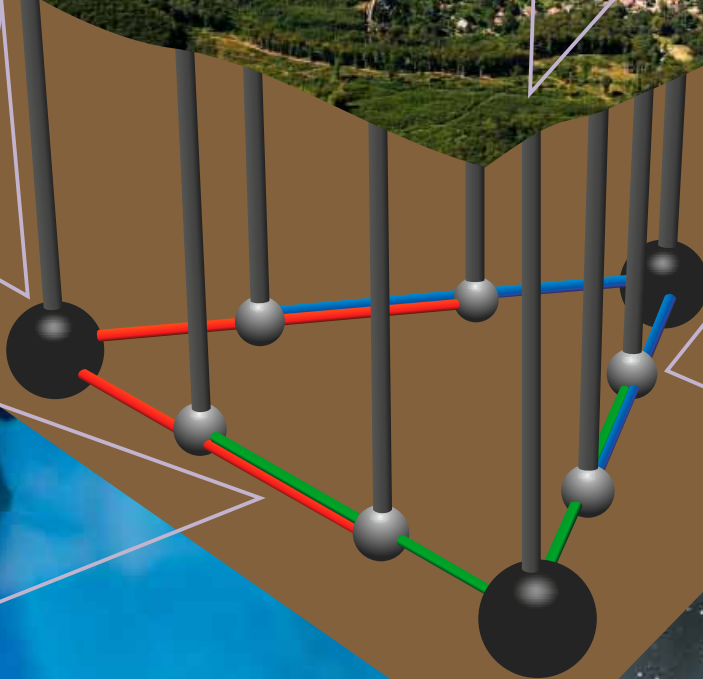
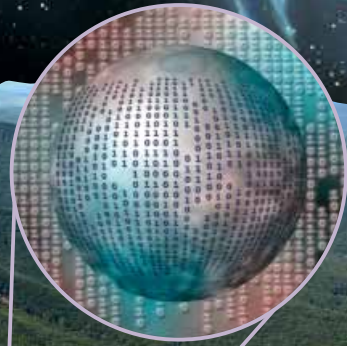


# fizikai szemle



2011/1



Az Eötvös Loránd Fizikai Társulat  
havonta megjelenő folyóirata.  
Támogatók: A Magyar Tudományos  
Akadémia Fizikai Tudományok Osztálya,  
a Nemzeti Erőforrás Minisztérium,  
a Magyar Biofizikai Társaság,  
a Magyar Nukleáris Társaság  
és a Magyar Fizikushallgatók Egyesülete

Főszerkesztő:

Szatmáry Zoltán

Szerkesztőbizottság:

Bencze Gyula, Czitrovsky Aladár,  
Faigel Gyula, Gyulai József,  
Horváth Gábor, Horváth Dezső,  
Iglói Ferenc, Kiss Ádám, Lendvai János,  
Németh Judit, Ormos Pál, Papp Katalin,  
Simon Péter, Sükösd Csaba,  
Szabados László, Szabó Gábor,  
Trócsányi Zoltán, Turiné Frank Zsuzsa,  
Ujvári Sándor

Szerkesztő:

Füstöss László

Műszaki szerkesztő:

Kármán Tamás

A folyóirat e-mail címe:

[szerkesztok@fizikaiszemle.hu](mailto:szerkesztok@fizikaiszemle.hu)

A lapba szánt írásokat erre a címre kérjük.

A folyóirat honlapja:

<http://www.fizikaiszemle.hu>

A címlapon:

A Mátrába tervezett, gravitációs  
hullámokat detektáló Einstein  
Teleszkóp. (Somogyi-Tóth Dániel  
légifotójának felhasználásával.)

## TARTALOM

<i>Fényes Tibor</i> : A hipermagok fizikája	1
<i>Slíz Judit</i> : Tranziens káosz a helyfüggő amplitúdóval gerjesztett oszillátor példáján	6
<i>Malicskó László</i> : A felületi arany-dekorációs replikatechnika	11
<i>Kovács Tamás</i> : Egyszerűen bonyolult – a Sitnikov-probléma	15
<i>Woynarovich Ferenc</i> : Hogyan is mozog egy tömeges rugó? – II.	20

### A FIZIKA TANÍTÁSA

<i>Schronk Edina</i> : Aladdina csodalámpája	26
<i>Sükösd Csaba</i> : XIII. Szilárd Leó Nukleáris Tanulmányi Verseny – beszámoló 1. rész	32

### HÍREK – ESEMÉNYEK

	36
--	----

<i>T. Fényes</i> : The physics of hypernuclei	
<i>J. Slíz</i> : Transient chaotic behaviour of an oscillator with position-dependent amplitude feeding	
<i>L. Malicskó</i> : The replique technique of surface decoration with gold	
<i>T. Kovács</i> : Simply complex: the Sitnikov Problem	
<i>F. Woynarovich</i> : What kind of motion will a spring of finite mass display? – II.	

### TEACHING PHYSICS

<i>E. Schronk</i> : Aladdin's magic lamp	
<i>Cs. Sükösd</i> : Report on the XIII. Leo Szilárd Contest in nuclear physics – Part I.	

### EVENTS

<i>T. Fényes</i> : Die Physik der Hyperkerne	
<i>J. Slíz</i> : Transientes Chaos bei einem mit ortsabhängigen Amplituden angeregter Oszillator	
<i>L. Malicskó</i> : Die Repliktechnik der Oberflächendekoration mit Gold	
<i>T. Kovács</i> : Einfach kompliziert: das Sitnikov-Problem	
<i>F. Woynarovich</i> : Wie eigentlich bewegt sich eine Feder endlicher Masse – II.	

### PHYSIKUNTERRICHT

<i>E. Schronk</i> : Aladdin's Zauberlampe	
<i>Cs. Sükösd</i> : Bericht über den XIII. Leo-Szilárd-Wettbewerb in Kernphysik. Teil I.	

### EREIGNISSE

<i>T. Фэней</i> : Физика сверхядер	
<i>Ю. Шлиз</i> : Переходный хаотический режим осциллятора с зависящей от положения амплитудой возбуждения	
<i>Л. Маличко</i> : Поверхностные золотные покрытия в технике реплик	
<i>T. Ковач</i> : Просто – сложная проблема Шитникова	
<i>Ф. Войнарлович</i> : Движение пружины конечной массы? – II.	

### ОБУЧЕНИЕ ФИЗИКЕ

<i>Э. Шронк</i> : Волшебная лампа Аладдины	
<i>Ч. Шюккэнд</i> : Отчет о XIII. студентском конкурсе им. Л. Силарда по ядерной физике. Часть первая	

### ПРОИСХОДЯЩИЕ СОБЫТИЯ

**Fizikai Szemle**  
MAGYAR FIZIKAI FOLYÓIRAT

megjelenését anyagilag támogatják:



**nka**  
Nemzeti Kulturális Alap

**mym**  
paksi atomerőmű

**NCA**  
Nemzeti Civil Alapprogram



# Fizikai Szemle

## MAGYAR FIZIKAI FOLYÓIRAT

A Matematikai és Természettudományi Értesítőt az Akadémia 1882-ben indította  
A Matematikai és Fizikai Lapokat Eötvös Loránd 1891-ben alapította

LXI. évfolyam

1. szám

2011. január

## A HIPERMAGOK FIZIKÁJA

Fényes Tibor  
MTA ATOMKI, Debrecen

*Hiperagnak* olyan atommagot nevezünk, amelyben valamelyik nukleon  $d$ - vagy  $u$ -valenciakvarkja helyett nehezebb ( $s$ -,  $c$ -) kvark van. Például, ha az atommag egy neutronjában az  $udd$ -valenciakvarkok közül egy  $d$ -kvarkot  $s$ -kvarkkal helyettesítünk,  $\Lambda$ -hiperont<sup>1</sup> tartalmazó hipermag áll elő. A hipermagokat hagyományosan a  $Z$  rendszámmal (vagy az elem jelével), az  $A$  barionszámmal (ami a nukleon- és hiperonszám összege) és a hiperon jelével jelölik. Például a  ${}^7_{\Lambda}\text{Li}$  azt jelenti, hogy  $Z = 3$ ,  $A = 7$  és az atommagban egy neutron helyett egy  $\Lambda$ -hiperon található. Eddig főleg olyan hipermagokat állítottak elő, amelyekben egy ritka ( $s$ -) kvark van, de hírt adtak már kétszeres- $\Lambda$  hipermag létéről is ( ${}^6_{\Lambda\Lambda}\text{He}$ , *Takahashi* és mts. [1]).

Nehéz kvark(ok) megjelenése az atommagban új szabadsági fok(ok) jelentkezésével jár. *A hipermagok vizsgálata több szempontból is fontos.*

a) Mivel a  $\Lambda$ -hiperonra nem áll fenn a Pauli-tiltás, a hiperon az atommag belsejébe is beépülhet. Ez új lehetőséget ad mélyen kötött állapotok vizsgálatára.

b) Nagy sűrűségű maganyagban (például neutroncsillagokban) valószínűleg hiperonok is vannak. Így a hiperon-nukleon, hiperon-hiperon kölcsönhatások ismerete asztrofizikai szempontból is fontos.

c) A hipermagok szerkezetének megértéséhez kulcskérdés a  $\Lambda N$ -kölcsönhatás pontos ismerete ( $N$  a nukleon jele). Vizsgálandó, hogy hogyan alakul a spin-spin, spin-pálya és tenzor kölcsönhatás erőssége a  $\Lambda N$ -köl-

cönhatásban. Vizsgálandó továbbá a  $\Lambda\Lambda$ -,  $\Lambda\Sigma$ -, ... hiperon-hiperon kölcsönhatások természete is.

d) Amikor egy  $\Lambda$ -hiperon megjelenik egy atommagban, annak mérete, alakja, szimmetriái, héj- és csomószerkezete, kollektív mozgása megváltozhat. Ha egy  $\Lambda$ -hiperon az atommag belső pályájára épül be, magához vonhatja a szomszédos nukleonokat, ami az atommag összezsugorodásához vezethet. Mindez jó részt még feltáratlan terület.

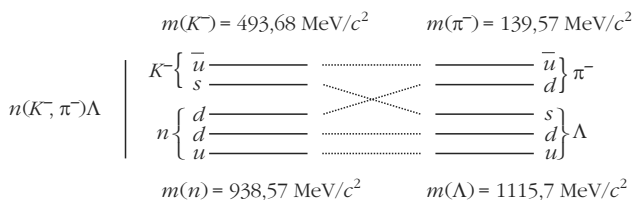
e) A  $\Lambda$ -hiperon beépülhet az atommag belsejébe, ahol a nukleáris környezetben effektív sajátosságai megváltozhatnak. A hipermagokban fellépő mágneses dipólsugárzás tanulmányozása adatokat szolgáltathat például a  $g_{\Lambda}$  effektív giromágneses tényezőre.

*Az első hipermagot Danysz és Pwiewski észlelte 1953-ban egy kozmikus részecskék által kiváltott magreakcióban. Az elmúlt évtizedek során mesterségesen is előállítottak hipermagokat, de ehhez nagyenergiájú gyorsítókra volt szükség és viszonylag kevés laboratóriumban foglalkoztak hipermag-kutatással.*

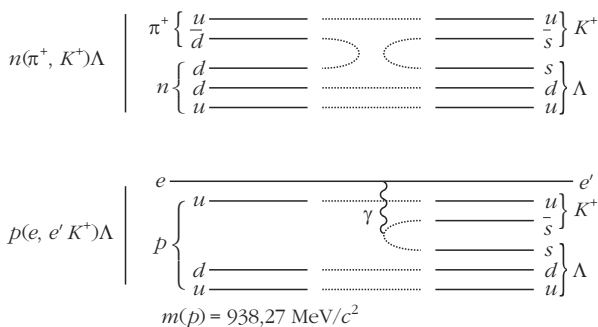
*A közeljövőben lényeges előrelépés várható.* 2009-ben üzembe lépett a J-PARC (Japan Proton Accelerator Research Complex) gyorsító, ami 30 (később 50) GeV-es nagy intenzitású (15  $\mu\text{A}$ ) protonnyalábot szolgáltat. Ezzel a korábbiakhoz képest nagyságrendileg intenzívebb kaon- és pionnyalábok állíthatók elő, világviszonylatban ez lesz az első valódi „kaongyár”. Az 1,1–1,8 GeV-es, intenzív kaonnyalábok megnyitják az utat a hiper- és kétszeresen hipermagok széleskörű vizsgálatára előtt. Nagy reményekre jogosítanak fel a németországi GSI, PANDA (Antiproton Annihilation at Darmstadt), az olaszországi DAΦNE, FINUDA (a későbbiekben SuperB), a J-laboratórium (Jefferson National Accelerator Facility, USA) hipermag-kutatási programjai is, több más (például MAMI-C, Mainz) programmal együtt.

<sup>1</sup> A hiperonok olyan barionok, amelyekben ritka (vagy más nehezebb) kvark is van. Egy ritka kvark tartalmú a  $\Lambda^0$ ,  $\Sigma^{\pm}$ ,  $\Sigma^0$ , két  $s$ -kvark tartalmú a  $\Xi^{\pm}$ ,  $\Xi^0$ , három  $s$ -kvark tartalmú az  $\Omega^-$ -hiperon. Léteznek  $c$ -, illetve  $b$ -kvarkot tartalmazó hiperonok is, ezeket első indexszel jelölik. Például a  $\Lambda_c^+$  bájos barion  $udc$  valenciakvarkokat tartalmaz.

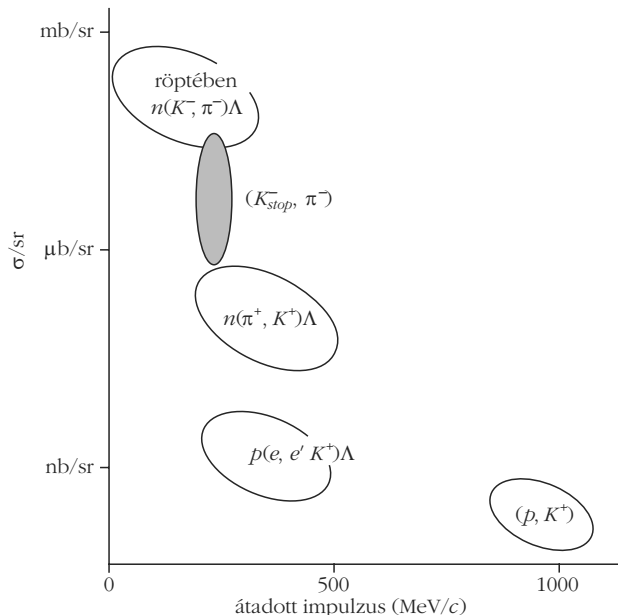
s-kvark csere



ss-párkeltés



1. ábra.  $\Lambda$ -hipermag előállításához vezető három reakció sematikus ábrázolása kvarkszinten. Az ábrán a hadronok tömegei is fel vannak tüntetve.



2. ábra. Hipermagok előállításához vezető néhány reakció hatáskeresztmetszete ( $\sigma/sr$ ) az átadott impulzus függvényében. Hashimoto, Tamura [2] alapján.

## A hipermagok előállítása, kísérleti berendezések

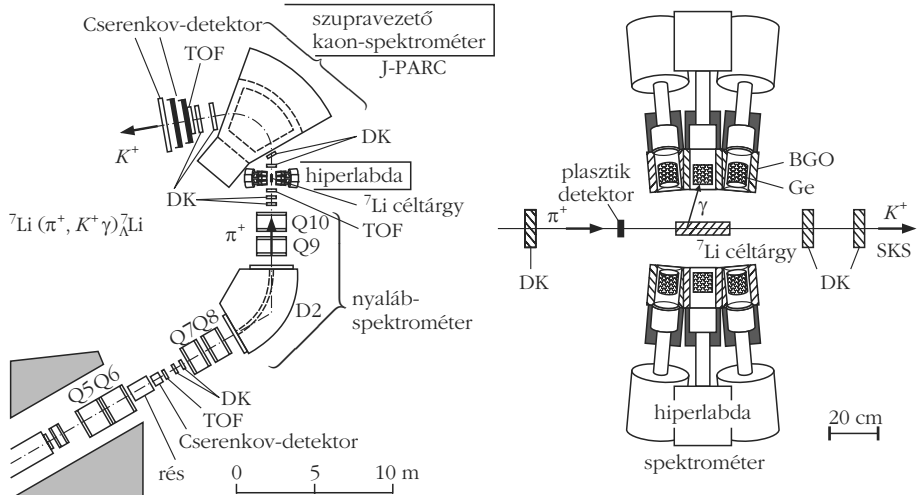
Hipermagokat sokféle (mezon, elektron, proton, nehéz ion) reakcióval lehet előállítani. Eddig főleg  $(K^-, \pi^-)$ ,  $(\pi^+, K^+)$  és  $(e, e' K^+)$  reakciókat használtak előállításukra, amelyek kvarkszinten az 1. ábrán látható átalakulásokhoz vezettek. Néhány reakció hatáskeresztmetszetét ( $\sigma/sr$ ) az átadott impulzus ( $p$ ) függvényében a 2. ábra mutatja.  $K^-$ -nyalábokkal nagyon jó hatáskeresztmetszet érhető el, de a nagyenergiájú protonokkal létrehozott reakciókban a pionok nagyságrendekkel nagyobb hozammal állnak elő, mint a kaonok, így a  $(\pi^+, K^+)$  reakció is alkalmas hipermag-vizsgálatokra.

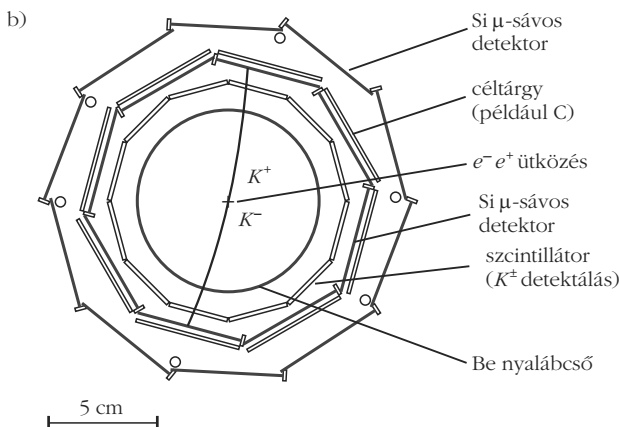
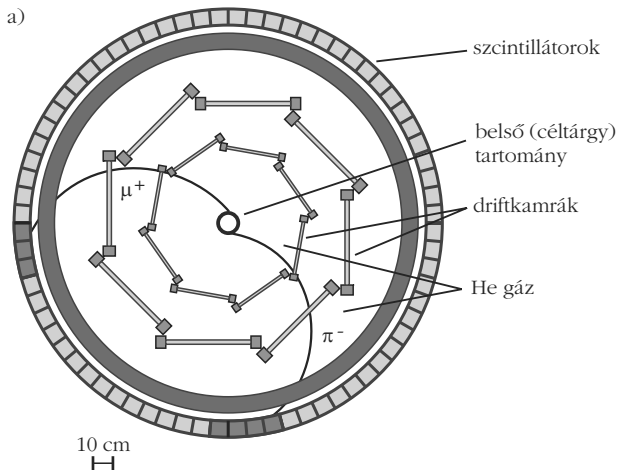
Minden reakciótípusnak megvan a maga előnye, kölcsönösen kiegészítik egymást. A  $(K^-, \pi^-)$  reakció különösen alkalmas helyettesítési szerepre, ebben a neutron ugyanazon pályán (a keringési impulzusnyomaték változása nélkül) átalakulhat  $\Lambda$ -vá. Ezzel szemben a  $(\pi^+, K^+)$  és  $(e, e' K^+)$  reakciók nagyobb bombázó részecske impulzusátadással járnak és könnyebben gerjesztenek nagy spinű hipernukleáris állapotokat. A  $(K^-, \pi^-)$  és  $(\pi^+, K^+)$  reakciók a céltárgy egy neutronját, míg az  $(e, e' K^+)$  egy protonját alakítják át  $\Lambda$ -hiperonná (1. ábra).

A hipermagok vizsgálhatók reakció- és  $\gamma$ -spektroszkópiai módszerekkel. A reakcióvizsgálatokban meg lehet határozni a hipermag tömegét, a reakció hatáskeresztmetszetét, különböző szögeloszlásokat stb. A  $\gamma$ -spektroszkópia ugyanakkor kitűnő eszköz a nívórendszerek felderítésére, spin-paritások meghatározására, a  $\Lambda N$ -kölsönhatás tulajdonságainak tanulmányozására.  $\gamma$ -spektroszkópiai módszerekkel csak a nukleonemisszió alatti nívók vizsgálhatók, de nagyságrendileg jobb feloldással, mint reakciókban. Így a módszerek hasznosan kiegészítik egymást.

Hipermagok vizsgálatára sokféle kísérleti berendezést használtak. Ezek közül csak hármat ismertetünk: a japán J-PARC (Tokai), az olasz DAΦNE, FINUDA (Róma) és az amerikai Jefferson-laboratórium (Newport News, Virginia) berendezéseit.

3. ábra. A J-PARC szupravezető kaon- (SKS) és hiperlabda  $\gamma$ -spektrométerei, bal oldalon felülnézetű, jobb oldalon oldalnézeti ábrázolásban. Q kvadrupól-, D dipólomágnes, DK driftkamra, TOF repülési időt mérő berendezés. Hashimoto, Tamura [2] alapján.





4. ábra. a) A hipermagok vizsgálatára szolgáló FINUDA detektor a Frascati Nemzeti Laboratóriumban. b) A detektor belső (cél-tárgy) tartománya kinagyítva. A metszet irányára merőleges mágneses tér lehetőséget ad a töltött részecskék impulzusának meghatározására. A Si-mikrosávok detektorok és driftkamrák lehetővé teszik a részecsepályák meghatározását. *CERN Courier* (2004. április) alapján.

A *J-PARC szupravezető kaon- és hiperlabda  $\gamma$ -spektrométere* (3. ábra). A J-PARC 30 (később 50) GeV-es protonszinkrotronának intenzív (~15  $\mu$ A-es) nyalábját alkalmas céltergőre irányítva pion és kaon másodlagos nyalábok nyerhetők, körülbelül 1/500 kaon/pion arányban. Kétfokozatú elektrosztatikus szeparátorral ezt az arányt 1-re (vagy nagyobbra) javítják, így viszonylag tiszta töltött kaonnyaláb nyerhető, körülbelül 1,8 GeV energiáig.

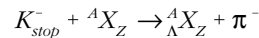
A vizsgálatokhoz felhasználhatók a ( $\pi^+$ ,  $K^+$ ), ( $K^-$ ,  $\pi^-$ ) és ( $K^-$ ,  $K^+$ ) reakciók. Ez utóbbival két *s*-kvarkot tartalmazó hipermagok is előállíthatók. A ( $\pi^+$ ,  $K^+$   $\gamma$ ) reakciónál a nyalábspektrométerrel mérik a  $\pi^+$ , a szupravezető kaonspektrométerrel a kaon, a hiperlabda spektrométerrel a  $\gamma$ -sugárzás spektrumát. A hiperlabda spektrométer 14 *n*-típusú koaxiális Ge-detektort tartalmaz, BGO sapkával a Compton-háttér lenyomására.

Vizsgálni kívánják a  $^{12}\text{C}$  ( $K^-$ ,  $K^+$ )  $^{12}\text{Be}$  reakcióval előállított, két *s*-kvarkot tartalmazó hipermagot, valamint a könnyű hipermagok gerjesztési nívórendszerit ( $K^-$ ,  $\pi^-$ ) reakcióval (Nagae [3]).

