és a lehetséges folytatásról. Ezzel a Műhely eddigi szakmai munkája lezárult.

A műhelymunka folytatása

Az Oktatásért Közalapítvány NTP-OKA-II./1 pályázatán nyert támogatás segítségével a 2010/2011-es tanév tavaszi félévében folytatjuk a műhelytagokkal a munkát. Korcsoportváltás miatt a *junior* és a *szenior* csoportban is vannak távozó, illetve újabb tagok. A program januártól májusig tart, a diákok heti rendszerességgel, szakköri keretek között fognak dolgozni. Változás, hogy a fizika és a biológia mellett a *junioroknál* megjelenik a *matematika-,* a *szenioroknál* az *informatika*-foglalkozás is. A *juniorok* központi témája a Nap és a hozzá kapcsolódó változások. Ezen belül a gyerekek megismerkednek az időmérés klasszikus módszereivel, napórát készítenek, elsajátítják az ehhez szükséges olyan matematikai módszereket, amelyeket tanórai keretek között nem tanulnak, de megértésük korosztályuknak nem okoz gondot. Biológiából a Nap ciklusainak és az élőlények életciklusainak a kapcsolatát vizsgálják. A *szeniorok* központi témája az áramlások és ehhez a témához kapcsolódó mérések számítógépes kiértékelése. Szeretnénk, hogy a diákok megtapasztalják a fizika (Hagen–Poiseuille-törvény) és biológia (emberi vérkeringés, ozmózis) tudományterületeinek szoros összefonódását és a mérések kiértékelésénél megismerkedjenek a Gnuplot diagramrajzoló programmal.

Irodalom:

1. A természettudományos közoktatás javításáért. *Fizikai Szemle 59* (2009) 26–34. http://www.kfki.hu/fszemle/archivum/fsz0901/termtudokt0901.html
2. Veres Pálné Gimnázium fizika munkaközössége: http://vpg.hu/site.php?inc=0&menuId=23

A FA- ÉS A VASGOLYÓ HEVESEN VERSENYZETT

Kis Tamás
Eötvös József Középiskola, Heves

„A templomtoronyból egyszerre ejtünk le két egyenlő térfogatú fa- és ólomgolyót.

- A két golyó egyszerre ér földet.
- Az ólomgolyó ér le hamarabb.
- A fagolyó esik le korábban."

(Öveges-verseny 2007, I. forduló)

Tanítványaimmal e feladat megoldása volt a témánk néhány fizikaszakkörön a hevesi Eötvös József Középiskolában. Írásomban tapasztalatainkat foglaltam össze.

Vizsgáljuk a golyóra ható erőket! Lefelé irányul a nehézségi erő (mg), felfelé pedig a közegellenállási erő (F_k) és a felhajtóerő (F_f). Newton II. törvénye alapján a következő mozgásegyenletet írhatjuk fel:

$$ma = mg - F_f - F_k$$

$$ma = mg - \rho_{lev} V g - \frac{1}{2} c_l A \rho_{lev} v^2$$

A közegellenállási erő kis sebességeknél nem a sebesség második hatványával arányos, hanem attól lineárisan függ. A golyók ugyan álló helyzetből indulnak, de egy toronyból való esés során a négyzetes függés dominál, tehát nem okoz nagy hibát, ha az elsőfokú résztől eltekintünk. – A felírt összefüggésből a gyorsulás kifejezhető:

$$a = g - \frac{\rho_{lev} V g}{m} - \frac{c_l A \rho_{lev} v^2}{2\,m} \qquad (1)$$

Mivel a mozgás során a sebesség (az állandó, egyensúlyi értékhez aszimptotikusan közeledve) nő, ezért a

Köszönet a segítségért: *Barna András* és *Együd László* tanár úrnak, *Jakab Tibor* fotóművésznek, valamint *Balogh László* és *Marsi László* úrnak a Heves Megyei Vízmű Rt.-től.

gyorsulás sem lehet állandó, a képletben minden más konstans.

Miben különbözik két azonos méretű, de eltérő sűrűségű golyó gyorsulása? A vizsgálathoz kerestünk két alkalmas, nagyon hasonló felületű golyót: az egyik fából, a másik vasból készült.