Európában a Frascati Nemzeti Laboratóriumban (Olaszország) folynak hipermag-vizsgálatok, a *FINUDA programban* (Gianotti [4], Franzini, Moulson [5]). A következőkben ezt ismertetjük röviden.

A Laboratóriumban működő  $\phi$ -gyárban elektron- és pozitronnyalábokat ütköztetnek 510 + 510 = 1020 MeV energiával, amelynél a  $|\phi\rangle \approx |s\bar{s}\rangle$ ,  $J^{PC} = 1^{--}$  vektormezonok éles rezonanciát mutatnak. A gyorsító  $10^{32} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$  luminozitásának köszönhetően naponta körülbelül 12 millió  $\phi$ -mezon előállítására képes.

A  $\phi$ -mezon közepes élettartama,  $\tau = 1,5 \times 10^{-22} \text{ s}$ , 49%-ban  $K^-(s\bar{u}) + K^+(u\bar{s})$  töltött kaonokba bomlik. A  $K^-$ -mezonokat lefékezik, majd



reakcióval előállítják a vizsgálandó hipermagot.

A  $\Lambda^0(uds)$  részecske a legkönnyebb hiperon, közepes élettartama szabad térben  $2,63 \times 10^{-10} \text{ s}$ , 63,9%-ban  $p\pi^-$ , 35,8%-ban  $n\pi^0$ -ba bomlik gyenge bomlással, de van néhány nagyon gyenge bomlásmódja is, például  $\Lambda \rightarrow n\gamma$ , amelyre az elágazási arány  $1,75 \times 10^{-3}$ .

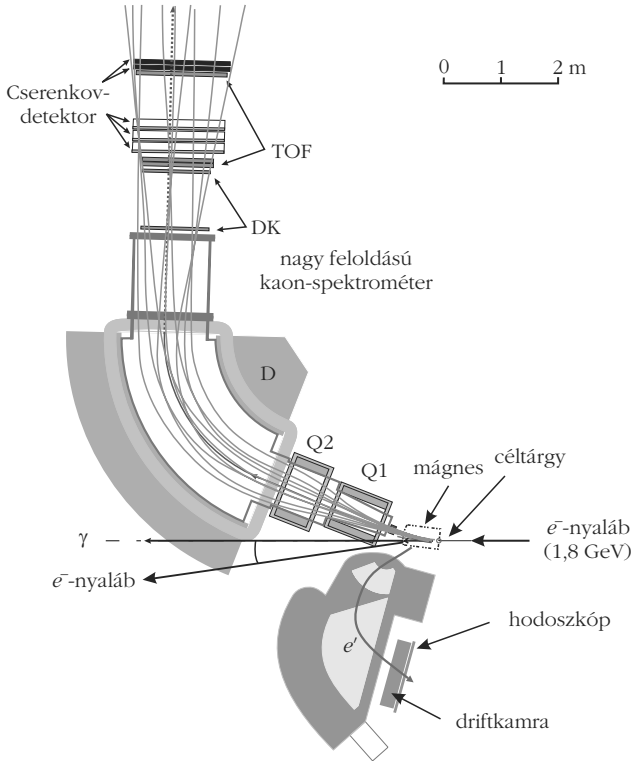
A FINUDA detektor metszetrája a 4. ábrán látható. Az elektron-pozitron ütközésben  $K^+K^-$ -párok állnak elő. A  $K^-$ -mezonok energiája ~16 MeV. Az alacsony energiájú  $K^-$ -mezonok lefékeződnek egy vékony (~300 mg/cm<sup>2</sup>) céltergőben és ( $K_{stop}^- \pi^-$ ) *s*-kvarkcsere reakcióval kölcsönhatnak az atommagokkal. A kilépő  $\pi^-$ -mezonok impulzusát széles térszögben, jó feloldással ( $\Delta p/p \sim 10^{-2} - 10^{-3}$ ) mérik, majd meghatározzák a hipermag-állapotok energiáit. Az ellentétes irányokban kirepülő  $K^-$ - és  $K^+$ -mezonok azonosítása és detektálása felhasználható a háttér csökkentésére. Mérhető a  $K^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$  bomlás müonjainak, valamint a hipermagok bomlástermékeinek adatai is. A berendezés impulzusátteresztése olyan, hogy a megengedett hipermag-állapotok teljes spektruma vizsgálható jó feloldással és nagy hasznos térszögben. A vizsgálatok lehetőséget adnak a  $\Lambda N \rightarrow NN$  (nem mezonos) bomlás pontos vizsgálatára is, ami jelentős intenzitással csak maganyagban megy végbe. Ez a folyamat alapvető ismeretet szolgáltat a ritkaságváltoztató barion-barion gyenge kölcsönhatásra.

A *Jefferson-laboratórium* (*e, e'  $\gamma$* )-vizsgálatokra épített nagy feloldású kaonspektrométerének sematikus rajza az 5. ábrán látható. Mind a kaonspektrométer, mind a szórt elektronok spektrométere  $\Delta p/p = 2 \times 10^{-4}$  impulzusfeloldást tesz lehetővé.

## Néhány eredmény

Eddig főleg  $\Lambda$ -hipermagokat állítottak elő, többségükben könnyű elemeknél ( ${}^3\text{H}$ ,  ${}^4\text{H}$ ,  ${}^4\text{He}$ , ...,  ${}^{40}\text{Ca}$ ), de vannak ismert nehéz hipermagok is ( ${}^{139}\text{La}$ ,  ${}^{208}\text{Pt}$ ,  ${}^{209}\text{Bi}$ ). Összesített számuk körülbelül 40.

A hipermagok fontos jellemzője a tömeg ( $M_{\text{hiper}}$ ). Ha ( $\pi^+$ ,  $K^+$ ) reakciót használunk előállításukhoz, a belépő pion és kilépő kaon impulzusvektoraiból ( $\mathbf{p}_\pi$  és  $\mathbf{p}_K$ ) a relativisztikus kinematika alapján kiszámítható a hipermag tömege:



5. ábra. A Jefferson-laboratórium (USA) nagy feloldású kaonspektrométere (HKS) ( $e, e' K^+$ ) reakcióval végzendő hipermag-kutatókhoz. Q1, Q2 kvadrupól, D dipól mágnes. DC helyérzékelő driftkamra, TOF repülési időt mérő berendezés jelöl. Hashimoto, Tamura [2] alapján.

$$M_{biper} = \sqrt{(E_\pi + M_A - E_K)^2 - (p_\pi^2 + p_K^2 - 2 p_\pi p_K \cos\theta)},$$

ahol  $E_\pi$  és  $E_K$  a pion, illetve kaon teljes energiája,  $\theta$  a kaon szórási szöge,  $M_A$  a céltárgymag tömege.

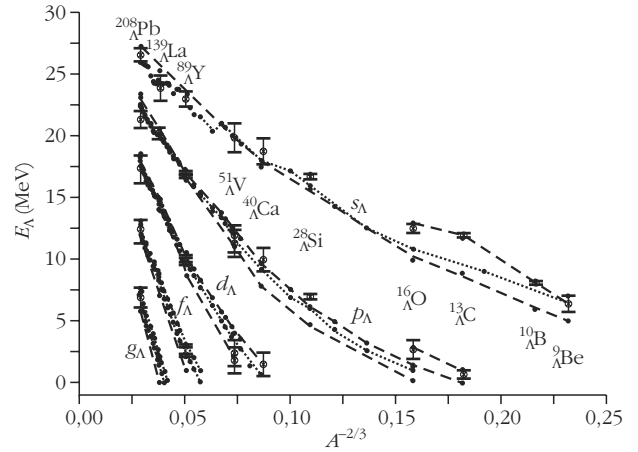
Innen a  $\Lambda$ -hiperon kötésienergiája ( $B_\Lambda$ ) egyszerűen levezethető, ha feltesszük, hogy a magtörzs alapállapotban van:

$$B_\Lambda = M_{törzs} + M_\Lambda - M_{biper},$$

ahol  $M_{törzs}$  a törzsmag,  $M_\Lambda$  a  $\Lambda$ -hiperon tömege.

Hazai eredmény az atommagok kötési energiájára vonatkozó Weizsäcker-féle félempirikus tömegformula olyan kiterjesztése, amellyel a  $\Lambda$ -hipermagok a csak nukleonokat tartalmazó atommagokkal egységes formában írhatók le (Lévai, Cseh, Van Isacker és Juillet [13]). E sémában a párenergia tagot egy Majorana-tag váltja fel, amely a proton, neutron és  $\Lambda$ -hiperon egyenrangúságát feltételező SU(6) szimmetriával áll összhangban. Az eljárás konzisztenciájára utal az, hogy a kísérletileg megfigyelt kötési energiától való eltérés hasonló az ismert tömegű 1909 csak nukleonokat tartalmazó atommagra és 38  $\Lambda$ -hipermagra.

Kísérletileg meghatározták a  $\Lambda$ -hiperon kötési (szeparációs) energiáját különböző  $s$ -,  $p$ -,  $d$ -,  $f$ -,  $g$ -héjakon a tömegszám ( $A$ ) függvényében. Az összesített eredmények a 6. ábrán láthatók.



6. ábra. A  $\Lambda$ -hiperon szeparációs energiái ( $E_\Lambda$ ) az  $A^{-2/3}$  függvényében ( $A$  tömegszám) a hipermag  $s \rightarrow g$  alhéjaira. Pontok hibákkal: különböző kutatócsoportok eredményei. A görbék az  $s$ -héjon  $\sim 28$  MeV felé konvergálnak, ami a  $\Lambda$ -hiperon kötésienergiája a maganyagban. Lenske [6] alapján.

A hipermagok  $\gamma$ -spektroszkópiai vizsgálata lehetőséget ad gerjesztési nívórendszerük részletes felderítésére. A ( $\pi^+, K^+ \gamma$ ) és ( $K^-, \pi^- \gamma$ ) reakcióknál a  $\gamma$ -spektrum koincidenciában vizsgálható a kilépő  $K^+$ , illetve  $\pi^-$  mezonokkal. Például fékezési Doppler-módszerrel meg lehet határozni a redukált  $B(E2)$  és  $B(M1)$  átmeneti valószínűségeket, majd a bomlási elágazások ismeretében a hipermag-állapotok élettartamát. Lehet mérni szögkorrelációt,  $\gamma$ -sugárpolarizációt és más jellemzőket is.

Néhány hipermag parciális nívórendszere a 7. ábrán látható. Az észlelt  $\gamma$ -átmenetek két csoportba oszthatók. Például a  ${}^7\text{Li}(\pi^+, K^+ \gamma){}_\Lambda^7\text{Li}$  esetén a  $\Lambda$  spinátforduláshoz tartozik a

$$3/2^+ \xrightarrow{M1} 1/2_1^+, \quad 7/2^+ \xrightarrow{M1} 5/2^+;$$

míg  $\Lambda$  héjak közöttiek az

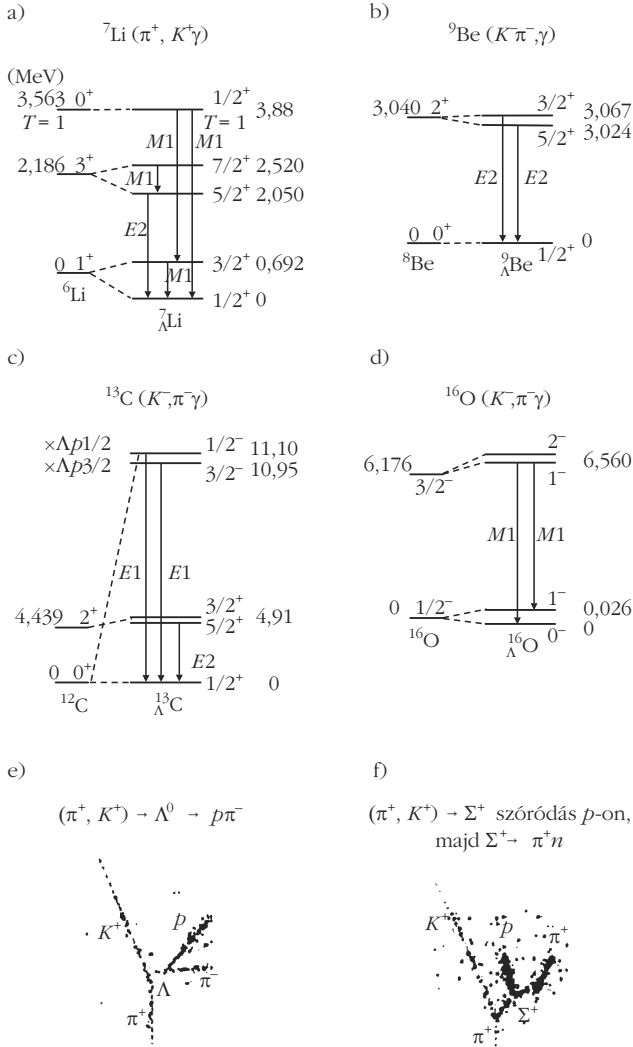
$$5/2^+ \xrightarrow{E2} 1/2_1^+, \quad 1/2_2^+ \xrightarrow{M1} 3/2^+, \quad 1/2_2^+ \xrightarrow{M1} 1/2_1^+$$

átmenetek.

Az átmenetek vizsgálata részletes információt szolgáltat a spin-spin, spin-pálya és tenzor kölcsönhatások jellegére és erősségére. A vizsgálatok még nem tekinthetők lezártnak, de a  $\Lambda N$  tenzor kölcsönhatásnál már látszik, hogy a mezoncsere-leírás működőképes.

A hipermagokat szcintilláló nyomképkamrával is vizsgálták. A 7.e-f ábrákon a  $\Lambda$ -,  $\Sigma^+$ -hiperon keletkezésének és bomlásának nyomai láthatók; a  $\Sigma^+$ -hiperon bomlása előtt protonon szóródott. A kísérletek azt mutatják, hogy a spin-pálya kölcsönhatás a  $\Sigma^+ p$  rugalmas ütközésben lényegesen erősebb, mint a  $\Lambda p$  ütközésnél.

Ha a  $\Lambda$ -hiperon beépül az atommagba, a mezonos  $\Lambda \rightarrow \pi N$  bomlásmód fékezett az emittált nukleon Paulitiltása miatt. A középnehéz magokban a nem mezonos  $\Lambda N \rightarrow NN$  az uralkodó bomlásmód. A  $\Lambda p \rightarrow np$ , illetve  $\Lambda n \rightarrow nn$  gyenge bomlásokban a  $\Lambda$  és  $n$  tömegkülönbség miatt nagy energia ( $\sim 176$  MeV) szabadul fel és a kilépő



7. ábra. a–d) Hipermagok  $\gamma$ -spektrumai (Tamura és mts. [7] alapján). e–f) szcintillációs nyomképkamrával felvett hipermag-események (*Abn* és mts. [8] alapján).

$np$ -, illetve  $nn$ -párok egyértelműen azonosíthatók a szögeloszlás és energiakorrelációk alapján. A

$$\frac{\Gamma_n(\Lambda n \rightarrow nn)}{\Gamma_p(\Lambda p \rightarrow np)}$$

arányra nyert kísérleti eredményt sikerült értelmezni mezon- (kaon-) cseremechanizmus figyelembevételével.

A  $\Lambda N$ -effektív kölcsönhatási potenciál a  $\Lambda$ -hiper- $p$ -héjánál a következő alakba írható (Millener és mts. [11]):

$$V_{\Lambda N}(r) = V_0(r) + V_\sigma(r) \mathbf{s}_\Lambda \cdot \mathbf{s}_N + V_\Lambda(r) \mathbf{l}_{\Lambda N} \cdot \mathbf{s}_\Lambda + V_N(r) \mathbf{l}_{\Lambda N} \cdot \mathbf{s}_N + V_T(r) S_{12},$$

ahol

$$S_{12} = 3 \frac{(\boldsymbol{\sigma}_\Lambda \cdot \mathbf{r})(\boldsymbol{\sigma}_N \cdot \mathbf{r})}{r^2} - \boldsymbol{\sigma}_\Lambda \cdot \boldsymbol{\sigma}_N.$$

Az  $s_\Lambda$ ,  $p_N$  hullámfüggvények szerinti radiális integrálás a megadott öt tagra lehetőséget ad a  $p$ -héjon levő hipermagok nívóenergiáinak számítására. Fordítva is eljáráhatunk, ekkor kísérleti adatokból meghatározható a jelzett öt tag radiális integrálja, amit a néhánytest-rendszerekre közvetlenül is ki lehet számítani szabad kéttest-kölcsönhatásokból (lásd például *Fényes* és mts. [10] VI.8.2. pontot). Így következtetés vonható le a  $\Lambda N$ -kölcsönhatás erősségére. A vizsgálatok azt mutatják, hogy a  $\Lambda N$ -kölcsönhatás sokkal gyengébb, mint az  $NN$ .

Amikor egy  $\Lambda$ -hiperon jelenik meg az atommagban, megváltozhat alakja, mérete, héj- és csomószerkezete stb. Ezek a hatások is tanulmányozhatók, ha ismerjük a nívósémákat és a  $B(E2)$  redukált átmeneti valószínűségeket. Mivel a  $\Lambda$ -hiperonra nem hat a Pauli-tiltás, beépülhet a legbelső  $s$ -pályára és maga köré vonhatja a nukleonokat. Ez az atommag összezsugorodásához vezet. Így például a  ${}^6\text{He}$ -ban lévő neutronháló a  ${}^7_\Lambda\text{He}$  hipermagban várhatóan eltűnik (*Hiyama* és mts. [11]).

A  $B(M1)$  redukált átmeneti valószínűség meghatározása lehetőséget ad a  $\Lambda$ -hiperon *effektív g-faktorának* (mágneses nyomatékának) meghatározására is.

Az egy  $s$ -kvarkot tartalmazó  $\Lambda$ -hiperonon kívül ugyancsak egy  $s$ -kvarkot tartalmaznak a  $\Sigma^\pm$ - és  $\Sigma^0$ -hiperonok, amelyek tömege némileg nagyobb a  $\Lambda$ -hiperonénál ( $m_\Lambda = 1115,7$ ,  $m_{\Sigma^0} = 1192,6$  MeV/ $c^2$ ). Két  $s$ -kvarkot tartalmaznak a  $\Xi^0$  ( $m_{\Xi^0} = 1314,9$  MeV/ $c^2$ ) és  $\Xi^-$  ( $m_{\Xi^-} = 1321,7$  MeV/ $c^2$ ) hiperonok. Eddig csak egy  $\Sigma$  hipermag létéről adtak hírt, a  $\Xi$  hipermag létezésével kapcsolatban pedig megoszlanak a vélemények. A J-PARC program egyik első célkitűzése, hogy  ${}^{12}\text{C}(K^-, K^+)_{\Xi}{}^{\pm}\text{Be}$  reakcióval előállítsák és vizsgálják a  ${}^{12}_\Xi\text{Be}$  hipermagot (*Nagae* [3]).

Európában a GSI, HESR nagyenergiájú tárológyűrűben antiprotonok atommagokkal való ütközésével akarnak egy vagy több  $s$ -kvarkot tartalmazó atommagokat létrehozni és részletes spektroszkópiai vizsgálatnak alávetni. Jelenleg  $c$ -kvarkot tartalmazó atommagokról nincsenek kísérleti adataink. A HESR-PANDA programban bájos barionokat [mint például  $\Lambda_c^+(cud)$ -t] tartalmazó magok, valamint  $D^{\pm,0}$ -mezon – atommag kölcsönhatások vizsgálata is szerepel (*Brinkmann* és mts. [12]).

## Összefoglalás, kitekintés

Jelenleg  $\geq 3000$  (benne  $\sim 300$  stabil) atommagról vannak kísérleti információink, ugyanakkor az ismert hipermagok száma mindössze  $\sim 40$ . Így a hiperon(ok)at is tartalmazó atommagok előállítására és vizsgálatára hatalmas új kutatási terület a magfizika számára.

Az atommagba beépülő hiperonra nem hat a Pauli-tiltás. A hiperon mélyen kötött állapotba is beépülhet és ezzel új adatokat szolgáltat az atommag belsejéről. A hipermagok spektroszkópiai vizsgálata lehetőséget nyújt a hiperon-nukleon, illetve hiperon-hiperon kölcsönhatások tanulmányozására. Mivel a neut-

roncsillagok nagy sűrűségű belsejében a hiperonok lényeges szerepet játszhatnak, a vizsgálatoknak asztrofizikai jelentősége is van.

A 2009-ben üzembe lépett J-PARC kaongyárban, az építés alatt álló darmstadti GSI, FAIR, PANDA rendszerben, valamint több más működő és tervezett hiper-mag-laboratóriumban folyó vizsgálatok reményt nyújtanak arra, hogy a közeljövőben „frontáttörés” történjen a hiper-mag-fizikában.

#### Irodalom

1. H. Takahashi és mts., *Phys. Rev. Lett.* 87 (2001) 212502-1.
2. O. Hashimoto, H. Tamura, *Progr. Part. Nucl. Phys.* 57 (2006) 564.

3. T. Nagae, *Nucl. Phys. News* 19/4 (2009) 18.
4. P. Gianotti, *CERN Courier* (Ápril 2003) 13.
5. P. Franzini, M. Moulson, *Annu. Rev. Nucl. Part. Sci.* 56 (2006) 207.
6. H. Lenseke, *Nucl. Phys. News* 17/2 (2005) 5.
7. H. Tamura és mts., *Phys. Rev. Lett.* 84 (2000) 5963; *Nucl. Phys. A* 754 (2005) 58c.
8. J. K. Ahn és mts., *Nucl. Instr. Meth A* 457 (2001) 137; *Nucl. Phys. A* 761 (2005) 41.
9. D. J. Millener és mts., *Phys. Rev. C* 31 (1985) 499.
10. T. Fényes és mts.: *Atommagfizika I.* Debreceni Egyetemi Kiadó, Debrecen 2009.
11. E. Hiyama és mts., *Phys. Rev. C* 53 (1996) 2075.
12. K.-T. Brinkmann, P. Gianotti, I. Lehmann, *Nucl. Phys. News* 16/1 (2006) 15.
13. G. Lévai, J. Cseh, P. Van Isacker, O. Juillet, *Phys. Lett. B* 433 (1998) 250.

# TRANZIENS KÁOSZ A HELYFÜGGŐ AMPLITÚDÓVAL GERJESZTETT OSZCILLÁTOR PÉLDÁJÁN

Slíz Judit  
ELTE, TTK

A *Fizikai Szemlé*ben a közelmúltban a kaotikus mozgásokról megjelent cikkek [1–6] mind permanens káosszal, a kaotikus mozgás tetszőlegesen hosszú ideig tartó formájával foglalkoztak. Most a kaotikus mozgások egy általánosabban előforduló fajtáját, a *tranzien káoszt* vizsgáljuk meg. Gyakran találkozunk ugyanis olyan jelenséggel, amikor a kaotikus viselkedés (bonyolult geometria a fázistérben, előrejelezhetetlenség) csak véges ideig tart. Ez a jelenség a tranzien káosz, amely – a permanens káoszhoz hasonlóan – felléphet mind disszipatív, mind konzervatív rendszerben. Ebben a cikkben disszipatív esetekkel foglalkozunk.

Tranzien káosz esetén nyilván nem létezhet *kaotikus attraktor*, hiszen azt a kaotikus mozgás sohasem hagyná el, de mégis létezik egy olyan ponthalmaz a fázistérben, amelyet a trajektóriák közül a hosszabb ideig kaotikusak nagyon megközelítenek. Ez a ponthalmaz a *nyereg-halmaz* [7–8]. A tranzien káosz új mérőszáma az *átlagos élettartam* és ennek reciproka, a *szökési ráta*. Ezeket a mennyiségeket és a nyereg-halmazt fogjuk megvizsgálni néhány példán keresztül, nevezetesen a parabolikus és a szinuszos helyfüggő amplitúdóval gerjesztett harmonikus oszcillátor, valamint a konstans amplitúdóval gerjesztett anharmonikus oszcillátor esetében.

Miért fontos a tranzien káosz vizsgálata? Azért, mert jóval általánosabb jelenség, mint a permanens káosz: a káosz valójában sokkal szélesebb paraméter-tartományban van jelen, mint a kaotikus attraktorok világa, és információt veszítünk el, ha csak a perma-

nens káosz vizsgálatára szorítkozunk. Azonkívül néhány jelenség, mint például a *kaotikus szórás*, a tranzien káosz fogalma nélkül nem is lenne érthető.

## A parabolikus helyfüggésű erővel gerjesztett harmonikus oszcillátor tranzien káosza

Nézzük meg először a parabolikus helyfüggésű amplitúdóval gerjesztett harmonikus oszcillátort. A dimenziótlanított mozgásegyenlet [1]:

$$\ddot{x} = -x - \beta \dot{x} + (1 - \nu x^2) \cos \delta t. \quad (1)$$

Itt  $\beta$  a súrlódási együttható,  $\nu$  egy nemlinearitási paraméter,  $\delta$  pedig a gerjesztési frekvencia. A következő paraméterértékekkel tranzien káoszt kapunk:  $\beta = 0,4$ ,  $\nu = 16,636$ ,  $\delta = 0,682$ .

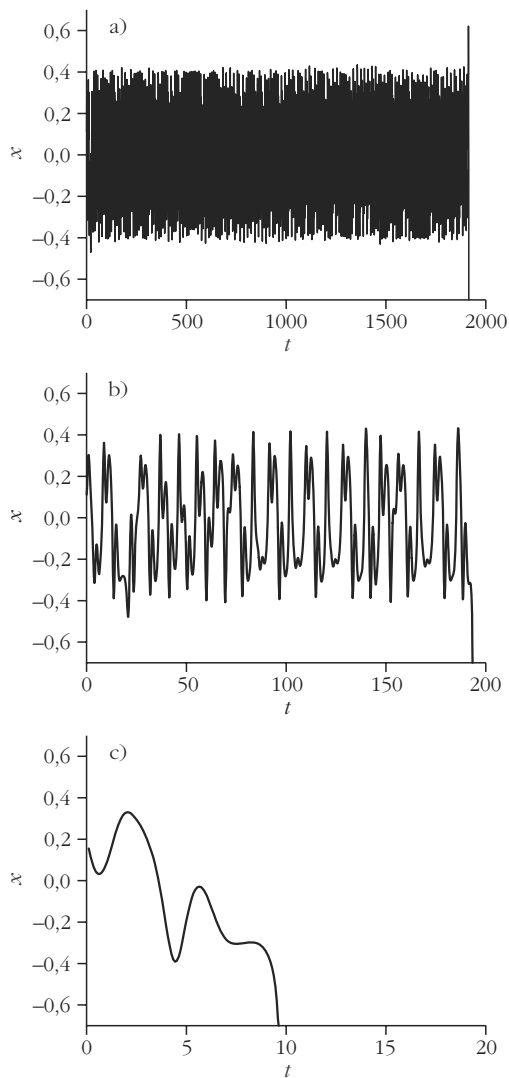
Vizsgáljuk meg ezt a mozgást részletesebben! Nézzük meg a kitérés-idő diagramon, hogy ha különböző  $x_0$ ,  $v_0$  (kitérés, sebesség) kezdőpontokból indítjuk a mozgást, hogyan alakul és meddig tart a káosz!

Mindhárom esetben jól látható (*1. ábra*), hogy hosszabb-rövidebb ideig tartó kaotikusság után a trajektória elszökik (megfelelő szimulációval könnyen beláthatjuk, hogy a végtelenbe tart). A kaotikus viselkedés időtartama erősen függ attól, hogy honnét indult a mozgás. Az *1.a* és *1.b* ábrán látható trajektóriák kezdőpontjai csak az  $x$  koordináta ötödik tizedesjegyében különböznek, a kaotikusság időtartama között mégis egy nagyságrendnyi eltérés van! Látni fogjuk, hogy meg tudjuk majd állapítani: átlagosan mennyi ideig kaotikus a mozgás. Ha megvizsgálunk még néhány kezdőpontból indított trajektóriát (ezek itt nincsenek feltüntetve), azt tapasztaljuk, hogy hosszabb-rövidebb ideig tartó kaotikus kavargás után azok is elszállnak a végtelenbe.

A szerző posztgraduális csillagász hallgató.

E munka az ELTE TTK-n a tavaszi félévben hallgatott *Kaotikus mechanika II.* című speciális előadás 2010. júniusban bemutatott vizsgadolgozatából fejlődött ki. A szerző köszönetét fejezi ki a tárgy oktatóinak, *Gruíz Mártonnak* és *Tél Tamásnak*.



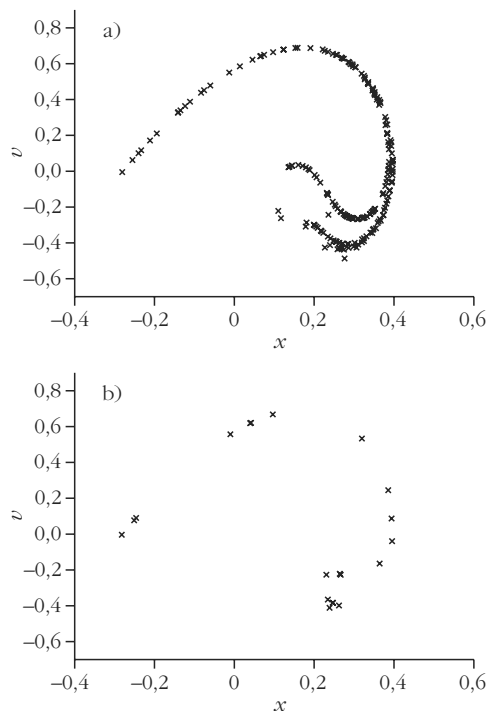


1. ábra. Az  $\ddot{x} = -x - 0,4\dot{x} + (1 - 16,636x^2) \cos(0,682t)$  mozgásegyenletű oszcillátor kitérés-idő ( $x-t$ ) diagramja a) az  $x_0 = 0,1$ ,  $v_0 = 0,1$ , b) az  $x_0 = 0,10001$ ,  $v_0 = 0,1$ , c) az  $x_0 = -0,2$ ,  $v_0 = -0,5$  kezdőpontból indítva.

Ha ugyanezeket a mozgásokat az  $(x, v)$  fázistérben az időtartamokat a  $T = 2\pi/\delta$  gerjesztési periódusidő többszöröseinek véve (azaz periódusidőnként, vagy idegen kifejezéssel: stroboszkopikus leképezéssel) ábrázoljuk, azt tapasztaljuk, hogy ameddig a kaotikus mozgás tart, a különböző kezdőfeltételekből indított trajektóriák egy bizonyos struktúra körül mozognak. Minél tovább tart a kaosz, annál több pont rajzolódik ki ebből a struktúrából (2. ábra). Ez a struktúra segíthet a kaotikus nyereghalmazt befoglaló tartomány „megsejtésében”.

Ha a kezdőfeltételek széles köréből indítunk el sok mozgást, és a  $t$  időnél hosszabb élettartamúak  $N(t)$  számát meghatározzuk, majd az így kapott függvényt ábrázoljuk, akkor azt kapjuk, hogy  $t$  növekedésével  $N(t)$  elegendően hosszú idő után – a radioaktív bomlás szabályához hasonló – exponenciális csökkenést mutat [8]:

$$N(t) \sim e^{-\kappa t}. \quad (2)$$



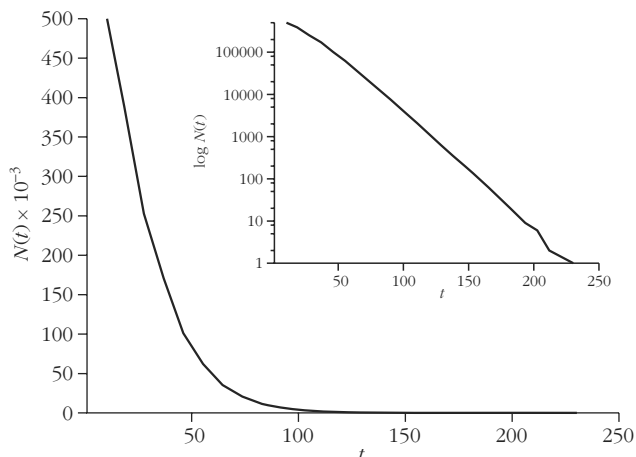
2. ábra. Az  $\ddot{x} = -x - 0,4\dot{x} + (1 - 16,636x^2) \cos(0,682t)$  mozgásegyenletű oszcillátor mozgásának periódusidőnként (stroboszkopikus leképezéssel) készített fázistérbeli képe a) az  $x_0 = 0,1$ ,  $v_0 = 0,1$ , b) az  $x_0 = 0,10001$ ,  $v_0 = 0,1$  kezdőpontból indítva. Az a) esetben (amely az 1.a ábrának felel meg), hosszabb ideig tart a kaosz, több pont képződik le, mint az 1.b ábrának megfelelő b) esetben.

Ez azt jelenti, hogy az egyre hosszabb kaotikus mozgásokhoz tartozó kezdőfeltételek száma rohamosan (exponenciálisan) csökken.

A  $\kappa$  együtttható a szökési ráta (ami a logaritmusos ábrázolásban megjelenő egyenes negatív meredeksége), ennek  $\tau$  reciproka pedig az átlagos élettartam (3. ábra).

Tehát a kaotikus mozgások átlagosan 17 időegység (ami közelítőleg a  $T = 2\pi/0,682$  periódusidő kétsze-

3. ábra. Az  $\ddot{x} = -x - 0,4\dot{x} + (1 - 16,636x^2) \cos(0,682t)$  mozgásegyenletű oszcillátornak az  $x_0 \in (-0,4, +0,6)$ ,  $v_0 \in (-0,7, +0,9)$  kezdőfeltételű tartományán egyenletesen elosztott  $10^6$  kezdőpontból indított trajektóriái közül a  $t$ -nél hosszabb élettartamúak  $N(t)$  száma a belső ábra logaritmusos skáláján ábrázolva lineáris. Az egyenes meredeksége a szökési ráta:  $\kappa = 0,0575$ , ennek reciproka pedig az átlagos élettartam:  $\tau = 17$ .



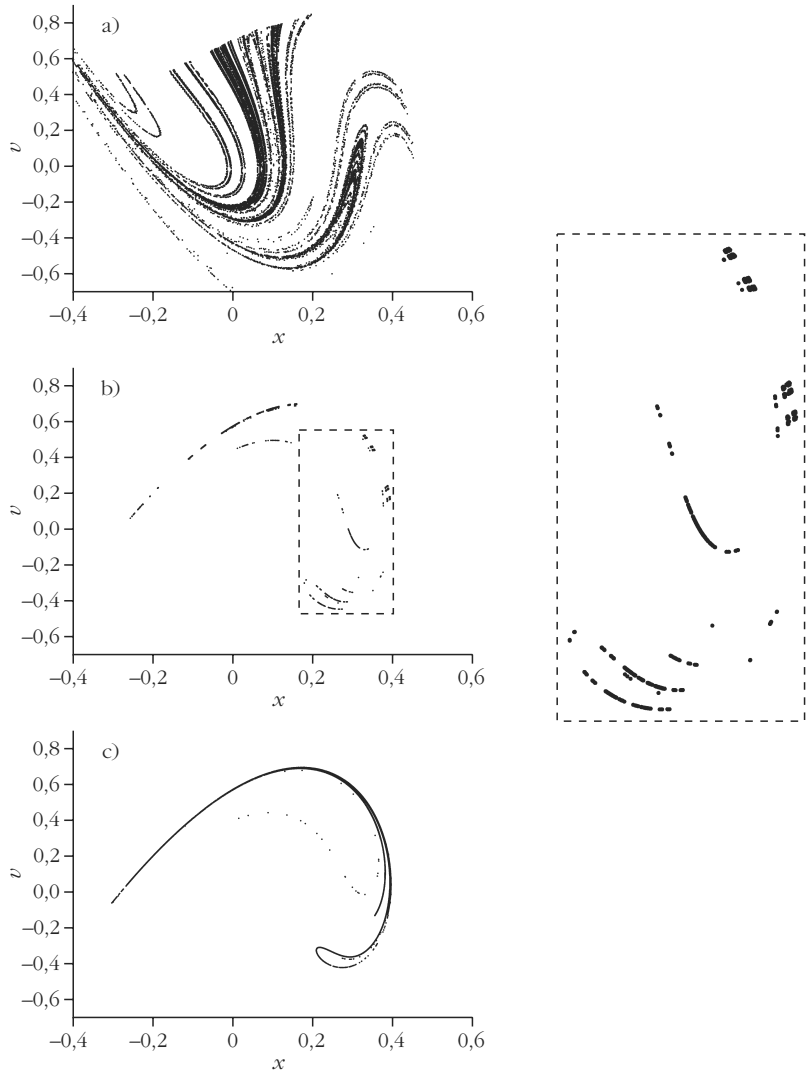
rese) hosszúságúak. Az 1.a, 1.b ábra tranziens káosza tehát jóval hosszabb, mint az átlag, az 1.c esetén pedig rövidebb.

Célszerű a szökési ráta számításának módját a fázistérben is megfogalmazni. Az eljárás az, hogy a fázistér egy kiterjedt tartományában nagyszámú pontot osztunk el egyenletesen vagy véletlenszerűen, és vizsgáljuk az ezen kezdőpontokból induló trajektóriákat. Azon trajektóriák  $N(t)$  száma, amelyek  $t$  ideig nem hagyják el a tartományt, a (2) összefüggést követik. Ráadásul a szökési ráta független a kezdőfeltételek tartományának megválasztásától mindaddig, amíg az átfed a nyereghalmazzal.

Keressük meg a nyereghalmazt! Az erre kínált szisztematikus eljárás [8] során meg kell nézni, hogy van-e a fázistérnek olyan részhalmaza, amelyet az elég hosszú ideig (ami a gyakorlatban az átlagos élettartam 4–6-szorosa) el nem szökő trajektóriák megközelítenek. Ez a részhalmaz lesz a nyereghalmaz. Az időtartamokat a  $T = 2\pi/\delta$  gerjesztési periódusidő többszöröseinek véve megnézzük, hogy a még „elég hosszú ideig” is el nem szökő trajektóriák hol voltak a fázistérben körülbelül fele annyi idő után és kiinduláskor. A közbülső időhöz tartozó ponthalmaz jó közelítéssel a nyereghalmaz. A kezdőpontok kirajzolják a *stabil sokaságot* (az ezekből a kezdőpontokból induló trajektóriák mind elérik a közbülső időpontban kirajzolt ponthalmazt, azaz a nyereghalmazt), míg a végső időponthoz tartozó ponthalmaz a nyereghalmaz *instabil sokasága*, mert az ezekből továbbinduló trajektóriák a nyereghalmaztól távolodnak, és a végtelenben található attraktorhoz tartanak. A nyereghalmaz a nevét onnét kapta, hogy hasonlóan egy nyeregponthoz vagy egy hiperbolikus ponthoz, stabil és instabil sokasággal rendelkezik.

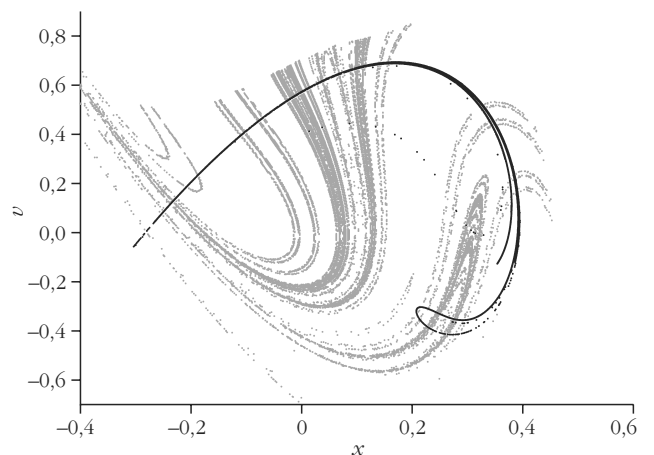
A 3. ábrán exponenciális csökkenést tapasztalunk, és valóban, a vizsgált tartomány tartalmazza a nyereghalmazt.

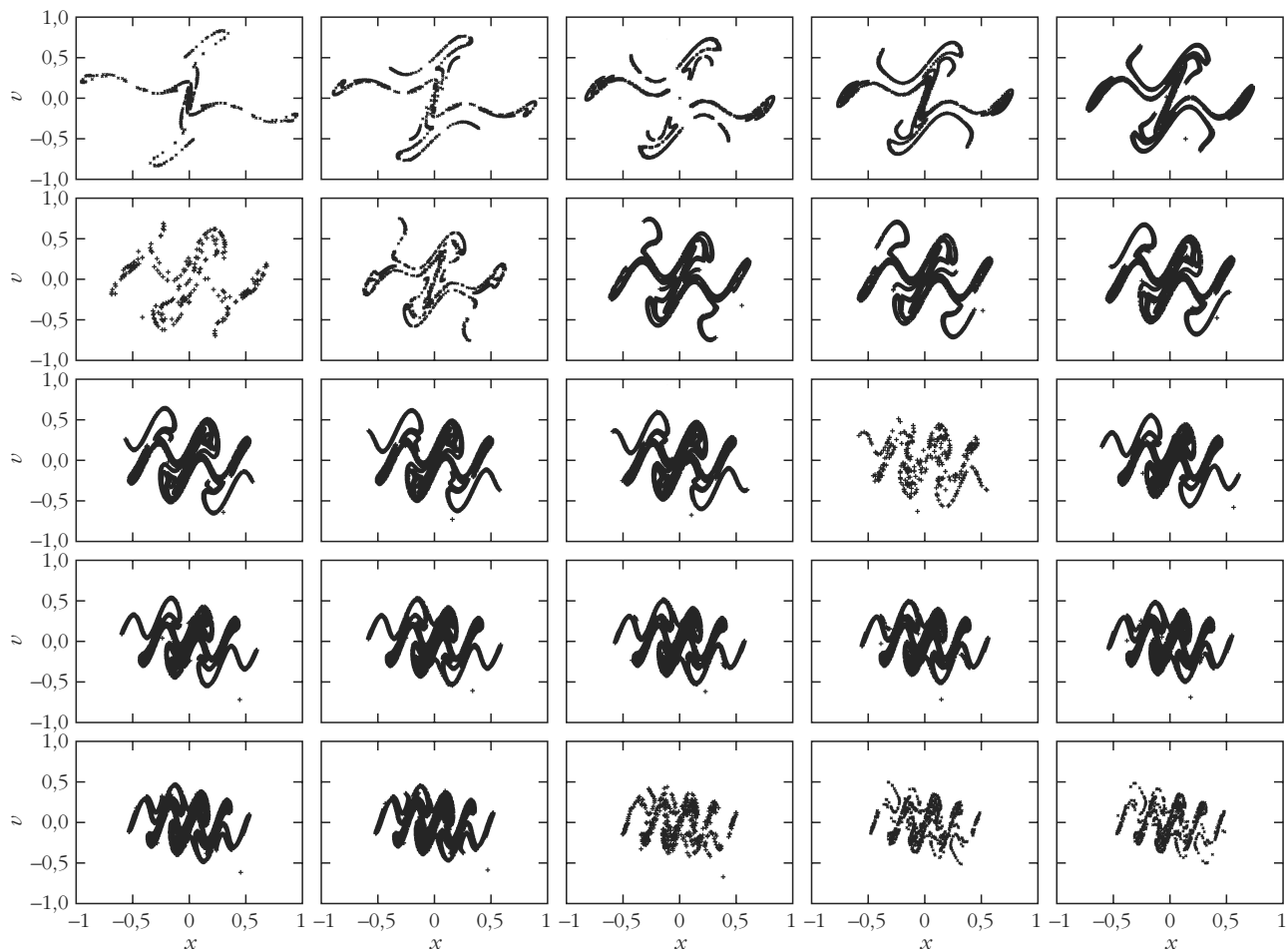
Az egyszerűség kedvéért a periódusidő egész számú többszöröseinél vizsgáljuk a trajektóriák helyzetét, így most az előbb ismertetett gondolatmenetet követve megnézzük, hogy azok a trajektóriák, amelyek még  $8T$  idő elteltével is a téglalapon belül vannak, hol voltak  $3T$ -nél és a kezdeti időpontban. (Ezek lesznek rendre az instabil sokaság, a nyereghalmaz, illetve a stabil sokaság. A próbálkozások azt mutatták, hogy ebben az esetben nem a  $8T$  felénél, tehát  $4T$ -nél, hanem  $3T$ -nél lesz a nyereghalmaz, vagyis a trajektóriák viszonylag gyorsan elérik a nyereghalmazt, 4. ábra.)



4. ábra. Az  $\ddot{x} = -x - 0,4\dot{x} + (1 - 16,636x^2) \cos(0,682t)$  mozgásegyenletű oszcillátor fázissterének jellegzetes alakzatai. A b) ábrán látható a nyereghalmaz, az a) ábrán a stabil, a c) ábrán pedig az instabil sokaság. A nyereghalmaz lokálisan mindig két Cantor-halmaz direkt szorzata: a b) ábra kinagyított részén jól látható a kettős Cantor-halmaz szerkezete.

5. ábra. Az  $\ddot{x} = -x - 0,4\dot{x} + (1 - 16,636x^2) \cos(0,682t)$  mozgásegyenletű oszcillátor nyereghalmazának stabil (szürke) és instabil (fekete) sokasága, amelyek közös pontjai adják a nyereghalmazt. Jól látható a fraktálszerkezet [9].





6. ábra. a) Az  $\ddot{x} = -x - 0,6\dot{x} + \sin(\mu x) \cos(4,1t)$  mozgásegyenletű oszcillátor stroboszkopikus leképezéssel kapott kaotikus halmazai (kaotikus attraktora vagy nyereghalmaza) a  $\mu$  paraméter függvényében, balról jobbra, felülről lefelé egyesével haladva  $\mu = 6$  és  $\mu = 30$  között. Látható, hogy a  $\mu$  paraméter növelésével a kaotikus halmaz mérete csökken, geometriája viszont bonyolultabb lesz. Ha finomítjuk  $\mu$  léptetését, és megnézzük például a  $\mu = 10$  és  $\mu = 12$  közötti tartományt tizedenként léptetve, akkor további szabálytalan váltakozásban jönnek elő újabb kaotikus attraktorok, illetve nyereghalmazok.

Az 5. ábra a nyereghalmaz és sokaságainak egy jellegzetes tulajdonságát mutatja. Nevezetesen azt, hogy a nyereghalmazt a stabil és instabil sokaságának a metszete adja ki.