Ezek jellemzői: $r_{fa} = r_{vas} = 0{,}025$ m; $m_{fa} = 0{,}050$ kg; $m_{vas} = 0{,}533$ kg. Egyéb adatok: $\rho_{lev} = 1{,}29$ kg/m^3 (a levegő sűrűsége 0 °C-on), $c_l = 0{,}45$ (a golyó légellenállási tényezője).

Ezeket az értékeket behelyettesítve az (1) egyenletbe, a két golyó gyorsulására a következő összefüggést kapjuk:

$$a_{fa} = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2} - 0{,}0166\ \mathrm{m/s^2} - (0{,}0114\ \mathrm{1/m})\ v^2$$

$$a_{vas} = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2} - 0{,}00155\ \mathrm{m/s^2} - (0{,}0011\ \mathrm{1/m})\ v^2$$

Eltérés a közegellenállásból és a felhajtóerőből származó tagnál tapasztalható, bár ez utóbbi hatása csak a fagolyónál befolyásolja némileg a gyorsulást. Ezt figyelembe véve:

$$a_{fa} = 9{,}79\ \mathrm{m/s^2} - (0{,}0114\ \mathrm{1/m})\ v^2, \tag{1a}$$

$$a_{vas} = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2} - (0{,}0011\ \mathrm{1/m})\ v^2. \tag{1b}$$

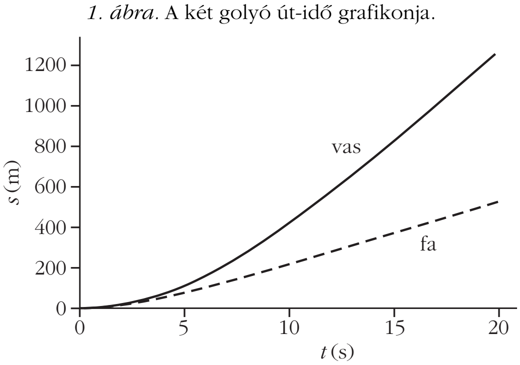
A golyó sebességének növekedése tehát a gyorsulás csökkenését okozza. A sebesség addig változik, amíg a gyorsulás jó közelítéssel 0 m/s^2 nem lesz. Ezután a golyó gyakorlatilag az elért maximális sebességgel egyenletesen halad tovább. Ez az (1a) és (1b) egyenletekből kiszámítható:

$$v_{\max.\,fa} = \sqrt{\frac{9{,}79}{0{,}0114}}\ \mathrm{m/s} \approx 29{,}3\ \mathrm{m/s},$$

$$v_{\max.\,vas} = \sqrt{\frac{9{,}81}{0{,}0011}}\ \mathrm{m/s} \approx 94{,}4\ \mathrm{m/s}.$$

Látható, hogy a vasgolyó nagyobb sebességet érhet el. Továbbá az (1a) és (1b) egyenlet szerint a közegellenállásból származó tagban a v^2 együtthatója a vasgolyó esetén körülbelül egy nagyságrenddel kisebb a fáénál. Mindebből arra következtethetünk, hogy a fagolyó sebessége a mozgás során végig kisebb. Tehát a vasgolyó ér előbb földet! Általánosítva is kimondhatjuk: azonos méretű golyók közül a legnagyobb sűrűségű ér le hamarabb.

1. ábra. A két golyó út-idő grafikonja.



Meg lehet-e adni az esés tetszőleges pillanatában a golyók sebességét, illetve gyorsulását? – Erre a kérdésre nem is olyan egyszerű válaszolni, hiszen a mozgás során mindkét mennyiség változik. A megoldáshoz tudnunk kell, hogy a sebesség a megtett út idő szerinti első, a gyorsulás pedig második deriváltja. Ez alapján az (1a) és (1b) egyenletek a következő alakba írhatók (mértékegységek nélkül):

$$\frac{d^2 s_{fa}}{dt^2} = 9{,}79 - 0{,}0114\left(\frac{ds_{fa}}{dt}\right)^2, \tag{2a}$$

$$\frac{d^2 s_{vas}}{dt^2} = 9{,}81 - 0{,}0011\left(\frac{ds_{vas}}{dt}\right)^2. \tag{2b}$$

Az így kapott differenciálegyenletekben a két golyó út-idő, azaz $s(t)$ függvénye az ismeretlen. Az egyenletekhez tartozik még két kezdőfeltétel, amelyek a golyók eredeti helyét és sebességét adják meg:

$$s(0) = 0, \quad v(0) = 0. \tag{2c}$$

A mozgásegyenletekből származó differenciálegyenletek megoldása néhány ritka kivételtől (például szabadesés, harmonikus rezgőmozgás) eltekintve nagyon nehéz.

A problémát a *Mathematica* nevű programmal oldottuk meg az alábbiak szerint:

```
<<Calculus`DSolve`
utido1=DSolve[{y"[x]==9.79-0.0114y'[x]^2,y[0]==0,y'[0]==0},y[x],x]
utido2=DSolve[{y"[x]==9.81-0.0011y'[x]^2,y[0]==0,y'[0]==0},y[x],x]
sfa[x_]=Factor[Together[PowerExpand[utido1[[1,1,2]]]]]
svas[x_]=Factor[Together[PowerExpand[utido2[[1,1,2]]]]]
vfa[x_]=D[sfa[x],x]
vvas[x_]=D[svas[x],x]
afa[x_]=D[vfa[x],x]
avas[x_]=D[vvas[x],x]
```

Az eredményül kapott függvények természetesen ábrázolhatók. A grafikonokat a jobb tanulmányozhatóság érdekében célszerű hosszabb idejű esésekhez (például 20 s) készíteni.

Az út-idő függvények és a grafikonjaik:

$$s_{fa}(t) = 87{,}72\ \ln[\mathrm{ch}(0{,}334\,t)],$$

$$s_{vas}(t) = 909{,}1\ \ln[\mathrm{ch}(0{,}104\,t)].$$

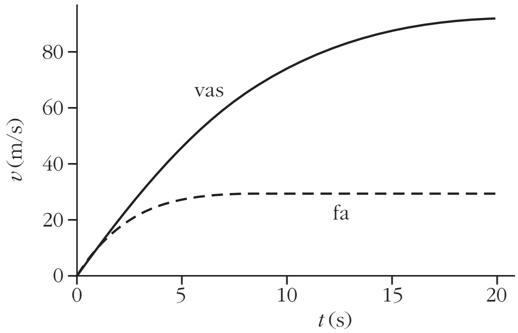
A két golyó közti távolság rohamosan nő. Például 5 s-os esési időnél, vagyis 117,5 m magas torony esetén a vasgolyó 28,7 m-es „előnnyel” ér földet (*1. ábra*).

A sebesség-idő függvények és a grafikonjaik:

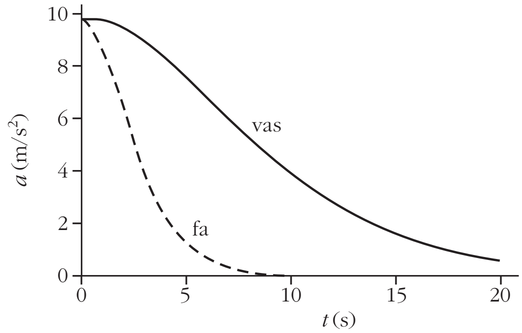
$$v_{fa}(t) = 29{,}3\ \mathrm{th}(0{,}334\,t),$$

$$v_{vas}(t) = 94{,}4\ \mathrm{th}(0{,}104\,t).$$

A két függvény végtelenben vett határértéke megegyezik a korábban, elemi úton meghatározott $v_{\max.fa}$ és $v_{\max.vas}$ értékekkel, ami elgondolásaink helyességére utal (*2. ábra*).



2. ábra. A két golyó sebessége az eltelt idő függvényében.



3. ábra. A két golyó gyorsulás-idő grafikonja.

A gyorsulás-idő függvények és a grafikonjaik:

$$a_{fa}(t) = \frac{9{,}79}{\mathrm{ch}^2(0{,}334\,t)},$$

$$a_{vas}(t) = \frac{9{,}81}{\mathrm{ch}^2(0{,}104\,t)}.$$

A fagolyó gyorsulása 8–10 s után erősen közelít 0-hoz, és ettől kezdve a mozgása egyenletesnek tekinthető. A vasgolyónál ez 25–30 s elteltével következik be (*3. ábra*).