## A szinuszos helyfüggő erővel gerjesztett harmonikus oszcillátor tranzien káosza

Most nézzünk meg olyan eseteket, amikor a trajektóriák nem a végtelenbe, hanem véges *határciklus attraktorhoz* tartanak, amelyek képe a periódusidőként vett metszeten [7] néhány *cikluspont*. A káosz ilyenkor is átmeneti, tehát tranzien, csak idővel nem a végtelenbe szalad a trajektória, hanem a kezdőfeltételtől függetlenül, periodikusan fog mozogni.

Induljunk ki a szinuszos helyfüggésű amplitúdóval gerjesztett harmonikus oszcillátor dimenziótlanított mozgásegyenletéből [1]:

$$\ddot{x} = -x - 2\beta \dot{x} + \sin(\mu x) \cos(\delta t), \quad (3)$$

ahol hasonlóan (1)-hez  $\beta$  a súrlódási együttható,  $\mu$  a nemlinearitási paraméter,  $\delta$  a gerjesztési frekvencia.

Ehhez a mozgásegyenlethez a  $\beta = 0,3$ ,  $\mu = 20$ ,  $\delta = 4,1$  paraméterértékekkel permanens káosz tartozik, tehát a rendszerben létezik kaotikus attraktor [1].

A tranzien káosza jellemző, hogy a permanens kaotikus mozgást eredményező paraméterértékek közelében kialakul, de utána rendszerint a permanens káosz paraméterértékeitől távol is létezni fog. Ha tehát a  $\beta$ , a  $\mu$  vagy a  $\delta$  paramétert megváltoztatjuk a fenti értékekhez képest, akkor előbb-utóbb tranzien káoszt kapunk.

Vizsgáljuk meg, hogy ha a gerjesztésre jellemző két paraméter (a  $\mu$  dimenziótlan nemlinearitási paraméter és a  $\delta$  dimenziótlan gerjesztési frekvencia) közül egyszerre csak egyet, például a  $\mu$ -t változtatjuk a permanens kaotikus viselkedést eredményező érték körül, hogyan alakul a fázistérbeli kép a  $\mu = 6$  és a  $\mu = 30$  közötti tartományban (6. ábra)!

A 6. ábrán látható eseteket egyenként megvizsgálva azt tapasztaltuk, hogy különböző kezdőpontokból indítva a mozgást, hosszabb-rövidebb ideig tartó kezdeti kaotikusság után ugyanazokra (de természetesen esetenként más és más) határciklus (vagy kaotikus) attraktorokra futnak be a trajektóriák. A határciklus attraktorok most nem a végtelenben vannak, hanem véges alakzatok, amelyeknek képe az alkalmazott strobosz-

kopikus leképezésen néhány cikluspont. Bármely periodikus attraktor cikluspontjait könnyen megkaphatjuk, ha bármely, ahhoz az attraktorhoz induló kezdőpontból elindítunk egy trajektóriát, és megnézzük a hosszú idő utáni kitérés-idő függvényét.

A nyereghalmazokat befoglaló területet próbálgatással „sejtettük meg”, és azt kaptuk, hogy a kaotikus mozgás a fázistér  $x \in (-1, 1)$ ,  $v \in (-1, 1)$  tartományában lesz. Majd ezt a tartományt lefedtük egy területtel, amelyikből „kivágtuk” a cikluspontok megfelelő kis sugarú környezetét, és megvizsgáltuk, hogy a korongokkal kivágott területen egyenletesen elosztott sok, például 1 000 000 kezdőpontból indított trajektória mennyi idő után éri el a korongokat, és közben milyen pályát ír le. A nyereghalmazokat az előző fejezetben ismertetett szisztematikus eljárással [8] kerestük meg, de a számítógépes futásidő lerövidítése céljából annyi egyszerűsítéssel, hogy kevesebb, csak  $10^4$  kezdőpontból indítottuk a trajektóriákat, mivel most csupán a nyereghalmaz geometriáját akartuk megmutatni, nem részletes szerkezetét.

A 6. ábrán jól lehet látni, hogy a véletlenszerűen kiválasztott paramétertartományban 25 esetből 10 esetben transziens káoszt tapasztaltunk. (Ezek a nem erőteljesen kirajzolódó, szakadásokat tartalmazó alakzatok (nyereghalmazok) rendre a  $\mu = 6, 7, 8, 9, 11, 12, 19, 28, 29, 30$  nemlinearitási paraméterértékhez tartoznak.) Tehát gyakori jelenségről van szó, amelynek fontos megállapítani a törvényszerűségeit.

A 6. ábrán erőteljesen kirajzolódó alakzatok kaotikus attraktorok, amelyek rendre a többi nemlinearitási paraméterértékhez tartoznak. Ezekben az esetekben permanens káoszt tapasztaltunk, legalábbis a vizsgált 10 000 időegységig [10].

A 6. ábra táblázatának alakzatait vizsgálva felvetődik az a kérdés, hogy esetleg minden kaotikus viselkedés egyszer abbamarad, csak elegendően hosszú ideig kellene vizsgálódnunk? Ezt esetünkben sem tudtuk teljes bizonyossággal eldönteni. A táblázat eseteit vizsgálva azt tapasztaltuk, hogy a nagy  $\mu$  értékekhez tartozó  $\tau$  átlagos élettartam két nagyságrenddel nagyobb, mint a kis  $\mu$  értékekhez tartozó. Táblázatosan összefoglalva:

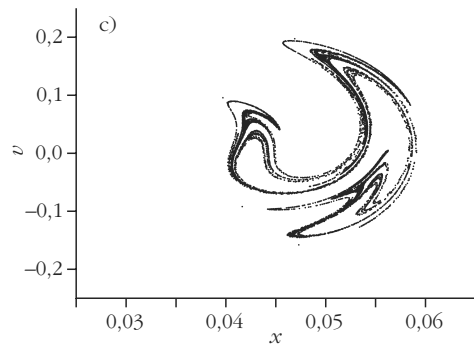
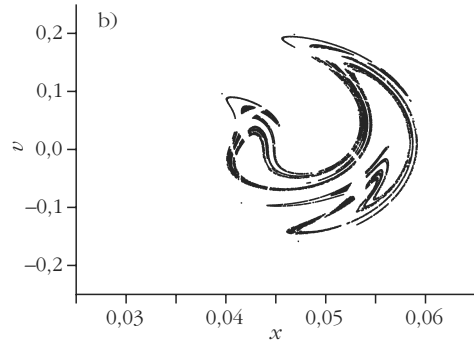
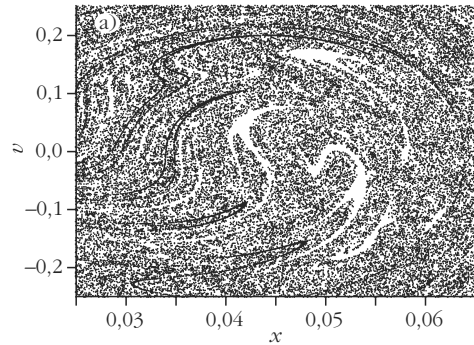
$\mu$	6	7	8	9	19	28	29	30
$\tau (T)$	6	50	10	50	400	4000	5000	4500

## Anharmonikus oszcillátor: nemlinearitás a rugóerőben

Végezetül vizsgáljuk meg az

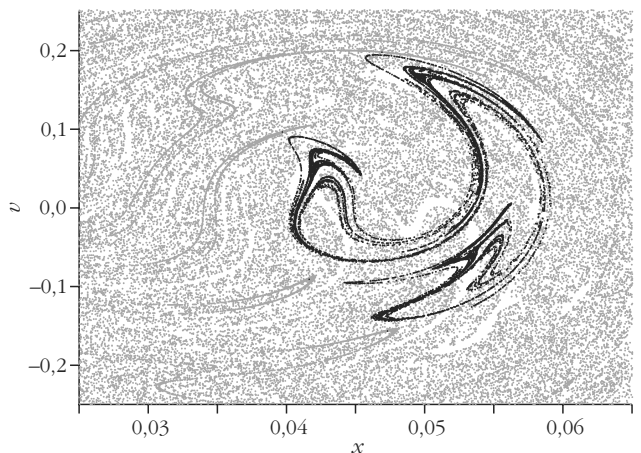
$$\ddot{x} = -x - 15625x^3 - 0,1\dot{x} + \cos(0,97t) \quad (4)$$

mozgásegyenletű, állandó amplitúdóval gerjesztett anharmonikus oszcillátor transziens káoszt (7. és 8. ábra)! Az előbbieken ismertetettek szerint először „megsejtettük”, hogy a nyereghalmaz az  $x \in (0,025, 0,065)$ ,



7. ábra. Az  $\ddot{x} = -x - 0,1\dot{x} - 15625x^3 + \cos(0,97t)$  mozgásegyenletű nemlineáris, állandó amplitúdóval gerjesztett oszcillátor fázistérnek jellegzetes alakzatai. A b) ábrán látható a nyereghalmaz, az a) ábrán a stabil, a c) ábrán pedig az instabil sokaság. Az alakzatokat úgy kaptuk, hogy megnéztük a még a c) a  $t_2 = 86T$  időpontban is kaotikus mozgásokat, hogy hol voltak az a)  $t_0 = 0$ , és a b)  $t_1 = 43T$  időpontban.

8. ábra. Az  $\ddot{x} = -x - 0,1\dot{x} - 15625x^3 + \cos(0,97t)$  mozgásegyenletű nemlineáris, állandó amplitúdóval gerjesztett oszcillátor stroboszkopikus leképezéssel kapott nyereghalmazának stabil (szürke) és instabil (fekete) sokasága, amelyek metszéspontja adja ki a nyereghalmazt.



$v \in (-0,25, 0,25)$  téglalapon belül van. A próbálgatással kapott három ciklusponttal kivágott téglalapról  $10^6$  kezdőpontból indítottunk trajektóriákat, és megkaptuk az exponenciális csökkenést a korongokkal kivágott téglalapon belül:  $\kappa = 0,00692$ ,  $\tau = 144$  ( $\sim 20T = 40\pi/0,97$ ).

Látható, hogy ebben az esetben a  $\tau = 20T$  viszonylag kis érték, azaz a káosz átlagos élettartama rövid. Összehasonlítva a vizsgált eseteket megállapíthatjuk, hogy a legrövidebb káosz-élettartam a végtelenben található attraktor esetén lépett fel (ez volt a parabolikus amplitúdóval gerjesztett harmonikus oszcillátor esete,  $\tau = 2T$ ), a leghosszabb pedig a szinuszos amplitúdójú gerjesztésnél volt ( $\tau = 5000T$ ).

## Záró gondolatok

A tranziens káosz világunkban a permanens káosznál jóval gyakrabban fellépő jelenség, ezért nagyon fontos törvényszerűségeinek feltárása. A trajektóriák látványos össze-vissza mozgása ideig-óráig tart csupán, azután beáll a reguláris mozgás. De gyakran a mozgásnak éppen az a szakasza érdekel bennünket, amíg még nem szabályos. A tranziens káosz jelenségére rengeteg példa sorolható fel a fizika egymástól legtávolabb eső területeiről. Ilyen jelenség például a hidrodinamikában a folyadékba kerülő szennyeződés alakváltozása [7], vagy – mivel nemcsak a disszipatív,

hanem a hamiltoni rendszerekben is fellép a tranziens káosz – gyakran modellezhető tranziens káoszzal a csillagászati korlátozott háromtest-problémában a kisbolygók, üstökösök mozgásai, például egy aszteroida időleges befogásakor, vagy elszökés előtti mozgásának vizsgálatakor. A csillagászatban nem ismeretlen a *ragadósság* nevű mozgásforma sem (angolul *stickiness*), amikor a rezonanciák határán bizonyos kaotikus kisbolygópályák hosszú ideig úgy viselkednek, mintha regulárisak lennének [11].

## Irodalom

- Slíz J.: Helyfüggő amplitúdóval gerjesztett harmonikus oszcillátor kaotikus viselkedése. *Fizikai Szemle* 60/4 (2010) 116–121.
- Biró I.: Mágneses ingák kísérleti tanulmányozása. *Fizikai Szemle* 56/1 (2006) 13–18.
- Gruiz M., Tél T.: Káoszról kicsit bővebben. *Fizikai Szemle* 55/6 (2005) 218.
- Békéssy L. I., Bustya Á.: Fizikai kettősinga vizsgálata. *Fizikai Szemle* 55/5 (2005) 185–191.
- Gruiz M., Tél T.: A káosz. *Fizikai Szemle* 55/5 (2005) 191–193.
- Götz G.: A pillangó-effektus – a káosz felfedezése a meteorológiában. *Fizikai Szemle* 43/12 (1993) 487.
- Tél T., Gruiz M.: *Kaotikus dinamika*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2002.
- T. Tél, M. Gruiz: *Chaotic Dynamics*. Cambridge University Press, 2006.
- Kecskés L.: *Egy ölnyi végtelen*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2002.
- W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling: *Numerical Recipes in Pascal*. Cambridge University Press, 1992.
- Érdi B.: *A Naprendszer dinamikája*. ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2001.

# A FELÜLETI ARANY-DEKORÁCIÓS REPLIKATECHNIKA

## Megemlékezés a hallei elektronmikroszkópia 50 éves évfordulója kapcsán

Malicskó László  
MTA, SZFKI

Jelen cikkben a *kristályfelületek atomos struktúrájának* megismerésében 1958-tól az első jelentős eredményeket lehetővé tevő konvencionális transzmissziós elektronmikroszkópos (TEM) *arany-dekorációs replikamódszerről* kívánunk megemlékezni. Bár ez a módszer az 1980-as évek végétől, a különféle pásztázó szondás mikroszkópok megjelenésétől már alig használatos, de a módszerrel elért legfontosabb eredmények néhány példán keresztüli megemlézése és bemutatása tudománytörténeti szempontból tanulságos lehet.

2010. november 15–16-án a németországi Halléban *Heinz Bethge ünnepi kollokvium – az elektronmikroszkópia 50 éve Halle (Saale)-ban* címmel megemlékezést tartottak ([www.bethge-kolloquium.de](http://www.bethge-kolloquium.de)).

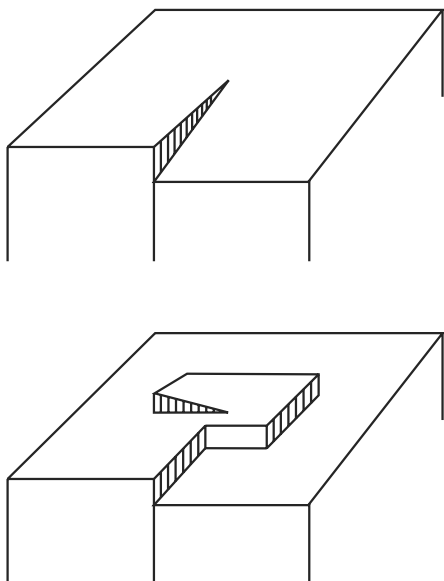
Jelen írással tiszteletteljes köszönetemet kívánom kifejezni néhai *Heinz Bethge* professzor úrnak és munkatársainak az Au-dekorációs, majd egyéb elektronmikroszkópos technikák saját témáimra történő alkalmazásában 30 éven át nyújtott baráti segítségükért.

## A felületi Au-dekorációs módszer megjelenésének előzményei

Az 1920-as és 40-es évek közt a kristályok – azaz hártaórol lapjaik – növekedésének, illetve leépülésének (oldódás, párolgás) magyarázatára két, NaCl-modellre kidolgozott, *atomos szemléletű* elmélet alakult ki.

A *Kossel–Stranski-elmélet* kimutatta, hogy az úgynevezett „lépcsős” és „könyökös” atomos struktúrájú lapokon mindig jelen vannak további építőelemek, ionok, atomok csatlakozására energetikailag kedvező atomi pozíciók. Így ezen lapok *folytonos növekedése* túltelített anyafázisban biztosított. Az „atomosan sima” lapok növekedéséhez azonban felületi *lépcsőkezdemenyek* kialakulása szükséges [1–3].

A *Volmer–Stranski–Kaisev-*, illetve *2D nukleációs* (2DN) *elmélet* szerint az atomosan sima kristálylapon adszorbeálódott építőelemek *termikus fluktuá-*



1. ábra. NaCl-modell kristályra  $b = a[100]$ , illetve  $b = (a/2)[110]$  típusú Burgers-vektorú csavardiszlokációk kibukkanási pontjából kiinduló „félvégtelen”, két-, illetve egyatomos felületi lépcső és a belőle Frank szerint kialakuló spirális növekedési lépcső vázlata. ( $a$  jelöli a rácsállandót).

ciója következtében kétdimenziós, atomos magasságú szigetecskék keletkeznek. Ha a 2D szigetecskék sugara egy, a túltelítettségtől függő kritikus sugarat elér, ezen 2D magok a lap mentén *spontán növekedőképesek* és biztosítják a növekedéshez szükséges lépcsőkezdeményeket [2–4].

A kristályplaszticitásra az 1930-as évektől kidolgozott *diszlokációs elmélet* szerint kristályok *sima* lapjaira kibukkanó *csavardiszlokációk* a lapokon „félvégtelen” (a diszlokáció Burgers-vektorának nagyságától függően) atomos vagy kétatomos felületi lépcsőt okoznak (Burgers, 1939). A Frank által később felismert és Burton, Cabrera által kidolgozott úgynevezett BCF-, illetve *csavardiszlokációs növekedés elmélet* (1949–51) szerint a „félvégtelen” felületi lépcső a korábbi 2DN elmélet alapján, spirális lépcsősor formájában (1. ábra) eleve folyamatosan biztosítja az energetikailag kedvező helyeket az egyébként *sima* kristálylapok „permanens” növekedéséhez, [2, 5–7]. Az *éldiszlokációk* felületre kibukkanási helyeinek növekedésbeli szerepe akkoriban még nem tisztázódott.

A BCF-elmélet megjelenése után az 50-es években a kristálynövekedési irodalomban erőteljes növekedési, illetve maradási spirál „vadászat” indult meg. Ebben szerephez jutott a „klasszikus felületi dekorációs” módszer is (például [8]). A Kossel–Stranski-elmélet alapján ugyanis már várható volt, hogy a kristályfelületen optikai mikroszkópiával közvetlenül nem látható lépcsőfigurák a felületre megfelelő körülmények közt lecsapatott „idegen anyag” heterogén 3D magképződésével, azaz *felületi dekorációval* láthatóvá tehetők. A jósolt atomos felületi alakzatokhoz hasonló sokatomos alakzatokat megfigyeltek ugyan optikai (például [8]), pásztázó és felületi replikás transzmissziós elektronmikroszkópos (TEM) módszerekkel, a

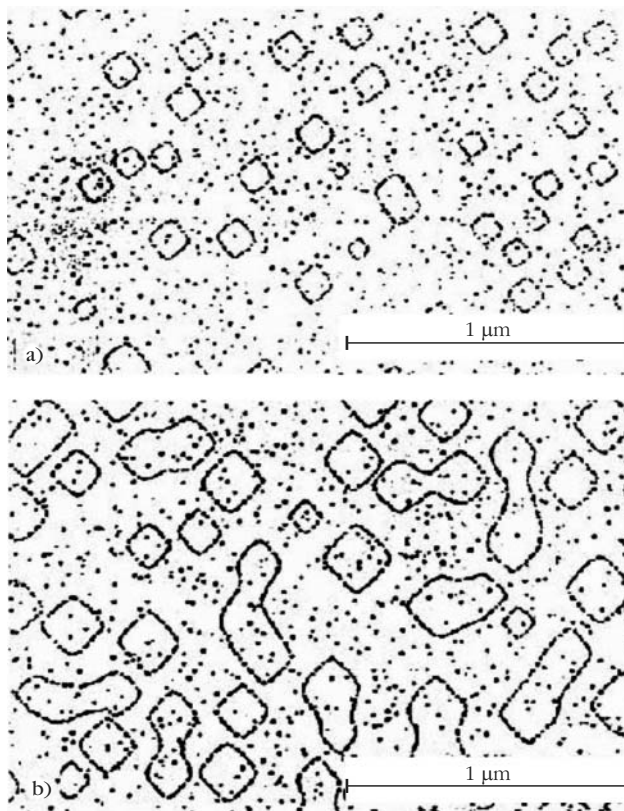
„klasszikus” felületi dekorációt is alkalmazva, azonban az *atomos* szintű felületi lépcsőstruktúrák láthatóvá tétele és részletes tanulmányozhatósága a dekoráló szemcsék akkori nem kellően kis mérete miatt nem volt elérhető.

## A TEM felületi arany-dekorációs replikatechnika

NaCl (100) hasítási lapjaira nagyvákuumban lecsapatott arany magképződésének vizsgálata során Bassett (1958) megállapította, hogy a felületre csak néhány atomrétegni aranyat felpárologatva az arany nem összefüggő réteggént, hanem kis, néhány nm méretű kristálykák formájában kondenzálódik. Az arany szemcsék elsősorban a felületi lépcsők mentén alakulnak ki és  $b = 0,3$  nm magas felületi lépcsőket is dekorálni képesek [9]. (Az arannyal párolgatott felületre folytonos vékonyréteget képező, az arany szemcséket lokálisan fixáló szenet kondenzálva, a leoldott, szénfilmbe ágyazott arany szemcsék – az „Au-dekorációs szénreplika” – TEM-ben jól láthatóak.)

Az 1950-es évek végén Halléban Heinz Bethge professzor munkatársaival a fent említett felületi struktúrák elektronmikroszkópos vizsgálatával foglalkozott. A Bethge-csoport Bassett új Au-dekorációs

2. ábra. NaCl (100) atomosan *sima* lapján a 2D magképződéses növekedés két fázisának Au-dekorációs TEM képe: a) egyedi 2D magok, illetve szigetecskék véletlenszerű keletkezése,  $\Delta\mu = 0,21$  eV túltelítettség mellett 0,5 ML (molekularétegni) ránövesztés után, b) a szigetecskék koagulációja,  $\Delta\mu = 0,21$  eV túltelítettség mellett, 0,8 ML növesztés után [12].



replikamódszerét azonnal átvette és néhány éven belül nemzetközi hírnevet biztosító sikerrel alkalmazta a NaCl-modell, majd más kristályok atomos szintű növekedési, párolgási felületi struktúráinak és egyéb felületi folyamatainak, valamint kristályhibáinak szisztematikus, kvalitatív és *kvantitatív* vizsgálatára [10, 11]. A Bethge-iskola eredményes munkásságának is köszönhetően az arany-, illetve a különféle kristályokhoz alkalmasabb nemesfém és más partner anyaggal történő felületi dekorációs replikás felületi struktúravizsgálatok a világ számos kutatóhelyén megindultak, és a pásztázó atomerő mikroszkópia (AFM) megjelenéséig (1987) a felület nanométer szintű geometriai struktúravizsgálatban kiemelkedő szerepet játszottak. A továbbiakban példaként a Bethge-iskola (kristálynövekedési 2DN és csavardiszlokációs elméletét atomos szinten igazoló) néhány alapvető eredményét mutatjuk be.

### NaCl (100) lapjának gőzfázisú növekedési stádiumai 2DN mechanizmus szerint

NaCl (100) atomosan sima, csavardiszlokáció-mentes laprészeire nagyvákuumban precízen szabályozott túltelítettség mellett NaCl-gőzt lecsapatva a 2D magképződéses növekedési folyamat atomos szinten tanulmányozható volt. A kísérletsorozatokból a következő kvalitatív eredmény adódott: a kristálylapon kezdetben, 0,5 monorétegnyi (ML) lecsapatás után, a Volmer–Stranski–Kaisev-elmélet szerinti kisebb-nagyobb atomos szigetecskék keletkeznek (a *2.a ábrán* apró fekete pettyek – Au nanokristálykák – által dekorált négyzetszerű alakzatok) véletlenszerű felületi eloszlásban. Továbbnövekedés során ezek egybenőnek (*2.b ábra*), egyre nagyobb, összefüggő atomos kristályréteg-szigeteket alkotva. A legkisebb detektált szigetecskesugarak (kritikus 2D magsugár) mérése alapján meghatározható volt azok kvantitatív túltelítettség-függése, amely az elmélet szerinti hiperbolikus csökkenést mutatja [12].

Megjegyezzük, hogy az atomosan sima lapok leépülése – párolgása, oldódása – során a felületi magokhoz hasonlóan, felületi vakanciákból „összeálló” 2D gödrök, úgynevezett *felületi lyukmagok* keletkeznek.

### NaCl (100) lapján diszlokációs elemi növekedési, illetve leépülési lépcsősor-alapformák

NaCl (100) sima hasítási lapjára nagyvákuumban az előbb említett körülmények közt NaCl-gőzt lecsapatva, illetve a lapot lepárolgatva kellő ideig, majd arannyal dekorálva, tipikus, a BCF-elmélet által jósolt (*1. ábra*) egy- és kétatomos magasságú „elemi spirál” lépcsősor volt megfigyelhető. A *3. ábrán* a központi egyatomos magasságú *körspirál* lépcsői közt két *bezárt* csavardiszlokációs lépcsőkezdemény is van. A *4.*



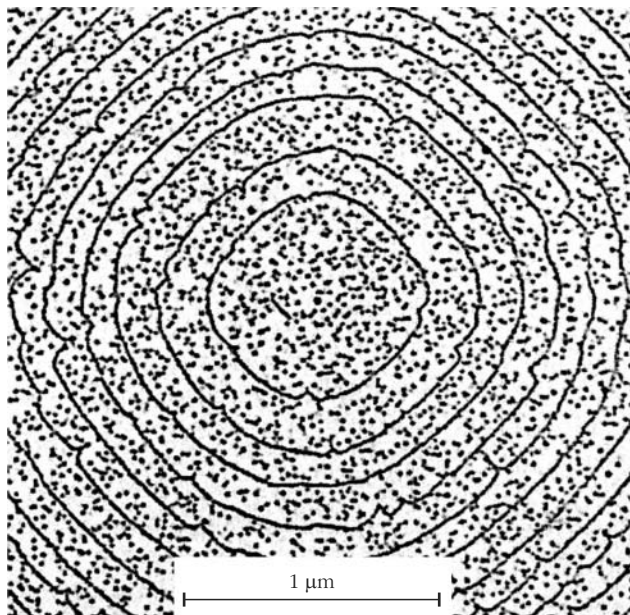
3. ábra. NaCl (100) lapján  $b = (a/2)[110]$  Burgers-vektorú csavardiszlokáció kibukkanási pontja körül kialakult egyatomos magasságú, Au-dekorált *körspirál* leépülési lépcsősor. ([13]-ban a 11. fotó.)

*ábrán* jól látszik, hogy a *négyzetes* spirállépcsősor szélő, egyenes lépcsői két-két környező egyatomos körlépcsővel egyesülnek.

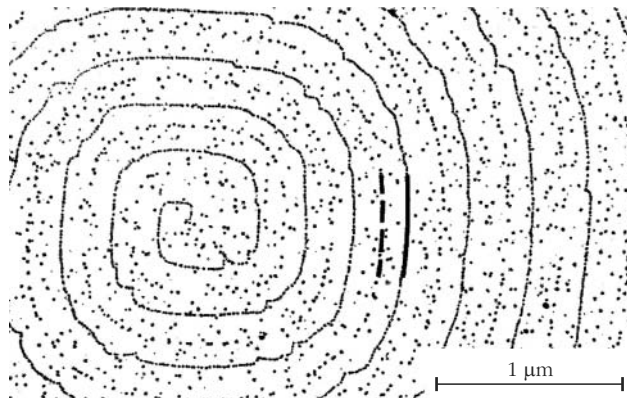
A Bethge-csoport vizsgálatai során az éldiszlokációk korábban tisztázatlan szerepére is fény derült. Kiderült, hogy az éldiszlokációk NaCl (100) felületre kibukkanási helyeinek „szabálytalan” ionelrendeződése növekedésnél, illetve leépülésnél *permanens 2D felületi mag*, illetve *lyukmag* képződési hely, amely körül „elemi” egyatomos *körlépcsősor* alakul ki (*5. ábra*).

4. ábra. NaCl (100) lapján  $b = a[100]$  Burgers-vektorú csavardiszlokáció kibukkanási pontja körül kialakult kétatomos magasságú, Au-dekorált *négyzetes spirál* leépülési lépcsősor. ([13]-ban a 4. fotó részlete.)





5. ábra. NaCl (100) lapján  $b = (a/2)[110]$  Burgers-vektorú éldiszlókáció körül kialakult, Au-dekorált, koncentrikus, egyatomos párolgási körlepcsősor. ([10]-ben a 21. oldal 20. ábrája.)



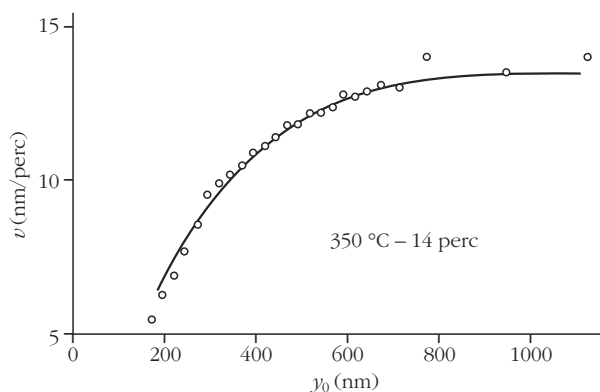
6. ábra. Kettős dekorált körspirál lépcsősor NaCl (100) lapján. A szaggatott és folytonos vonalköz  $350\text{ °C}$  hőmérsékleten 14 perc alatti lépcsőelmozdulást jelez. ([11]-ben a 17.6 ábra.)

## Atomos növekedési és párolgási lépcsők tangenciális sebességfüggése a lépcsőközi távolságtól

A BCF-elmélet gőzből növekedésre, illetve párolgásos leépülésre kidolgozott *felületi diffúziós modellje* szerint egy  $y_0$  lépcsőközi távolságú felületi lépcsősorfelület menti  $v_l$  tangenciális mozgási sebessége az  $y_0$ -nak elméletspecifikus  $\text{th}(Cy_0)$  alakú függvénye, ahol  $C$  konstans. A BCF diffúziós elmélet direkt kvantitatív kísérleti kontrollja lehetett tehát ezen  $v_l(y_0)$  függés kimutatása. A mérést „kettős dekorációs” módszerrel sikeresen elvégezték.

A módszer a következő volt: NaCl (100) hasítási lapját előzetesen nagyvákuumban lepárolgattva, illetve előnővesztve, a lapon a diszlókációk körül a fent már említett párolgási, illetve növekedési lépcsősorok keletkeznek. Kevés arany lecsapatásával néhány kisméretű aranyzemcsével a lépcsők pillanatnyi helyzetét „meg-

7. ábra. Egyatomos lépcsősor tangenciális növekedési sebességének függése a lépcsőközi távolságtól [14].



jelölték” (6. ábrán a szaggatott vonal). Ezután jól meghatározott túltelítettség mellett a lépcsősort adott ideig továbbpárolgatták, illetve -növesztették. Ezt a véghelyzetet kissé nagyobb és több aranyzemcsét eredményező lecsapatással rögzítették (6. ábrán a folytonos vonal). A két lépcsőhelyzet közt mért távolságból és időből a tangenciális sebesség meghatározható volt. A 7. ábra a mérésorozat BCF felületi diffúziós modellt igazoló eredményét mutatja [13].

Megemlítendő, hogy Magyarországon az 1960-as és 80-as évek közt – tudomásom szerint – az MTA Műszaki Fizikai Kutató Intézet Vékonyréteg Osztálya és a BME Kísérleti Fizika Tanszékén az MTA Kristálynövekedési Kutatócsoport munkatársai alkalmazták szisztematikusan és sikeresen a fenti módszert fém, félvezető vékonyrétegek, illetve optikai egykristályok növekedési folyamatainak és kristályhibáinak vizsgálatára.

## Irodalom

- W. Kossel: Die molekularen Vorgaenge beim Kristallwachstum. In: M. Falkenhagen: *Quantentheorie und Chemie*. Leipziger Votrage, 1928, 1–46.
- B. Honigmann: *Gleichgewichts- und Wachstumsformen von Kristallen*. Steinkopf Verl. Darmstadt, 1958.
- Malicskó L.: A kristálynövekedés elméleti alapjai. *Fizikai Szemle* 12, (1962) 172–181.
- M. Volmer: *Kinetik der Phasenbildung*. T. S. Verl. Dresden u. Leipzig, 1939, 80–87. és 175–183.
- F. C. Frank: The influence of dislocations on crystal growth. In: *Crystal Growth. Discussion of the Faraday Society*. No. 5, 1949, 48–54. és W. K. Burton, N. Cabrera: Crystal growth and surface structure, Parts I and II. *Ibid.* 33–48.
- W. K. Burton, N. Cabrera, F. C. Frank, *Phil. Trans. Roy. Soc. A243* (1951) 299.
- B. Mutaftschiev: Crystal growth and dislocations. In: *Dislocations in Solids*. (Ed. F. R. N. Nabarro) Vol. 5. North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1980, 57–126.
- G. G. Lemmlejn, N. V. Gliki, *Dokladi AN SSSR* 94 (1954) 473–475.
- G. A. Bassett, *Phil. Mag.* 3 (1958) 1042–1045.
- H. Bethge: *Phys. Stat. Sol.* 2 (1962) 3–27. és 775–820.
- Elektronenmikroskopie in der Festkörperphysik*. (Hrsg. von H. Bethge, J. Heydenreich) Verl. der Wissenschaften, Berlin, 1982.
- K. W. Keller, *J. Cryst. Growth* 78 (1986) 509–518.
- K. W. Keller: *Dissertation*. Halle, 1968.
- K. W. Keller: Surface microstructures and processes of crystal growth observed by electron microscopy. In: *Crystal Growth and Characterisation*. (Eds. R. Ueda, J. B. Mullin) North-Holland, Amsterdam, 1975. 361–372.



# EGYSZERŰEN BONYOLULT – A SITNIKOV-PROBLÉMA

Kovács Tamás  
Max Planck Institute for the Physics of Complex Systems  
Drezda, Németország

## Miért probléma, ha ilyen egyszerű?

Nézzük meg először, hogy tényleg egyszerű-e? Egy tömegpontról akkor mondjuk, hogy Sitnikov-féle mozgást végez, ha egy egyenes mentén mozog, mégpedig olyan egyenes mentén, amely két egyenlő tömegű, egymás körül keringő égitest közös tömegközéppontján halad át. Itt mindjárt kiderül, hogy csillagászati példáról van szó. Amikor problémáról beszélünk, burkoltan a harmadik égitest mozgására vagyunk kíváncsiak, amit a két főkomponens (az egyenlő tömegű égitestek) gravitációs hatása befolyásol (*1. ábra*). A Newton-féle gravitációs erő centrális, azaz az adott tömegpontok között húzott egyenes mentén hat [1]. Ebből és a Sitnikov-rendszer szimmetrius elrendezéséből következően a kis tömegű égitestre ható két erő eredője valóban a függőleges egyenesbe esik. Tehát a mozgás tényleg egy egyenes mentén zajlik. Ha a két főkomponens körpályán kering (azaz távolságuk minden időpillanatban állandó marad), akkor a harmadik égitestre – az egyenes bármely pontján – a fősíktól (a két nagy tömegű test keringési síkjá) mért távolságával arányos erő hat. Ezen erő hatására a tesztrészecske (kis tömege miatt nevezhetjük így is) a tömegközéppont körül harmonikus rezgőmozgást végez.

Körpályát feltételezve a rendszer nem tűnik túlságosan bonyolultnak. Szép példája a középiskolai harmonikus oszcillátornak, bár a megoldás egy kicsit bonyolultabb alakú, ahogy azt már 1911-ben megmutatták [2].

Azonban nem véletlenül hivatkoznak problémaként a rendszerre. Ha megengedjük, hogy a főkomponensek keringjenek egymás körül, amit egy kettős csillagrendszer esetében joggal feltételezünk, és nem ragaszkodunk a görögök által tökéletesnek vélt körpályához, akkor a harmadik, kis tömegű égitest mozgásában drasztikus változásokat figyelhetünk meg. És ne gondoljunk arra, hogy nyolcas alakban vagy valami kusza pályán kezd el vándorolni. Mindvégig az egyenes mentén marad, de mozgása oly rendszertelenné válik, hogy azt a mai fizikában használatos kaotikus szóval illethetjük. És mindez csupán azért, mert a főkomponensek ellipszispályán keringenek egymás körül, vagy másképp megfogalmazva, időben változik a távolságuk, hol közelebb kerülnek egymáshoz (pericentrum környékén, ahogy a csillagászok mondják), hol pedig eltávolodnak egymástól (apocentrum környékén).

Még egy fontos következménnyel jár az, hogy gerjesztett rendszerrel van dolgunk. Nevezetesen, a har-

madik test mechanikai energiája a mozgás során nem állandó. Az ilyen rendszerek dinamikai viselkedésével bővebben [3] foglalkozik.

Ennyi ismerettel a hátunk mögött már nyugodtan mondhatjuk, hogy a Sitnikov-probléma valóban probléma. Hiszen vannak esetek, és ezek a tipikus esetek, amikor bizony bonyolult lehet az egyenes vonalú mozgás is. Természetesen ebben a bonyolultságban nyilvánul meg a rendszer dinamikai viselkedésének a szépsége, amelyet az írás következő részében ismerhet meg az Olvasó.

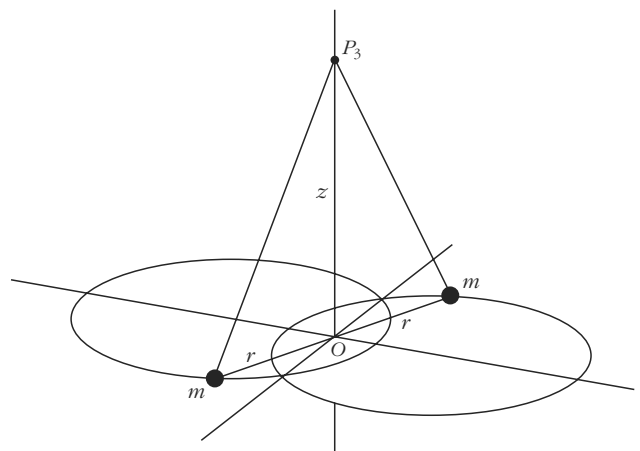
Mielőtt azonban a probléma alaposabb vizsgálatába fognánk, egy mondatot kell ejteni a rendszer névadójáról is. *K. Sitnikov* orosz matematikus volt, aki elsőként bizonyította az égi mechanika híres rendszeréről, a háromtest-problémáról, hogy benne oszcillátormozgás is lehetséges [4]. Ezért róla nevezték el ezt a speciális elrendezést.

## Hosszú tél rövid nyár, rövid tél hosszú nyár?

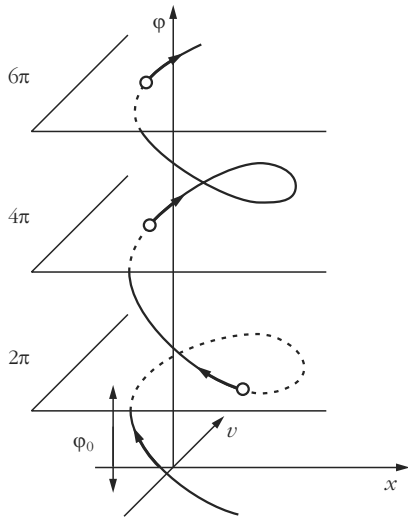
Ha az ember kaotikus viselkedéssel találja szembe magát egy dinamikai rendszer vizsgálata során, értem itt ez alatt, ha a kitűzött feladat megoldása időben rendszertelen változást produkál, akkor néhány jól bevált módszert fel kell adni és helyettük újakat kell bevezetni. Itt három dolgot fogok röviden megemlíteni, amelyeket az Olvasó szinte minden, káosszal foglalkozó tankönyvben sokkal részletesebben is megtalál [3]:

- az időbeli viselkedés helyett a rendszer fázisterének tanulmányozása a célravezető,

*1. ábra.* A Sitnikov-probléma elrendezése. Két egyenlő ( $m$ ) tömegű égitest egymás körül Kepler-pályán kering, relatív távolságuk  $2r$ . A harmadik elhanyagolhatóan kis tömegű égitest ( $P_3$ ) a főkomponensek síkjára merőleges, azok tömegközéppontján áthaladó, egyenes mentén mozog.



Köszönet illeti *Gruiz Márton*t stilsztikai javaslataiért.



2. ábra. A stroboszkopikus leképezés vázlatosan. A háromdimenziós fázistérrel a gerjesztés periódusával megegyező időnként fényképezzük le (a mozgásegyenlet dimenziótlanítása után a Sitnikov-probléma esetén ez éppen  $2\pi$ ), és csak az ezekhez a portrékhoz tartozó kitérés-sebesség párokat tartjuk meg. Az ábráért köszönet Tél Tamásnak és Gruiz Mártonnak.

- a fázistérben leképezéseken látható jól az a geometriai struktúra, amely a kaotikus viselkedést jellemzi,
- végül, az egyenleteket számítógéppel, numerikusan kell megoldani, mivel egyszerű alakú megoldásaik nem léteznek.

A következőkben a fázistér alakzatainak megismerésén keresztül derítjük fel a probléma különböző mozgástípusait.

A rendszert leíró mozgásegyenletben egyetlen függő változó van, a harmadik égitest fősíktól mért távolsága, ezért mondhatjuk, hogy egy szabadsági fokú a rendszer. Ez részben igaz is akkor, amikor a kettősök körpályán keringenek, ha azonban a gerjesztés is megjelenik (ellipszisen mozog a kettős), akkor azt mondjuk, hogy másfél szabadsági fokú a rendszer. Az idő a plusz fél. Adott szabadsági fokú rendszer fázistere a szabadsági fokok számának kétszerese, mivel minden egyes szabadsági fokhoz tartozik egy helykoordináta és egy sebesség, amelyek a fázistérrel kiegészítik. Ebből a szempontból az idő kicsit furcsa mennyiség, de a szabályhoz alkalmazkodik, úgyhogy a fél szabadsági foka egy fázistér-dimenziót ér. A Sitnikov-probléma fázistere tehát háromdimenziós, a kitérés, az ehhez tartozó sebesség és az idő, vagy a helyette bevezethető fázis, ami a főkomponensek pillanatnyi helyzetére jellemző. E három adat egyértelműen jellemzi a rendszer állapotát. Vagyis a mozgásegyenlet megoldása adott pillanatban ebben a 3-dimenziós térben egyetlen pont, követve a mozgást pedig egy folytonos fázisgörbe (trajektória).

A kaotikus viselkedés tanulmányozásához, ahogy már említettem, leképezéseket célszerű bevezetni. Gerjesztett rendszerek esetén ez viszonylag egyszerű, mert csak a gerjesztés periódusát kell a mintavétel egységének választani, és így információvesztés nélkül kaphatunk képet a dinamikai viselkedésről. A

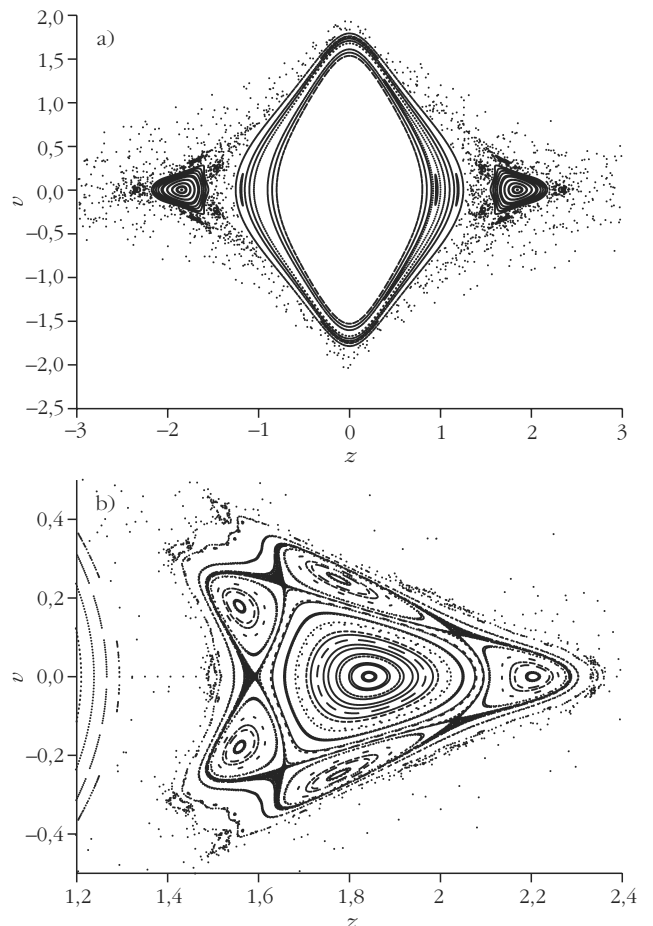
Sitnikov-probléma esetében ez a háromdimenziós fázistér „feldarabolását” jelenti az időtengely (vagy a fázistengely) mentén. Az effajta leképezést stroboszkopikus leképezésnek nevezik, hiszen adott idő elteltével nézünk csak rá a rendszerre, és mentjük el a kitérés-sebesség ( $z, v$ ) adatpárokat (2. ábra). Az elnevezést a hasonló elven működő stroboszkóplámpa ihlette.

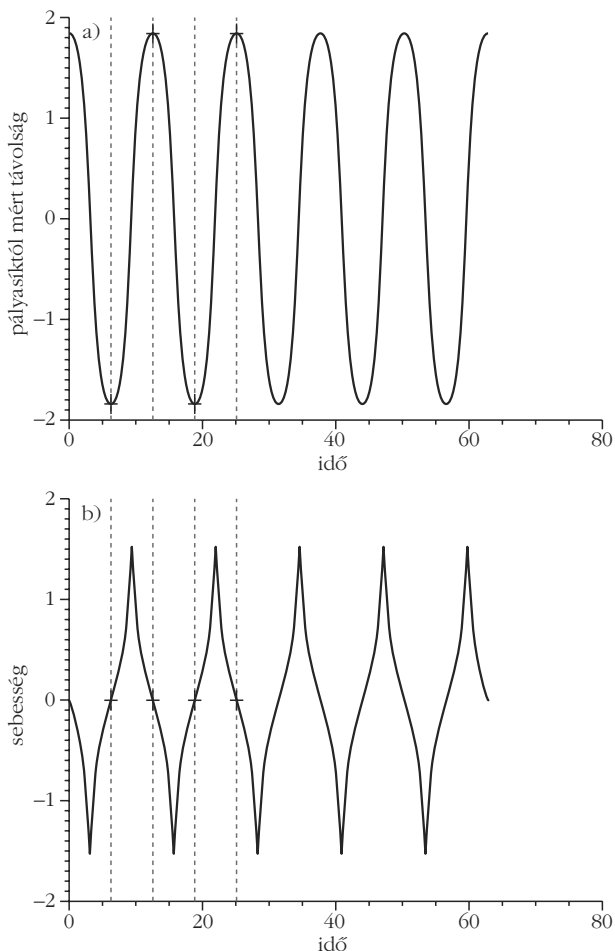
Most nézzük meg, hogy milyen szerkezetű egy ilyen stroboszkopikus metszet, fázisportré (3. ábra). Láthatunk rajta önmagukba záródó közel koncentrikus görbéket (amelyek „szigeteket” alkotnak), azok közepén elhelyezkedő pontokat, a görbék között vastag sötét sávokat, valamint szétszórt rendezetlenül elhelyezkedő pontokat. A következőkben azt ismerjük meg, hogy milyen mozgást reprezentálnak ezek az alakzatok.