A mozgás további elemzésében sokat segít, ha elkészítjük az út-idő függvények inverzét: $s^{-1}(t) := t(h)$, amivel a torony magasságának ismeretében kiszámítható a golyó esésének ideje. A képlet meghatározásához a következő parancssort kell beírni a *Mathematica* programba:

```
tfa[s_]=Module[{x},Solve[sfa[x]==s,x][[1,1,2]]]
tvas[s_]=Module[{x},Solve[svas[x]==s,x][[1,1,2]]]
```

Az eredményül kapott inverzfüggvények:

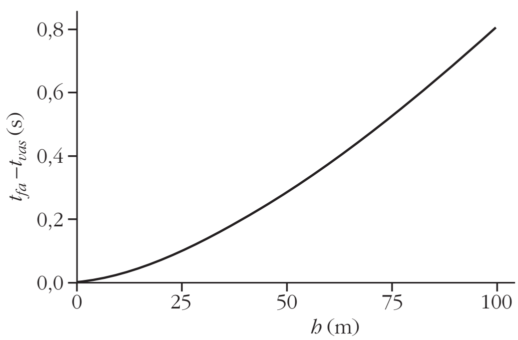
$$t_{fa}(h) = 2{,}993\ \cos^{-1}(e^{0{,}0114\,h}),$$

$$t_{vas}(h) = 9{,}627\ \cos^{-1}(e^{0{,}0011\,h}).$$

Ezek különbsége megadja, hogy mennyi idő telik el a golyók földet érése között: $\Delta t(h) = t_{fa}(h) - t_{vas}(h)$. Az így kapott függvény grafikonja a *4. ábra.*

Végezetül már „csak” az a feladat maradt, hogy valós körülmények között teszteljük eredményeinket… Engedélyt kaptunk arra, hogy Heves város legmagasabb építménye, a Víztorony tetejéről, 37,5 m

4. ábra. A két golyó földet érésének időkülönbsége az ejtés magasságának függvényében.



magasságból ejthessük le a golyókat. Alkalmas eszköz hiányában nem volt lehetőségünk az esési idő pontos meghatározására, ezért más mérési eljárásokat kellett kidolgoznunk. A kísérletet kellemes 19–21 °C-os, szélcsendes időben végeztük el (*1. kép*).

A testek távolságának mérése egy ismert helyzetben

Először határozzuk meg, hogy mekkora előnnyel ér le a vasgolyó! A $t(h)$ függvénnyel kiszámítható a vasgolyó mozgásának ideje a földet érésig: $t_{vas}(37{,}5\ \mathrm{m}) = 2{,}784$ s. Ennyi idő elteltével a golyók távolsága

$$d = 37{,}5\ \mathrm{m} - s_{fa}(2{,}784\ \mathrm{s}) = 4{,}03\ \mathrm{m}.$$

A méréshez le kell fényképezni a golyók esésének utolsó 5–6 méterét úgy, hogy a vasgolyó már közvetlenül a talaj fölött legyen és a képen a fagolyó is feltűnjön. A feladat nem volt egyszerű, hiszen a golyók sebességéből adódóan a felvételre körülbelül 0,02 s áll rendelkezésre! A torony aljában mérőskálát állítottunk fel: egy 2 m magas fehér paravánra 10 cm-en-

1. kép. A vas- és fagolyó ejtése a Víztorony tetejéről.

ként 1 dm széles fekete csíkokat ragasztottunk. Az így elkészült „méterrúd” elé ejtettük a golyókat. Ezzel lehetővé vált a golyók távolságának meghatározása. 12 ejtést végeztünk a toronyból. Az elkészített körülbelül 60 darab fénykép közül egy olyat találtunk, ami a feltételeknek megfelelt (*2. kép*). A kiértékelés során azt tapasztaltuk, hogy a golyók távolsága d = 5,05 m (emlékeztetőül, a számított érték: 4,03 m).

A testek földet érése között eltelt idő mérése

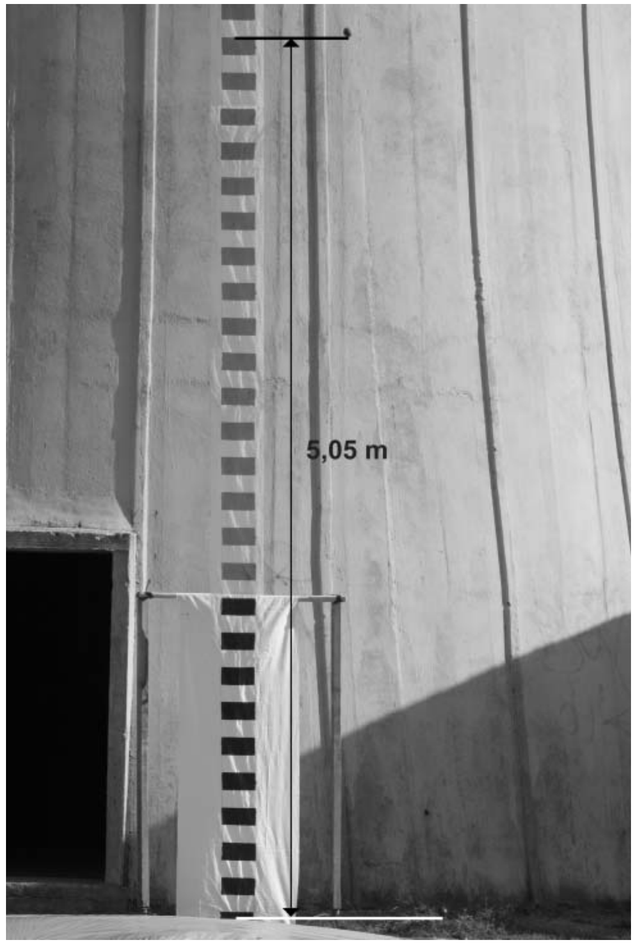
Ezt az időtartamot közvetlenül kiszámíthatjuk a $\Delta t(h)$ függvény segítségével: a Víztoronyból való ejtés esetében

$$\Delta t(37{,}5\ \mathrm{m}) = 0{,}185\ \mathrm{s}.$$

A golyók mozgását videokamerával is rögzítettük. A földet érést kísérő koppanások jól hallhatóak a felvételen, így a köztük eltelt idő számítógépes hangelemzéssel ms pontossággal mérhető. A 7 kiértékelt ejtésnél ez az időtartam: Δt = 0,190±0,007 s-nak adódott (emlékeztetőül, a számított érték: 0,185 s).

✧

A két mérés egyértelműen megmutatta, hogy helytálló volt az elméleti úton nyert „jóslatunk”, hiszen a kapott eredmények elég közel estek egymáshoz. Természetesen az is nyilvánvaló, hogy ennél több mérést kellett volna elvégeznünk ahhoz, hogy az elméleti úton kapott eredményeinket alaposabban „teszteljük” (többféle magasságból más méretű golyók ejtésével). De ez már meghaladta a szakkör kereteit. A célunkat így is bőven teljesítettük: *sokat tanultunk és jól szórakoztunk!*



2. kép. Becsapódásig mintegy 5 méter előnyre tesz szert a vasgolyó.

VÉLEMÉNYEK

AZ OKTATÁSI RENDSZER TERVEZETT REFORMJÁRÓL

Szabó Árpád, Nyíregyházi Főiskola, Fizika Tanszék
Szabó Tímea, Ungvári Nemzeti Egyetem, Elméleti Fizika Tanszék

A pedagógustársadalom örömmel fogadta a Nemzeti Erőforrás Minisztérium oktatásért felelős államtitkársága tudósítását a készülő új közoktatási törvény és a pedagógus életpályamodell koncepciójáról, azaz az oktatási rendszer reformjáról szóló nyilatkozatot. Dicséretes, hogy szakítani kívánnak az idegen minták kritikátlan követésével, és helyettük a legnemesebb magyar neveléstörténeti hagyományokra támaszkodva és azokat a mai kor követelményeihez igazítva építik fel a magyar iskolarendszert. Vagyis a közoktatásnak és a felsőoktatásnak azt a legracionálisabb változatát, amely biztosítja a társadalom, az állam különböző rétegei igényeinek kielégítését a piacgazdaság teremtette új viszonyok között.

Tudatosult továbbá, hogy mivel az oktatási rendszer reformjának a megvalósítói a pedagógusok, így a reform egyik legsürgetőbb kérdése a tanárképzés rende-

A *Fizikai Szemle* szerkesztő bizottsága az 1972-ben meghirdetett VÉLEMÉNYEK sorozatát az olvasók kérésére tovább folytatja ez évben is. A szerkesztő bizottság állásfoglalása alapján „a Fizikai Szemle feladatául vállalja el, hogy teret nyit a fizikai kutatásra és fizika oktatására vonatkozó véleményeknek, ha azok értékes gondolatokat tartalmaznak és építő szándékúak, függetlenül attól, hogy egyeznek-e a lap szerkesztőinek nézetével, vagy sem”. Ennek szellemében várjuk továbbra is olvasóink, várjuk a magyar fizikusok leveleit.