### A „tökéletes” mozgás

Haladjunk belülről kifelé. A zárt görbék minden esetben egy pontot fognak közre a fázistérképen. Ezek a pontok a periodikus mozgásoknak felelnek meg. Ez

3. ábra. Fázisportrék különböző excentricitásra. a) 0,1-es pályalapultság (az ellipszis körtől való eltérése) mellett a Sitnikov-probléma egy fázisportréja. Középen koncentrikus zárt görbék (a legbelső régió nincs ábrázolva), majd a ciklusoknak megfelelő szigetek kétoldalt. b) A 2:1-es rezonancia ( $z = 1,84, v = 0$ ) jobb oldali szigete  $e = 0,093$ -ra.





4. ábra. Kitérés-idő a), sebesség-idő b) görbék 2:1-es rezonanciában. A stroboszkopikus leképezés metszeteinek a függőleges szaggatott vonalak felelnek meg. Láthatjuk, hogy minden második metszeten kapjuk ugyanazt a kitérés-sebesség párt.

az a mozgástípus, mely során a harmadik égitest éppen ugyanabba a pozícióba, ugyanakkora sebességgel érkezik vissza minden egyes fénykép készítésekor (hasonlóan, mint az ingaóra ingája). Helyesebben szólva ez a megfogalmazás csak egyetlen pontra érvényes. Vannak olyan periodikus pályák, amelyek minden második fényképen lesznek ugyanazon a helyen, vagyis az 1., 3., 5. stb. fényképeken egy adott helyen jelennek meg, a páros számúakon pedig egy másik helyen. Az ilyen periodikus mozgásoknak két pont felel meg a fázisportrén, ahogy az látszik is a fő sziget két oldalán jobbról és balról nagyjából  $z = \pm 1,84$  és  $v = 0$  helyeken. Az, hogy ez a mozgás két pontot ad a metszeten azt jelenti, hogy amíg ugyanabba a pozícióba ugyanazzal a sebességgel megérkezik a részecske két fényképezés történik, azaz a főkomponensek két keringést végeznek. Az első keringés végén a tesztészecske a  $z = -1,84$ ,  $v = 0$  pontban található, a második végén pedig a  $z = 1,84$ ,  $v = 0$  pontban. Az effajta mozgást kettes ciklusnak, vagy a csillagászatban használt 2:1-es rezonanciának mondjuk, mivel a tesztészecske és a főkomponensek periódusideje racionális arányban állnak egymással. Így már kitalálható, hogy az egyetlen pont az 1:1-es rezo-

nanciának felel meg, ahol a tesztészecske – ahogy azt már láttuk – egy főkomponens-keringés alatt tesz meg egy teljes periódust. A harmadik égitest kitérés-idő diagramján mindezt ellenőrizhetjük is (4. ábra). A mozgás kezdőfeltételétől függően, ezeken kívül természetesen még számtalan különböző rezonancia található [5].

### Kváziperiodikus pályák

A következő mozgástípus nem annyira szabályos, mint az előző részben bemutatott tökéletesen periodikus. Ezek a pályák a fázisportrén zárt görbéket rajzolnak ki. Ez annak felel meg, hogy mozgása során a harmadik test a tömegközéppont körüli kitéréseket végez ugyan, de soha, egyik fényképezéskor sem tér vissza ugyanabba a pontba, ugyanazzal a sebességgel. Másképp mondván, a mozgás több periodikus megoldás összege, ilyenkor a főkomponensek keringési periódusa és a tesztészecske periódusa nem racionális arányban állnak egymással. Az ilyen mozgásokat közel-periodikusnak, vagy idegen szóval *kváziperiodikus*nak mondjuk. Az elnevezésben benne van, hogy a mozgás viszonylag rendezett, de nem tökéletesen ismétli önmagát. Az, hogy közel-periodikus egy mozgás a fázisportrén – többek között – abban nyilvánul meg, hogy az általuk formált zárt görbék éppen a periodikus pályákat reprezentáló pontok körül alakulnak ki.

### Mindörökké káosz

Bár a harmadik test energiája nem marad meg a mozgás során, általánosabb értelemben a dinamika mégis *konzervatív*, ugyanis a súrlódás hiánya miatt a fázistér fogat nem változik, konzerválódik (lásd Liouville-tétel). Ezért soroljuk a Sitnikov-problémát is a konzervatív rendszerek közé. Az 1960-as években kimondott és bizonyított matematikai tétel határozza meg, hogy a konzervatív rendszerekben a fázisportré zárt görbéi közül melyek maradnak meg hosszú ideig, és melyek azok, amelyek a rendszert erő zavaró hatás (jelen esetben a kettősök pályalapultsága) következtében felbomlanak, és „törmeléként” vastag sávokat hagynak maguk után [3, 6–8]. Ezekben a sávokban a mozgás időben rendezetlen, azaz a fényképezés pillanatában a sávon belülre *majdnem* bárhova eshet a pont. Ez a fajta mozgás tehát még „tökéletlenebb”, mint a közel-periodikus megoldások voltak. Ezek a mozgások a kaotikus viselkedés megtestesítői a rendszerben. A kis tömegű égitest véges térrészben maradván végez rendezetlen mozgást, azaz a tömegközéppont-átmenetek rendezetlenül követik egymást. Az effajta mozgás érdekessége, hogy mindvégig (*permanensen*) kaotikus marad, és a részecske a tömegközéppont körül végtelen hosszú ideig, szabálytalan időközökkel oszcillál. Ez annak következménye, hogy a fázisportrén a görbék nem metszhetik egymást, ellenkező esetben a megoldás nem egyértelmű. Tehát a kaotikus sávokból a pontok nem vándorolhatnak el a fázis-

tér tetszőleges területeire, mert ahhoz keresztezniük kellene az őket körülvevő közel-periodikus mozgásoknak megfelelő zárt görbéket (lásd 3.b ábra). Következésképpen a tesztrészecske a főkomponensek síkjától lefelé és felfelé csak meghatározott határok között mozoghat.

Fentebb említettem, hogy a kaotikus mozgás során a trajektória majdnem bárhová eljuthat a fázistér egy meghatározott részében. A majdnem szó annak köszönhető a mondatban, hogy ha nagyító alá tesszük ezeket a sávokat, láthatjuk, hogy kisebb skálán is jelen vannak a kváziperiodikus mozgás szigetei, mintegy beágyazva a kaotikus sávokba (5. ábra), és ez, bármekkora nagyítót is használunk, megmarad. Azt mondjuk, hogy a kaotikus sávok önhasonló alakzatok, nagyságrendekkel változtatva a felbontást ugyanazt a struktúrát kapjuk. Hasonlóan a szigetek partvonalához, a Hold felszínének kráterezettségéhez, vagy éppen a karfiol mintázatához. Az ilyen alakzatokat fraktáloknak nevezzük [9, 10].

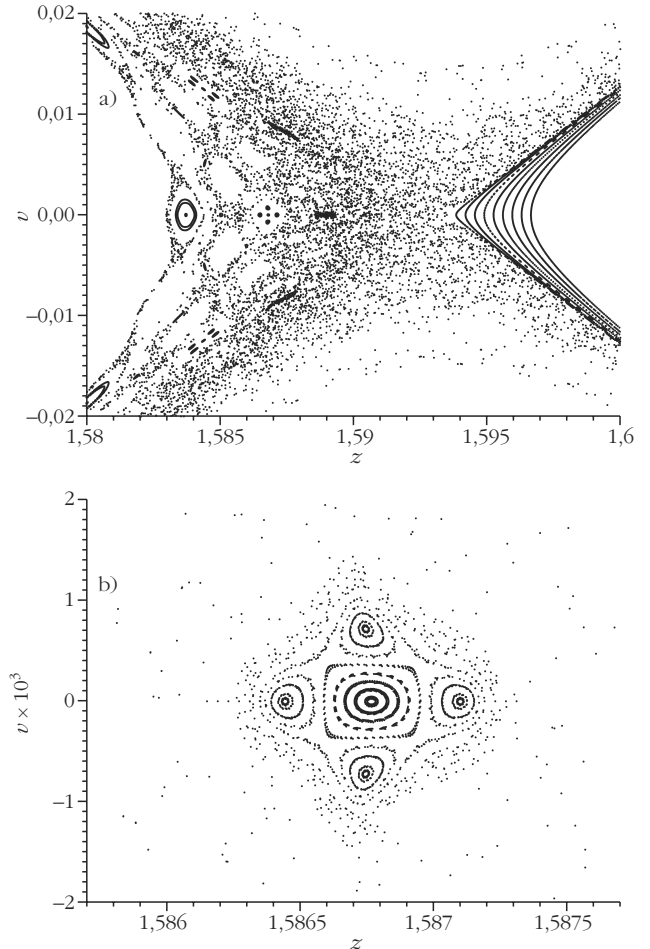
Látható tehát, hogy a kaotikus viselkedés megjelenésével a fázistérben meghatározott alakzatok rajzolódnak ki. Kvantitatív vizsgálatok kimutatták, hogy a dinamika és a geometria rendezetlen mozgás esetén is szoros kapcsolatban áll egymással.

Itt mutatkozik meg a kaotikus viselkedés tanulmányozásában a fázistér használatának előnye, mert – ahogy láthatjuk – a rendezett mozgás egyszerű fázistérbeli megnyilvánulásai mellett a bonyolult viselkedésnek komplex, de jól meghatározható alakzatok felelnek meg.

## „Akik” elsőknek

A fázisportré szerkezetének kialakításában látszólag jelentéktelen szereplőnek tűnnek a szigetek között és körül – soha nem belül – elhelyezkedő rendezetlenül szétszórt pontok (3.a és 3.b ábra). Ha az Olvasó tüzetesebben megnézi az ábrákat, akkor láthatja, hogy a zárt görbék között nincsenek ilyen pontok. Ott a kaotikusan viselkedő pályák véletlenszerű pontjai a kaotikus sávot rajzolják ki, amelynek jól meghatározott szerkezete van, mint azt feljebb láttuk. Akkor vajon milyen mozgásnak felelnek meg a szétszórt pontok?

A korábbiakban már megismert kaotikus viselkedés, bármeddig is figyeljük a rendszert, mindvégig ugyanazt a fajta viselkedést mutatja. A permanens káosz jelenségével a fizikusok már a múlt század derekán tisztában voltak, az 1980-as évek közepétől azonban egyre inkább előtérbe került a kaotikus viselkedés azon fajtája, amely csak véges ideig tart, majd a kezdeti rendezetlenség után viszonylag egyszerű mozgásba „torkollik”. Ezt a jelenséget véges idejű vagy másképpen *tranzienst káosz*nak nevezik. Eleinte disszipatív rendszerekben kutatták a jelenséget, mivel azok fázistérben található olyan alakzatok, amelyek mintegy vonzzák a trajektóriákat, és miközben a fázisgörbék megközelítik ezeket az objektumokat, a mozgás kaotikus jelleget ölthet (miután elérték azokat, a bonyolult mozgás megszűnhet).

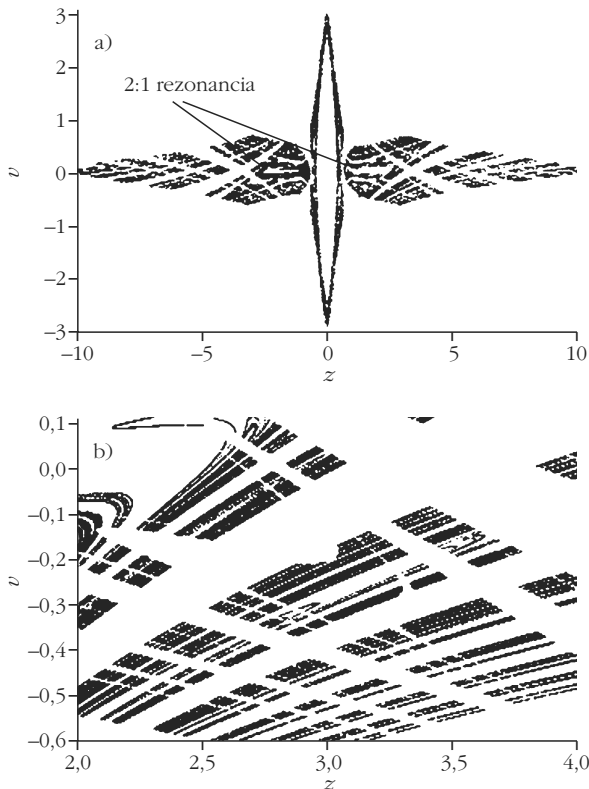


5. ábra. A 3. ábra kinagyított részlete. A kaotikus sávot sűrűn bejárja a trajektória, de vannak szigetek amelyek tiltott tartományok. Ez az egymásba ágyazott struktúra a felbontás növelésével is megmarad. A kaotikus sávok fraktálhalmazt alkotnak a fázistérben.

Vagyis, ha a rendszer időbeli viselkedését sokáig követjük, akkor a kezdetben rendszertelenül viselkedő mozgás rendezetté válhat.

Súrlódásmentes esetben is kimutatták a jelenséget. Ezekben a rendszerekben a véges idejű káosz *szórási jelenség*ként realizálódik. Azaz a vizsgált részecske, tömegpont kezdetben szabályos mozgást végez, majd megközelíti a szórócentrumot, ott éri valamiféle fizikai hatás, majd e hatás következtében kidobódik, elhagyja a szórási tartományt, és mozgása ismét egyszerűvé válik. Itt a véges idejű kaotikus viselkedés a szórócentrum közelében figyelhető meg.

Nézzük példának a Sitnikov-problémát. Ebben, konzervatív rendszer lévén, várható szórási jelenség. Valahonnan „magasról” beejtjük a tesztrészecskét a tömegközéppont felé. Eleinte nagyon kis gyorsulással indul hiszen még elég távol van a főkomponensktől, és azok hatása így még igen kicsi. A tömegközéppont közelébe érve, ahol távolsága már összemérhető a kettős relatív távolságával, a főkomponensek gravitációs hatása egyre inkább érvényesül, és a harmadik égitest mozgása elveszti addigi (viszonylag egyszerű) jellegét. Elkezd oszcillálni a tömegközéppont körül, majd valamennyi idő múlva eltávolodik a



6. ábra. A kaotikus nyereghalmaz  $e = 0,57$ -re. a) A nyereghalmaz Cantor-felhő típusú objektum, fraktáltulajdonságai jól meghatározhatók. Látszik, hogy kevésbé sűrűn tölti ki a fázissteret, mint a kaotikus sávok. Mérete viszont kiterjedtebb, és a hozzá tartozó mozgás dinamikai tulajdonságai is instabilabbak, kaotikusabbak, mint a permanens káoszé. b) Az a) panel kinagyított részlete.

fősíktól, és elhagyja a rendszert (felfelé vagy lefelé) ismét egyszerű mozgással.

A korábban említett szétszórt pontok a fázisportrén azoknak a „szóródó” pályáknak felelnek meg, amikor a részecske hosszabb-rövidebb idő után elhagyja a rendszert. Ahogy a végtelen idejű kaotikus viselkedésnek is egy meghatározott geometriájú alakzat, a kaotikus sáv felel meg a fázis térben, úgy a tranzien káoszért is egy jól definiálható objektum felel. Ezt nevezük *kaotikus nyereghalmaz*nak. Ennek egyik fontos tulajdonsága, hogy ez is fraktálhalmaz, akárcsak a kaotikus sávok. Geometriája azonban eltérő jellegű. Azt mondjuk, hogy a kaotikus nyereghalmaz kettős vagy összetett fraktál, mert mindkét irányban mérve, dimenziója tört szám. Természetesen ez is önhasonló, mint minden más fraktál (6. ábra). A tranzien jelenségek körében is megtalálták a kapcsolatot a mozgás dinamikai jellege, és a nyereghalmaz geometriai felépítése között. Itt kell megjegyezni, hogy ebben az összefüggésben szerepel egy eddig mellőzött, ám igen fontos tényező, a káosz átlagos élettartama. Ez, mint neve is mutatja, azt adja meg, hogy ha sok-sok különböző kezdőfeltételből induló mozgást vizsgálunk a nyereghalmaz közelében, akkor azok átlagosan mennyi ideig mutatnak – jelen problémánkban a fősík közelében – kaotikus viselkedést. Érdekes, hogy adott probléma, adott paraméterére ez az érték állandó bárhonnán is vesszük a kezdőfeltételeket.

Végezetül egy igen érdekes jelenséggel zárnam rövid kalandozásunkat a Sitnikov-probléma fázis terében.

Említettem, hogy ha a numerikusan megszerkesztett nyereghalmaz (a 6. ábrán látható pontfelhő) valamely pontjából indítjuk a tesztrészecskét, akkor az megközelíti a tömegközéppontot, végez valahány, előre meghatározhatatlan számú rendszertelen rezgést, majd egyszer csak elhagyja a rendszert. Felmerül a kérdés, találhatunk-e olyan kezdőfeltételt, amelyből indítva a tesztrészecskét, az megközelíti a tömegközéppontot, és a továbbiakban mindörökké rendszertelen rezgéseket végez körülötte, azaz többé nem hagyja el a rendszert. A válasz, igen. E kezdőfeltételeknek „maga a nyereghalmaz” felel meg. A bökkenő csak az, hogy számítógéppel megtalálni nem lehet ezt az alakzatot, hiszen olyan végtelenül pontosan kellene választanunk a kezdőpontot, hogy arra a legtkéletebb számítógép sem képes. Elméletileg tehát van kapcsolat a tranzien és permanens káosz között, gyakorlatilag azonban csak nagyon hosszú ideig „oda ragadó” mozgásokat mutathatunk ki számítógépes megoldásaink során.

## Láttak már ilyet?

Eddigiekben csillagászati problémáról volt szó. Felmerülhet a kérdés az Olvasóban, hol lehet megfigyelni ezt az égen? Sajnos a Sitnikov-probléma annyira speciális elrendezésű, hogy ehhez hasonló mozgás az általunk ismert csillagrendszerekben nem alakult ki. Gyakorlati jelentősége tehát itt véget is érhetne. Viszont egyszerűségének és a benne rejlő komplex dinamikai viselkedésnek köszönhetően számtalan káosszal foglalkozó könyv, dolgozat, közlemény tárgya volt már, amelyek során közelebb vitte mind a szerzőket, mind az olvasókat az egyszerű dinamikai rendszerekben megfigyelhető kaotikus viselkedés megértéséhez, továbbgondoláshoz. Jelen dolgozatnak is az a célja, hogy felkeltse az Olvasó érdeklődését a dinamikai rendszerekben megfigyelhető kaotikus viselkedés iránt.

## Irodalom

1. L. D. Landau, E. M. Lifszitz: *Elméleti fizika I, Mechanika*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1988.
2. W. D. MacMillan: An integrable case in the restricted problem of three bodies. *Astronomical Journal* 27(1911) 11–13.
3. Tél T., Gruiz M.: *Kaotikus dinamika*. Universitas – Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2002.
4. K. Sitnikov: The existence of oscillatory motions in the tree-body problem. *Dokl. Akad. Nauk.* 133 (1960) 647–650.
5. Kovács T.: *Kaotikus jelenségek égi mechanikai rendszerekben*. doktori értekezés, <http://www.mpiipks-dresden.mpg.de/~tkovacs/papers/thesis.pdf>
6. Érdi B.: *A Naprendszer dinamikája*. ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2001.
7. F. Diaconu, Ph. Holmes: *Égi találkozások. A káosz és a stabilitás eredete*. Akkord Kiadó, Budapest, 2003.
8. E. Ott: *Chaos in dynamical systems*. Cambridge University Press, Cambridge, first edition, 1993.
9. J. Gleick: *Káosz – Egy új tudomány születése*. Göncöl Kiadó, Budapest, 1999.
10. B. Mandelbrot: *The Fractal Geometry of Nature*. Freeman, San Francisco, 1982.

# HOGYAN IS MOZOG EGY TÖMEGES RUGÓ? – II.

Woynarovich Ferenc  
MTA SZFKI

## Emlékeztető

Egy egyik végén rögzített  $l$  hosszúságú,  $m$  tömegű  $D$  direkciós erejű rugóból és a másik végéhez rögzített  $M$  tömegű testből álló rendszer mozgását vizsgáljuk. Ennek során a rugót egy  $\rho = m/l$  sűrűségű, és  $\varepsilon = Dl$  Young-modulusú egy-dimenziós rugalmas közegnek tekintjük, amelynek egyes pontjait a rögzített végtől mért  $x$  nyugalmi távolsággal paraméterezzük. A rugó pontjainak  $s(x, t)$  longitudinális elmozdulását az

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 s(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 s(x, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (1)$$

hullámegyenletet írja le, amelyben a hangsebesség

$$c = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho}} = \sqrt{\frac{Dl^2}{m}}. \quad (2)$$

A feladatot az elrendezésből adódó peremfeltételek teszik egyértelművé: a rugó  $x = 0$  vége rögzített, tehát

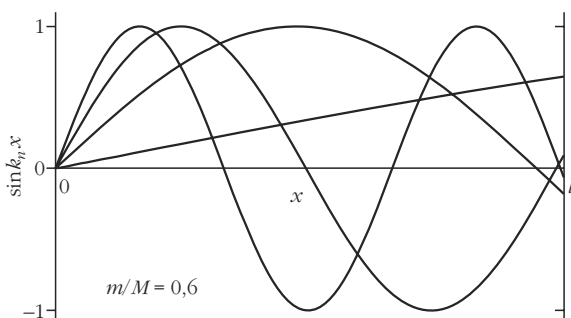
$$s(x=0, t) = 0, \quad (3)$$

a másik végén levő test mozgása pedig követi Newton II. törvényét, azaz

$$-\varepsilon \left. \frac{\partial s(x, t)}{\partial x} \right|_{x=l} = M \frac{\partial^2 s(l, t)}{\partial t^2}. \quad (4)$$

Munkánk első felében megkerestük a rendszer sajátrezgéseit – normál módusait (1. ábra), amelyek történetesen állóhullámok –, és a rendszer mozgását ezekből építettük fel (ezek szerint fejtettük ki). Ez az eljárás minden kezdeti feltétel esetén alkalmazható, de nem feltétlenül szemléletes, mivel a normál módusokra való összegzés – legalábbis analitikusan – nehézségekbe ütközhet. Tipikusan ez a helyzet az első részben tárgyalt példákban, azaz az  $M$  tömegnél fogva kihúzott, majd elengedett, illetve az  $M$ -en ke-

1. ábra. A rugó (longitudinális) deformációjának alakja az első néhány normál módusban  $m/M = 0,6$  esetén.



resztül meglökött rugó esetében. Pedig tanulságos lenne legalább az elején nyomon követni a rugó mozgásának részleteit. Az ugyanis biztosan nem teljesen sima: a kezdetben (nyújtva vagy nyújtatlanul, de) nyugvó rugó egyik végével  $t = 0$ -ban történik valami (elengedjük, illetve meglököjük), és ez a változás véges idő alatt terjed végig a rugón, és verődik vissza valahogy a végeken. Ennek nyomon követésére alkalmas az a (normál módusos leírással egyébként ekvivalens) megközelítés, amely a rendszer mozgását ide-oda haladó hullámfrontok segítségével adja meg.

## Mozgó hullámfrontok

Az eljárás alapja az, hogy az (1) hullámegyenlet általános megoldása jobbra és balra haladó tetszőleges alakú hullámokból áll:

$$s(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right). \quad (5)$$

(Az egyértelmű szóhasználat kedvéért úgy vesszük, hogy a rugó bal vége a rögzített, míg az  $M$  tömeg a jobb oldali végen van.)  $f(t)$  és  $g(t)$  alakját az köti össze, hogy teljesülniük kell a (3) és (4) peremfeltételeknek. Az első szerint

$$f(t) = -g(t), \quad (6)$$

míg a második szerint

$$g''\left(t + \frac{l}{c}\right) + \alpha g'\left(t + \frac{l}{c}\right) = \alpha f'\left(t - \frac{l}{c}\right) - f''\left(t - \frac{l}{c}\right). \quad (7)$$

Itt

$$\alpha = \frac{c\rho}{M}, \quad (8)$$

és a ' az argumentum szerinti deriválást jelenti.

(6) és (7) az egyes hullámoknak a megfelelő végekről való visszaverődését írják le. (6) szerint, ha a balra, illetve jobbra menő hullám egy adott  $t_0$  időben

$$g\left(t_0 + \frac{x}{c}\right) \text{ és } f\left(t_0 - \frac{x}{c}\right),$$

akkor egy későbbi  $t$  időben a jobbra menő hullám

$$f\left(t - \frac{x}{c}\right) = \begin{cases} f_g\left(t - \frac{x}{c}\right), & \text{ha } x < c(t - t_0) (< l) \\ f\left(t - \frac{x}{c}\right), & \text{ha } c(t - t_0) < x < l, \end{cases} \quad (9)$$

ahol

$$f_g\left(t - \frac{x}{c}\right) = -g\left(t - \frac{x}{c}\right). \quad (10)$$

Az  $M$  tömegen való visszaverődés ennél bonyolultabb, mert az  $M$  mozgása miatt a hullám alakja torzul. Az ezt leíró (7) egyenlet  $f(t)$  ismeretében  $g(t)$ -re (például konstans variálással) megoldható.<sup>1</sup> A megoldás

$$g_f\left(t + \frac{x}{c}\right) = \int_{t_0+l/c+0}^{t+x/c} e^{-\alpha z} \int_{t_0+l/c+0}^z e^{\alpha y} \left[ \alpha f'\left(y - \frac{2l}{c}\right) - f''\left(y - \frac{2l}{c}\right) \right] dy dz + \frac{\Delta v}{\alpha} \left\{ 1 - \exp\left[-\alpha \left[ t - t_0 + \frac{x-l}{c} \right] \right] \right\} + \Delta g. \quad (11)$$

Itt

$$t - t_0 > \frac{l-x}{c},$$

és az integrálok alsó határaként megadott  $t_0 + l/c + 0$  azt jelenti, hogy ez a határ felülről közelíti a  $t_0 + l/c$  értékhez. (Ennek jelentőségére később visszatérünk.) Ha tehát egy  $t_0$  időben az  $f(t_0 - x/c)$  és a  $g(t_0 + x/c)$  adott, akkor egy későbbi  $t$ -ben

$$g\left(t + \frac{x}{c}\right) = \begin{cases} g\left(t + \frac{x}{c}\right), & \text{ha } 0 < x < l - c(t - t_0) \\ g_f\left(t + \frac{x}{c}\right), & \text{ha } l - c(t - t_0) < x < l. \end{cases} \quad (12)$$

A  $g_f$ -ben szereplő két integrációs konstans,  $\Delta v$  és  $\Delta g$  a következő módon illesztendő:  $\Delta g$ -t az határozza meg, hogy a balra menő hullámnak folytonosnak kell lennie, hiszen a rugó nem szakad el. Ebből

$$g\left(t_0 + \frac{l}{c}\right) = g_f\left(t_0 + \frac{l}{c}\right), \text{ azaz } \Delta g = g\left(t_0 + \frac{l}{c}\right) \quad (13)$$

<sup>1</sup> A

$$g''(t) + \alpha g'(t) = \phi(t)$$

típusú egyenlet megoldásának lépései:

A homogén egyenlet általános megoldása  $g'$ -re

$$g'_{hom}(t) = C_0 e^{-\alpha t}.$$

Az inhomogén egyenlet egy speciális megoldását

$$g'(t) = C(t) e^{-\alpha t}$$

alakban keressük. Ezt behelyettesítve  $C(t)$ -re a

$$C'(t) = e^{\alpha t} \phi(t)$$

egyenletet kapjuk, amelynek megoldása:

$$C(t) = \int e^{\alpha y} \phi(y) dy + C_1.$$

Ezt felhasználva  $g(t)$  integrálással megkapható:

$$g(t) = \int C(z) e^{-\alpha z} dz + C_2.$$

adódik. A  $\Delta v$  meghatározásakor két esetet kell megkülönböztetni. Egyrészt *külső bebatás nélkül* az  $M$  sebessége folytonos, mert a rugó csak véges erővel tud a testre hatni, így a véges  $M$  tömeg *sebessége* nem ugorhat. Ebből következik, hogy

$$\lim_{t \rightarrow t_0+0} (f'(t-l/c) + g'_f(t+l/c)) = \lim_{t' \rightarrow t_0+0} (f'(t'-l/c) + g'(t'+l/c)). \quad (14)$$

Az itt szereplő limeszek kiszámolásánál azonban figyelembe kell venni, hogy a rugó mentén a sebesség, így egyes argumentumoknál az  $f'(t-l/c)$  ugorhat.<sup>2</sup> Ez végül is a

$$\Delta v = \lim_{t \rightarrow t_0+0} f'\left(t - \frac{l}{c}\right) - \lim_{t \rightarrow t_0+0} f'\left(t - \frac{l}{c}\right) + \lim_{t \rightarrow t_0+0} g'\left(t + \frac{l}{c}\right) \quad (15)$$

szabályt eredményezi. Ettől különböző eset, ha az adott  $t_0$  pillanatban az  $M$ -et meglökjük úgy, hogy a sebessége  $v_M$  legyen. Ekkor a szabály

$$\lim_{t \rightarrow t_0+0} f'\left(t - \frac{l}{c}\right) + g'_f\left(t + \frac{l}{c}\right) = f'\left(t_0 - \frac{l}{c}\right) + \Delta v = v_M. \quad (16)$$

(A későbbiekben egy olyan példát fogunk vizsgálni, amelyben mindkét lehetőségre figyelni kell.)

A kezdeti feltételek most azonosak azzal, hogy

$$f\left(-\frac{x}{c}\right) + g\left(\frac{x}{c}\right) = s_0(x), \quad (17)$$

$$f'\left(-\frac{x}{c}\right) + g'\left(\frac{x}{c}\right) = v_0(x).$$

Ebből  $f'$  és  $g'$  kifejezhető, tehát  $f$  és  $g$  megadható:

$$g_0\left(\frac{x}{c}\right) = \frac{1}{2} s_0(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x v_0(y) dy (+C), \quad (18)$$

$$f_0\left(-\frac{x}{c}\right) = \frac{1}{2} s_0(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x v_0(y) dy (-C).$$

Itt két dolgot kell megjegyeznünk. Egyrészt a  $\pm C$  integrációs konstansok időfüggő tagot nem generálnak és az

<sup>2</sup> Ha a jobbra menő hullámban a sebesség valahol, azaz  $f'(t-x/c)$  valamilyen argumentumnál ugrik, akkor ott  $f''(t-x/c)$  végtelen, ami megjelenik a (11)-ben szereplő integrál alatt. Ez a szingularitás integrálható, és finomabb matematikai eszközökkel jól kezelhető, itt azonban más eljárást javasolunk: az általánosság csorbítása nélkül választhatjuk  $t_0$ -nak azt az időpontot, ahol az  $f'(t-l/c)$  ugrása van. Ekkor az integrál alsó határát  $t_0 + l/c + 0$ -nak választva biztosítjuk, hogy az integrál szinguláris tagot ne tartalmazzon (az integrálokat az  $f''$  szingularitása fölött kezdjük), így

$$\lim_{t \rightarrow t_0+0} g'_f(t+l/c) = \Delta v,$$

a  $\Delta v$ -t pedig úgy illesztjük, hogy az  $M$  sebessége folytonos legyen.

$s(x, t)$ -ből kiesnek, tehát ignorálhatók. Másrészt a (18) által meghatározott kezdeti  $f$  és  $g$  mindig egy olyan helyzetet ír le, amelyben az  $M$  tömeg kezdősebessége

$$v = \lim_{x \rightarrow l} v_0(x).$$

Ha az ettől különbözik, mert például az indításkor meglökjük, akkor azt a fentiek szerint a  $\Delta v$  megfelelő megválasztásával vehetjük figyelembe.

Mindent egybevetve a mozgás a következő módon írható le. A  $g_0$ -val megadott elmozdulástér a rögzített vég felé tolódik, és onnan ellentétes fázisban visszaverődik. Eközben az  $f_0$ -val megadott elmozdulástér az  $M$  felé tolódik, és az  $M$  tömegről verődik vissza. Ennek megfelelően egy  $t < l/c$  időpontban

$$f\left(t - \frac{x}{c}\right) = \begin{cases} f_{g_0}\left(t - \frac{x}{c}\right), & \text{ha } x < ct (< l) \\ f_0\left(t - \frac{x}{c}\right), & \text{ha } ct < x < l \end{cases} \quad (19)$$

és

$$g\left(t + \frac{x}{c}\right) = \begin{cases} g_0\left(t + \frac{x}{c}\right), & \text{ha } 0 < x < l - ct \\ g_{f_0}\left(t + \frac{x}{c}\right), & \text{ha } l - ct < x < l, \end{cases} \quad (20)$$

ahol  $f_{g_0}$ -t és  $g_{f_0}$ -t értelemszerűen (10) és (11) adja meg. Így  $f$  és  $g$  a kezdeti feltételek segítségével megkapható a  $t < l/c$  időre. A fenti eljárásból azonban világos, hogy bármely időpillanattól kiindulva a mozgás jellemzői újabb  $l/c$  időintervallumra megadhatók, tehát az eljárás ismétlésével tetszőleges ideig követhetők.

Ebben a leírásban a technikából adódóan van egy  $l/c$  idejű szakaszosság. Ennek nem feltétlenül kell a megoldásban is megjelennie, de bizonyos esetekben (mint például a bemutatandó példában) ez kifejezetten jellemző magára a mozgásra. Nevezetesen, ha a rugó mentén a sebesség ugrik, akkor az a sebességugrás a (10)-nek és (14)-nek megfelelően a két vég között a haladási irány szerint váltakozó előjellel oda-vissza verődik. A sebességugrás két oldalán a  $\partial s(x, t)/\partial x$  relatív megnyúlás nem azonos, ezért valahányszor az ugrás az  $M$ -hez ér, hirtelen megváltozik az arra ható erő. Az  $M$  tömeg

$$a_M = \frac{\varepsilon}{cM} \left[ f'\left(t - \frac{l}{c}\right) - g'\left(t + \frac{l}{c}\right) \right] \quad (21)$$

gyorsulása emiatt minden alkalommal (14)-nek megfelelően

$$\Delta a_M = \frac{2\varepsilon}{cM} \left[ \lim_{t \rightarrow t_0+0} f''\left(t - \frac{l}{c}\right) - \lim_{t \rightarrow t_0-0} f''\left(t - \frac{l}{c}\right) \right] \quad (22)$$

értékkel megváltozik.

Fontos megjegyezni, hogy a rendszerben két karakterisztikus idő van: a

$$\tau_1 = \frac{l}{c} \text{ mellett a } \tau_2 = \frac{1}{\alpha} = \frac{M}{\rho c} \quad (23)$$

is fontos paraméter. Az első az az idő, amíg egy jel a rugón végigfut, a második egyfajta relaxációs időnek látszik. Az ezekhez tartozó hosszúságskálák a rugó hossza, illetve  $l_M = M/\rho$ , ami a rugó olyan hosszú darabjának felel meg, aminek a tömege éppen  $M$ . Ezek jelentőségére az alábbi példa kapcsán visszatérek.

## Az $M$ -en keresztül meglökött rugó mozgása

(II. megoldás az első részben b)-vel jelzett kezdeti feltétel mellett.) A hirtelen meglökött (vagy  $v$  sebességgel a rugónak ütköző)  $M$  tömegű test egy hullámfrontot indít el, amely a rugón ide-oda haladva hol a rögzített végről, hol az  $M$  tömegről újra és újra visszaverődik. A primer hullámfront alakját az határozza meg, hogy kezdetben mind  $f$ , mind  $g$  nulla, így  $\Delta g$  is az, és az egyedüli nem nulla tagban (16) szerint  $\Delta v = -v$ :

$$s(x, t) = s_1(x, t), \text{ amíg } 0 < t < l/c, \quad (24)$$

ahol

$$s_1(x, t) = \begin{cases} -s_0 \left[ 1 - e^{-\alpha \left( t - \frac{x-t}{c} \right)} \right], & \text{ha } l - ct \leq x \leq l, \\ 0 & \text{különben,} \end{cases} \quad (25)$$

és

$$s_0 = \frac{v}{\alpha}. \quad (26)$$

(Ezzel összefüggésben a  $\tau_2$  időállandó szemléletesen értelmezhető: egy egyik irányban végtelen hosszú rugónak ütközve az  $M$  tömegű test exponenciális függvény szerint fékeződik le, ennek az időállandója az adott  $\rho$  és  $c$  mellett  $\tau_2$ .)

Amikor az (egyébként  $g(t+x/c)$ -nek megfelelő)  $s_1(x, t)$  hullámfront eléri a rögzített véget ( $t = l/c$ ), akkor ellentétes előjellel visszaverődik, azaz az (innen) kezdve már sehol nem 0)  $s_1(x, t)$  mellett megjelenik az  $f_s(t-x/c)$ -nek megfelelő

$$s_2(x, t) = \begin{cases} s_0 \left[ 1 - e^{-\alpha \left( t - \frac{x-t}{c} \right)} \right], & \text{ha } 0 \leq x \leq ct - l, \\ 0 & \text{különben} \end{cases} \quad (27)$$

hullámfront, amely a rögzített vég felől az  $M$  tömeg felé halad. Tehát az  $l/c < t < 2l/c$  időintervallumban a rendszer mozgását az

$$s(x, t) = s_1(x, t) + s_2(x, t) \quad (28)$$

adja meg, amelyben az előzőek szerint



$$\begin{aligned} f\left(t - \frac{x}{c}\right) &= s_2(x, t), \\ g\left(t + \frac{x}{c}\right) &= s_1(x, t). \end{aligned} \quad (29)$$

Miután az  $s_2(x, t)$  frontja eléri az  $l$  véget, azaz ha  $t \geq 2l/c$ , akkor az elmozdulástér

$$s(x, t) = s_1(x, t) + s_2(x, t) + s_3(x, t) \quad (30)$$

amíg  $t < 3l/c$ . Ebben már mind  $s_1(x, t)$ , mind  $s_2(x, t)$  sima függvények, és az  $M$  tömegről visszavert front mozgását az

$$s_3(x, t) = \begin{cases} \left\{ s_0 \left[ 1 - \left[ 1 + 2\alpha \left( t + \frac{x-3l}{c} \right) \right] e^{-\alpha \left( t - \frac{x-3l}{c} \right)} \right\}, & \text{ha } 3l - ct \leq x \leq l, \\ 0 & \text{különben} \end{cases} \quad (31)$$

függvény adja meg. (A fent ismertetett eljárásban  $t_0 = 2l/c$ -t választva  $\Delta g$ -t és  $\Delta v$ -t (13), illetve (15)-nek megfelelően meghatározva  $g_{s_2}(t + x/c)$ -re  $s_1(x, t) + s_3(x, t)$  adódik, tehát az  $s_1(x, t)$  „folytatódik”, és megjelenik mellette  $s_3(x, t)$ .) Nem követem tovább, de az eljárás tetszőlegesen ideig folytatható.

Figyelemre méltó, hogy az  $M$  tömegen való visszaverődéskor mindig megváltozik a front alakja: először az egyszerű exponenciális függvény egy polinommal szorozódik, minden további alkalommal pedig a polinom fokszáma nő.

Eredményünk különösen érdekes, ha a  $\tau_2$  relaxációs idő lényegesen hosszabb mint  $\tau_1$ , azaz ami alatt a jel a rugón végigfut (ez az  $M \gg m$  eset). Ekkor egészen addig, amíg  $t \ll \tau_2$  (ebbe a hullámfrent számos oda-vissza mozgása befér),  $\alpha$  szerint sorba fejthetünk, és megelégedhetünk a vezető járulékkal. Ebben a közelítésben

$$s(x, t) \approx \begin{cases} \left\{ \begin{array}{l} 0, \text{ ha} \\ 0 < x < l - ct, \\ -v \left( t + \frac{x-l}{c} \right), \text{ ha} \\ l - ct < x < l, \end{array} \right\} & \text{amíg } 0 < t < \frac{l}{c}, \\ \left\{ \begin{array}{l} -2v \frac{x}{c}, \text{ ha} \\ 0 < x < ct - l, \\ -v \left( t + \frac{x-l}{c} \right), \text{ ha} \\ ct - l < x < l, \end{array} \right\} & \text{amíg } \frac{l}{c} < t < \frac{2l}{c}, \end{cases} \quad (32a)$$

$$s(x, t) \approx \begin{cases} \left\{ \begin{array}{l} -2v \frac{x}{c}, \text{ ha} \\ 0 < x < 3l - ct, \\ -v \left( t + 3 \frac{x-l}{c} \right), \text{ ha} \\ 3l - ct < x < l, \end{array} \right\} & \text{amíg } \frac{2l}{c} < t < \frac{3l}{c}, \\ \vdots & \end{cases} \quad (32b)$$

Arról van tehát szó, hogy az ide-oda mozgó front bal oldalán a rugó (kezdetben teljesen, később közelítőleg) áll, míg a másikon a sebessége közelítőleg  $-v$ . A relatív összenyomódottság ( $-\partial s/\partial x$ ) a bal oldali 0 és a jobb oldali nagyjából  $v/c$  értékről indulva a front két oldalán felváltva  $\sim 2v/c$  lépésekben növekszik. (Ebben a közelítésben nem látszik, de ezalatt az  $M$  sebessége lassan csökken.) Figyelemre méltó tehát, hogy a rugó összenyomása sem időben, sem térben nem egyenletesen történik, és az  $M$  gyorsulása sem sima, hanem

$$\Delta a_M \sim \frac{2v}{c} \frac{\varepsilon}{M} = \frac{2vc}{l} \frac{m}{M}$$

lépésekben változik (ahogy azt (22) alapján elvárjuk).

Hasonló módon érdekes és szépen leírható az eredmény, ha a relaxáció sokkal gyorsabb mint a jelterjedés, azaz  $\tau_1 \gg \tau_2$  ( $m \gg M$ ). Ilyenkor az ide-oda verődő „hullámvonulat” szélessége  $\sim l_M \ll l$ . A rugónak csak az ebbe eső darabja van összenyomva vagy megnyújtva, és csak ez a darabja mozog, a többi lényegében áll. Ennek megfelelően az  $M$  tömeg is lényegében csak akkor mozog, amikor a hullám éppen visszaverődik róla. A hullámvonulatot úgy kell elképzelni, hogy a hullámfrentnek a haladás irányába eső széle éles, a szélessége az  $l_M$  nagyságrendjébe esik (ezt jelölöm  $\tilde{l}_M$ -mel), de a hátsó széle elmosódott.

$$s(x, t) \approx \begin{cases} \left\{ \begin{array}{l} 0, \text{ amikor} \\ 0 < x < l - ct, \\ -s_0, \text{ amikor} \\ l - ct + \tilde{l}_M < x < l, \end{array} \right\} & \text{ha } 0 < t < \frac{l}{c}, \\ \left\{ \begin{array}{l} 0, \text{ amikor} \\ 0 < x < ct - l - \tilde{l}_M, \\ -s_0, \text{ amikor} \\ ct - l < x < l, \end{array} \right\} & \text{ha } \frac{l}{c} < t < \frac{2l}{c}, \end{cases} \quad (33a)$$

$$s(x, t) \approx \left\{ \begin{array}{l} 0, \text{ amikor} \\ 0 < x < 3l - ct, \\ +s_0, \text{ amikor} \\ 3l - ct + \tilde{l}_M < x < l, \\ \vdots \end{array} \right\} \text{ ha } \frac{2l}{c} < t < \frac{3l}{c}, \quad (33b)$$

Általánosságban elmondhatjuk, hogy a rugó mozgását egy szakaszosság jellemzi, a szakaszok hossza pedig az a  $\tau_1$  idő, amíg egy jel végigfut a rugón. A két véglet között az alapvető különbség abban van, hogy hogyan viszonyul ehhez a  $\tau_2$  relaxációs idő. Ha  $\tau_2 \gg \tau_1$ , a relaxációs idő alatt, tehát ami alatt számottevően megváltozik például az  $M$  sebessége, a hullámfront éle sokszor oda-vissza fut a rugón, az exponenciálissal leírható elmozdulástér (a torzulás mellett) sokszorosan önmagára „hajtogatódik”. A fordított,  $\tau_1 \gg \tau_2$  esetben a jel teljes hossza ( $\tilde{l}_M$ ) sokkal rövidebb mint a rugó, és bár a hullám egyre inkább „fodrozódik” (ahogy az  $M$ -ről visszaverődik), hosszúsága (az exponenciális lecsengés mértéke) a mozgás során változatlan marad.

## Egy ráadásfeladat

Mind az állóhullámokkal, mind a mozgó hullámfrontok leírásával kapcsolatban igen tanulságos az alábbi feladat: mikor, és mekkora sebességgel pattan vissza a kezdetben álló rugónak  $v$  sebességgel nekiütköző  $M$  tömeg? A megoldáshoz az  $M$ -re ható erőt (vagy az  $M$  gyorsulását) kell vizsgálni. Amíg  $M$  a rugót nyomja, a mozgás a fellejebb tárgyalt b) kezdeti feltételnek felel meg, de amikor a rugó vége erő-, azaz megnyúlásmentessé válik, az  $M$  elrepül. A feladatot ugyan nem tudjuk általánosságban analitikusan megoldani, de a két ( $M \gg m$ , illetve  $M \ll m$ ) végletben a probléma jól kezelhető. A fentiek alapján az is nyilvánvaló, hogy a két határesetben egészen másként kell eljárunk, és mást is kell várnunk.

Az  $M \gg m$  eset. A rendszer mozgását a normál módusok segítségével adjuk meg. Az első részben tárgyaltak szerint az  $M$  gyorsulását

$$\ddot{s}(l, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n \frac{2M \sin^2 \kappa_n}{m + M \sin^2 \kappa_n} v \sin \omega_n t \quad (34)$$

adja meg. Ez várhatóan  $\sim T_0/2$  körül lesz nulla. A felharmonikusok

$$\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \frac{2M \sin^2 \kappa_n}{m + M \sin^2 \kappa_n} v \sin \left[ \left( n\pi + \frac{1}{n\pi} \frac{m}{M} + \dots \right) \frac{c}{l} t \right] \quad (35)$$

járuléka lényegesen leegyszerűsödik, ha

$$\frac{1}{\pi} \frac{m}{M} \frac{c}{l} \frac{T_0}{2} \approx \sqrt{\frac{m}{M}} \ll 1. \quad (36)$$

Ez egy kicsit szigorúbb feltétel mint az  $m/M \ll 1$ , de ha ez is teljesül, a  $\kappa_n$ -ekre, valamint az  $\omega_n$ -ekre vonatkozó közelítésekben és  $t \lesssim T_0/2$  esetén a *szinusz argumentumában* is a vezető tag vehető. Ekkor  $M$  gyorsulása jó közelítéssel

$$\ddot{s}(l, t) \approx v \frac{D}{m} \frac{m}{M} \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0} + v \sqrt{\frac{D}{m}} \frac{m}{M} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{\sin \left( n \frac{\pi c}{l} t \right)}{n}. \quad (37)$$

A második tagban az összegzés elvégezhető, és arra vezet, hogy

$$\ddot{s}(l, t) \approx v \frac{D}{m} \frac{m}{M} \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0} + v \sqrt{\frac{D}{m}} \frac{m}{M} \left( 1 - \frac{\{t\}}{\tau_1} \right). \quad (38)$$

Itt  $\{t\}$  definíciója:

$$\{t\} = t - 2\mu \tau_1, \quad (39)$$

ahol a  $\mu$  egész, és

$$2\mu \tau_1 < t < (2\mu + 2) \tau_1. \quad (40)$$

Ennek megfelelően (38) második tagja egy fűrészfog-függvény (v.ö. (22)!) (Figyelemre méltó, hogy  $t \ll T_0$ -ra (38) a  $\mu$ -vel lépcsőzetesen növekszik:

$$\ddot{s}(l, t) \approx v \sqrt{\frac{D}{m}} \frac{m}{M} \left( 1 + \frac{t}{\tau_1} - \frac{\{t\}}{\tau_1} \right) \approx v \frac{c}{l} \frac{m}{M} (2\mu + 1), \quad (41)$$

ahogy azt (32) alapján várjuk.)  $T_0/2$  közelében (38)

$$\ddot{s}(l, t) \approx v \sqrt{\frac{D}{m}} \frac{m}{M} \left( \frac{T_0}{2\tau_1} - \frac{t}{\tau_1} + 1 - \frac{\{t\}}{\tau_1} \right), \quad (42)$$

tehát az ellökődés  $t$  idejét végül is a

$$\left( \frac{T_0}{2} - t \right) + (\tau_1 - \{t\}) = 0 \quad (43)$$

egyenlet adja meg. A megoldás

$$t = \frac{\frac{T_0}{2} + (2v - 1) \tau_1}{2}, \quad (44)$$

ahol a  $v$  egész, és

$$(2v - 1) \tau_1 < \frac{T_0}{2} < (2v + 1) \tau_1. \quad (45)$$

Az adott  $(m/M)^{1/2} \ll 1$  esetben a gyorsuláshoz hasonlóan az  $M$

$$\dot{s}(l, t) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 M \sin^2 \kappa_n}{m + M \sin^2 \kappa_n} v \cos \omega_n t \quad (46)$$

sebessége is kiértékelhető. Az  $\dot{s}(l, t)$  kiszámításánál alkalmazott közelítésekkel, és (43) felhasználásával az

$$\dot{s}(l, t) \approx v \left\{ 1 - \left[ \frac{1}{6} + \left( 1 - \frac{\{t\}}{\tau_1} \right)^2 \right] \frac{m}{M} \right\} \quad (47)$$

értéket kapjuk. Ennek megfelelően az elrepülő test kinetikus energiája

$$\frac{1}{2} M (\dot{s})^2 \approx \frac{1}{2} M v^2 \left\{ 1 - 2 \left[ \frac{1}{6} + \left( 1 - \frac{\{t\}}{\tau_1} \right)^2 \right] \frac{m}{M} \right\}. \quad (48)$$

Eredményünk szerint tehát az  $M$  tömegű test általában hamarabb (határesetben pont akkor) repül el, mintha csak a nulladik módus lenne gerjesztve, a sebessége mindig kisebb, mint  $v$ , de lehet nagyobb, mint a nulladik módus sebességamplitúdója, viszont az az energia, amit magával visz, kevesebb, mint a nulladik módusé. (Annak a kérdésnek, hogy ezt a módusokból milyen arányban viszi el, nincs értelme, hisz az elrepülés után megváltoznak a rendszer normál rezgései.) Mindezt a  $(m/M)^{1/2} \ll 1$  közelítésben kaptuk.

Ha  $m/M$  nagyobb, a megoldásban szerepet játszó fűrészfog-függvény torzul, az elrepülés ideje és sebessége eltolódhat, de a kapott megoldás jellege (tehát hogy  $t < T_0/2$ , és hogy sok energia marad a rugóban) megmarad.

Az  $M \ll m$  eset. Ilyenkor a rugó mozgását a hullámfrontokkal célszerű megadni. Eszerint leghamarabb akkor tud az  $M$  elrepülni, amikor az általa elindított hullámfront a rögzített végről visszafordulva éppen róla verődik vissza. Feltételezzük, hogy a tömegviszonyok olyanok, hogy valóban ez történik, azaz a test még azelőtt elrepül, hogy az  $s_3(x, t)$  frontja a rögzített végről visszaverődve újra elérné az  $M$  tömeget (tehát valamikor  $2\tau_1$  és  $4\tau_1$  között). Az erőmentesség feltétele

$$\left. \frac{\partial s(x, t)}{\partial x} \right|_{x=l} = \sum_{i=1}^3 \left. \frac{\partial s_i(x, t)}{\partial x} \right|_{x=l} = 0. \quad (49)$$

Ebből

$$t = 2\tau_1 + \xi \tau_2 \quad (50)$$

adódik, ahol

$$\xi = 1 + \frac{e^{-2\frac{m}{M}}}{2}. \quad (51)$$

$t$  akkor értelmezhető, ha  $t < 4\tau_1$ , azaz  $\xi \tau_2 < 2\tau_1$ . Ez a feltétel azonos a

1. táblázat			
A visszalökődés időpontja és sebessége néhány tömegaránynál			
$m/M$	$t/2\tau_1$	$T_0/4\tau_1$	$u/v$
0,6	1,9558	2,2278	0,6329
1,0	1,5338	1,8259	0,6876
$\infty$	1	1	0,7358

$$2 \frac{m}{M} > 1 + \frac{e^{-2\frac{m}{M}}}{2}, \text{ azaz } \frac{m}{M} > 0,578592\dots \quad (52)$$

feltétellel. Ha ez nem teljesül, akkor az  $s_3(x, t)$  frontja a rögzített végről visszaverődve még (50) előtt eléri az  $M$ -et, ezért más  $s(x, t)$ -vel kell számolni. Ha tehát  $M$  elég kicsi, (50) használható, és az ellökődés sebességére

$$u = \sum_{i=1}^3 \left. \frac{\partial s_i(l, t)}{\partial t} \right|_{t=2\tau_1+\xi\tau_2} = 2v e^{-\xi} \quad (53)$$

adódik. Ez akkor a legnagyobb, ha  $M \rightarrow 0$ , ilyenkor  $\xi \rightarrow 1$ , és

$$\lim_{M \rightarrow 0} \frac{u}{v} = \frac{2}{e} = 0,735758\dots \quad (54)$$

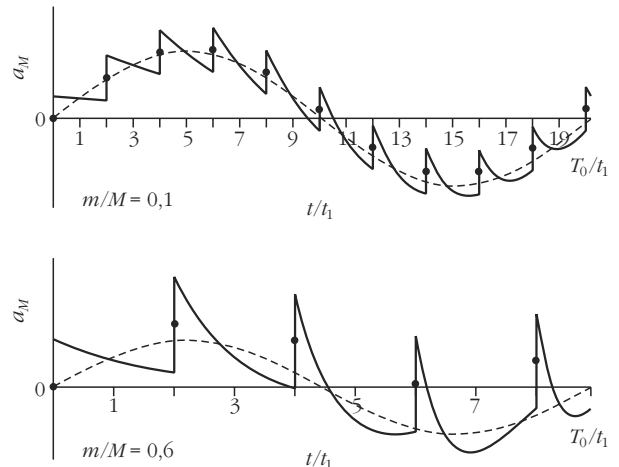
A minimális érték akkor van, ha (52) éppen teljesül, ekkor  $\xi = 2m/M = 1,15718\dots$ , és

$$\frac{u}{v} = 0,628739\dots \quad (55)$$

(Itt meg kell jegyezni, hogy ezekből a számításokból nem derül ki, hogy ez abszolút minimum-e, vagy kisebb tömegaránynál, tehát ha a hullámfront egynél többször verődik vissza az  $M$ -ről, adódhat-e ennél kisebb  $u/v$ . Egy biztos, valahol minimumának kell lennie, hiszen  $m/M \rightarrow 0$  esetén egyhez tart.)

Néhány eset adatait az 1. táblázatba foglaltuk. A második oszlop az ellökődés idejét adja egy jel oda-

2. ábra. A meglökött  $M$  tömeg gyorsulása.



vissza futásának idejéhez viszonyítva, a harmadik oszlop összehasonlítás céljából az alaplómódus rezgésidőjének felét adja meg ugyanezen a skálán, míg a negyedik a kimenő és bejövő sebességek hányadosa. A  $\infty$ -hez tartozó adatok határértékként értendők.

Feladatunk érdekessége az, hogy nem az  $M$  tehetlensége miatt mindenképpen sima  $s_M = s(l, t)$  elmozdulást, hanem az  $a_M$  gyorsulást kellett vizsgálni. Láthattuk, hogy elég kis  $m/M$  tömegarány mellett még közelítőleg kirajzolódik a harmonikus rezgésre jellemző szinuszhullám, de ennek nagyobb tömegarányok mellett már alig van nyoma. Ezt hivatott illusztrálni az 2. ábra, amely az  $a_M$  gyorsulást mutatja önkényes egységekben a nulladik módus első periódusa alatt egy kisebb és egy nagyobb tömegarány mellett  $t/\tau_1$  függvényében. Az összehasonlítás végett szaggatott vonallal bejelöltük a nulladik módushoz tartozó gyorsulást is. (Annak kiderítését, hogyan néz ki mindez a sokkal szebben viselkedő a) kezdeti feltétel mellett, az olvasóra bízunk.)

## Befejezés gyanánt

Munkánk alapkérdése az volt, hogy mennyire jól írja le egy tömeges rugón lévő test mozgását a szokásos (ideális rugó által mozgatott effektív tömeg) közelítés.

Vizsgálódásunkban abból indultunk ki, hogy a rugó maga egy egydimenziós rugalmas közeggel modellezhető. E közeg mozgását egy egyszerű hullámegyenlet írja le, amelyben a rugóhoz csatlakozó tömeg egy speciális (az adott tömegre vonatkozó Newton-egyenletről megkapható) peremfeltétellel veendő figyelembe.

Megkonstruáltuk a rendszer normál módusait. Ezek állóhullámok, amelyek közül a leghosszabb hullámhossznak megfelelő alapharmonikus elég nagy (akár  $m/M \sim 1$ ) tömegarány mellett is jó közelítéssel úgy viselkedik, mintha egy ideális rugó a szokásos effektív tömeget mozgatná. A rövidebb hullámhosszú módu-

sok rezgési frekvenciája nem egész számú többszöröse egyik hosszabb hullámhosszúnak sem, ezért a rugó mozgása általában nem periodikus (kivéve, ha csak egy módus van gerjesztve).

A fentiek alapján az, hogy a mozgás mennyire jól közelíthető az ideális rugó mozgásával, a kezdeti feltételektől függ, mert ezek határozzák meg, milyen súllyal jelennek meg a magasabb frekvenciájú módusok. Ezt két példán szemléltettük: a) az  $M$  tömegnél fogva kihúzott majd magára hagyott rugó mozgását, illetve b) az eredetileg nyújtatlan és nyugvó rendszerben az  $M$  meglökésével indított mozgást elemeztük. Konklúzióink szerint az a) esetben egész nagy tömegarányig az alaplómódus a meghatározó, a b) esetben viszont már kisebb tömegarányok mellett sem elhanyagolhatók a felharmonikusok.

Bár a normál módusokkal elvben minden lehetséges helyzet leírható, a gyakorlatban problémát jelenthet ezek felösszegzése, azaz a mozgás követése. Ez nem merül fel a hullámegyenlet egy másfajta megoldása esetén, amelynek lényege, hogy a rugót modellező rugalmas közegen jobbra és balra haladó hullámokat a rugó két végét leíró peremfeltételeknek megfelelően összeillesztjük. Igaz, hogy itt többet kell számolni, de a mozgás lényegében tetszőleges ideig nyomon követhető. A b) esetet ezzel a módszerrel is megvizsgálva bemutattuk, hogy a rugó tényleges mozgását az alakítja ki, hogy a két vége között egy hullámfront ide-oda verődik.

Vizsgálódásunkat egy, a b) helyzethez illeszthető feladat megoldásával zártuk: megnéztük, hogy mikor és mekkora sebességgel löki el a rugó a végén lévő testet, ha az nincs rögzítve hozzá. Nem igazán meglepő eredményünk szerint a test a kezdősebességénél mindig kisebb sebességgel repül el, ezért valamennyi energia mindig ottmarad a rugóban. A konkrét eredmény mellett ez a feladat jól illusztrálja, hogy mennyiben hasonlít az  $M$  mozgása a harmonikusra, ha  $m/M$  elég kicsi, és hogy mennyire nem hasonlít arra, ha a tömegarány nagyobb.

## A FIZIKA TANÍTÁSA

# ALADDINA CSODALÁMPÁJA

A 19. Ifjúsági Tudományos és Innovációs Tehetségkutató Versenyen egy elektrokémiai témájú munkával indultam; mentorom ösztönzésére esett erre a választásom. Olyan pályamunkát szerettem volna készíteni, amelynek gyakorlati felhasználása is lehet és egyszerű körülmények között is elkészíthető. Úgy gondoltam, bőrünk savasságát hasznosítani lehetne, azaz galván-

Schronk Edina  
Bolyai János Gimnázium  
és Kereskedelmi Szakközépiskola, Ócsa

elektromos úton elektromos feszültség és áram termelhető; mégpedig úgy, hogy fogyasztóként egy lámpát (LED-et) is világításra tudjunk bírni. Elképzelésem szerint a lámpa nem csupán fényforrásként lenne használható, hanem „játékos” diagnosztikai eszközként is, hiszen bőrünk pillanatnyi elektrokémiai állapota szerint működik.



1. ábra. A hat darab elkülönülő, sorba kötött cella.

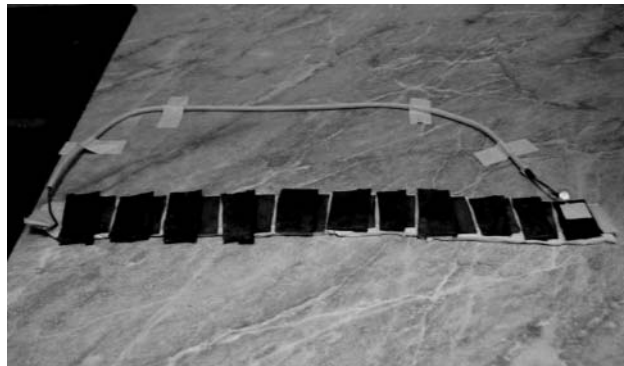
A lámpához szükségem volt egy minél nagyobb feszültséget és áramerősséget adó elektródapárra, amely nem mérgező, és lehetőleg könnyen hozzáférhető (sőt, akár újrahasznosítható vagy már újrahasznosított) anyagokból van. A működéshez tenyerünkkel egyszerre meg kell fognunk (vagy más csupasz testrészünkkel érintkeztetni kell) az elektródákat. Így elektrolitként az emberi bőrt használtam. A legjobbnak tűnő közönséges fémeket mérések útján választottam ki. Környezetünkben előforduló és viszonylag olcsó anyagok közül elsőként a réz-vas pár bizonyult a legjobbnak.

Ráadásul ezzel az új módszerrel bővül a napjainkban egyre népszerűbb „energia guberálás” [1] köre is, hiszen a jelenlegi népszerű kategóriákba (mint például a termoenergia, vagy elektrosztatikus energia stb.) nem illik bele, viszont néhány mikrowatt bejövő elektromos teljesítmény hatására is működik, így egy igazi „energy harvester”.

## Működési elv, a megvalósíthatóság bemutatására irányuló előkísérletek

Első lépésként hat darab cella felhasználásával stabilan elértem az ibolya színű LED 3 V feletti működési feszültségét (1. ábra). Az előkísérletek során nemcsak az elektródákat, hanem az elektrolitokat is variáltam – elektrolitként az ecetsavas oldat mindig nagyon jónak bizonyult, és valamennyire hasonlít is az emberi bőrre.

Majd a 2. ábrán látható módon egy háromrétegű vászondarabot itattam át ecetes oldattal. Itt az egyes cellák már nem különülnek el teljesen (mint a poharas kísérletnél), hiszen az elektrolit részben közös, így mindig fellép valamennyi veszteségi áram is. (Amikor majd ember fogja meg az elektródákat, ott is kell erre számítani.) A veszteségek miatt arra lehet számítani, hogy több darab sorba kötött cellára lesz szükség. A réz- és vaslapok szomszédos páronkénti mechanikus egymáshoz rögzítésével kötöttem sorba a cellákat, természetesen figyelve a közöttük lévő maximum 3 mm-es távolság betartására, és a szélek lelógására a rövidzárlati áram mérséklése végett. A vászondarab-



2. ábra. Fémlapokkal történő kialakítás.

bal való érintkezés tökéletesítésére pedig könnyen formázható gyurmaalappal láttam el a szerkezetet. Méréseim szerint elég sok (legalább 10) cellával és ecetes oldattal a veszteségek ellenére is sikerül elérni a LED világítását.

Mivel ez a fajta előkísérlet sikeresnek bizonyult, a következőkben már nagyobb számú, ám kisebb felületű cellák kialakításával próbálkoztam. Először egy henger alakú lámpatest kialakítására törekedtem, amelynek oldalán palástként helyezkednek el az elektródák. Tenyerünkkel ezt megfogva bírhatnánk világításra a LED-et. Ehhez elsőként minél nagyobb számú, ám annál kisebb cella kialakítása volt a célom, amit vas- és rézhuzalok feltekerésével oldottam meg. Egy 5 cm átmérőjű PVC-csőre tekerceseltem fel egymás mellé a huzalokat olyan módon, hogy a galvanizálás helyén damillal választottam el a két fémdrótot egymástól. Ezek a következő sorban természetesen egymás mellé kerültek, így kapcsoltam sorba az egyes cellákat. Azonos vastagságú (0,5 mm), könnyen tekerceselhető huzalokat választottam és ezekkel megegyező átmérőjű damilt. Az elérhető legnagyobb precizitás érdekében mindenek előtt egy saját tervezésű tekerceselő „gépet” készítettem, majd ennek segítségével a szálakat pontosan egymás mellé csévélttem fel. Az egymáson való átfordulási pontokat egy vonalba igazítottam, majd kémiaiag semleges epoxi típusú, kétkomponensű ragasztóval a csőre rögzítettem őket. Végül – ügyelve a szálak épségére – kettőfűrészeltem a tekerceset, és a számomra felhasználható részen (ahol a szálak párhuzamosan futottak) méréseket végeztem. Ekkor már az emberi bőrt használtam elektrolitként és 15 darab cella segítségével külön méréseket végeztem száraz, nedves, illetve ecetsavas kézen (3. ábra). A mérési eredmények az 1. táblázatban találhatók.

1. táblázat		
Tekercses jellegű kialakítás mért értékei		
a bőr állapota	feszültség	áramerősség
száraz	34 mV	0,1 $\mu$ A
nedves	130 mV	0,3 $\mu$ A
ecetes oldatba mártott	300 mV*	3,0 $\mu$ A

\* erősen ingadozó érték



3. ábra. Párhuzamosan futó, vékony szálakkal történő kialakítás.

Mindeközben nem adtam fel egy jobb elektródapár iránti kutatást, még több anyagot szereztem, illetve állítottam párba. A méréseket, ahogy az előzőekben, most is száraz, nedves, illetve ecetsavas kézzel végeztem el (2. táblázat). A vas-réz elektródánál magasabb feszültséget és áramerősséget előállító cink-réz párosra bukkantam, ezért a továbbiakban ezzel dolgoztam.

A háromszalú, azaz trifilláris tekercsek elkészítésével párhuzamosan, jellegét tekintve azonos, ám kivitelezésben eltérő módszerrel is próbálkoztam. Kör alakú (3 és 5 cm átmérőjű és körülbelül 0,5 mm vastag) cink- és rézlapokat, valamint ehhez illő szigetelőanyagot vágtam ki, ezek közepét átfúrtam, majd egy csavar és néhány eltérő átmérőjű alátét felhasználásával (természetesen ezeket elszigeteltem a celláktól) rögzítettem őket, meglehetősen szorosan (4. ábra, 3. táblázat).

Az előkísérletekből kiderült, hogy a cellák méretének csökkentése árán elért cellaszám-növeléssel lényegesen csökken a kinyerhető áramerősség. Ráadásul – a bekötött cellák számához képest – a feszültség növekedése szinte elhanyagolható. Ennek legfőbb oka a közös elektrolit használatából adódó veszteségi áramok kialakulása, illetve, hogy a kinyerhető áramerősség függ a felület nagyságától. Ráadásul, ha nem elég agresszív az oldat (hanem például közönséges víz), akkor már túl kicsi lesz a feszültség, és a LED

4. ábra. Kör alakú lapokkal való megoldás.



2. táblázat		
Új, jobb elektródapáros iránti kutatás.		
mérés módja	áramerősség	feszültség
<i>mérések száraz tenyéren</i>		
alumínium, réz	0,30 V	1 $\mu$ A
horgany (cink), réz	0,50 V	2 $\mu$ A
ólom, réz	0,23 V	0 $\mu$ A
KO, réz	0,07 V	0 $\mu$ A
<i>ezüst, borganyzott vas</i>		
száraz	0,89 V	2 $\mu$ A
vizes	0,94 V	13 $\mu$ A
sóoldatos	0,94 V	620 $\mu$ A
<i>arany, borganyzott vas</i>		
száraz	0,39 V	1 $\mu$ A
sóoldatos	0,73 V	400 $\mu$ A
<i>20 Ft-os érme, borganyzott vas</i>		
száraz	0,43 V	1 $\mu$ A
vizes	0,76 V	10 $\mu$ A
sóoldatos	0,95 V	35 $\mu$ A
<i>rézcső, borganyzott vascső (2 cm széles)</i>		
száraz	0,69 V	16 $\mu$ A
vizes	0,78 V	40 $\mu$ A
sóoldatos	0,74 V	1000 $\mu$ A
<i>rézcső, borganyzott vascső (3 cm széles)</i>		
száraz	0,76 V	23 $\mu$ A
vizes	0,76 V	40 $\mu$ A
sóoldatos	0,73 V	600 $\mu$ A

nem fog világítani. Az emberi tenyérben elférő méretben és pusztán nedves elektródákkal sehogyan sem sikerült elérnem a működést. Ezért a továbbiakban kisebb számú, de nagyobb felületű cellák kialakítására törekedtem.

### Kísérletek kevesebb, nagyobb felületű, csődarabokból kialakított cellákkal

Elsőként azonos (2,7 cm) külső átmérőjű és 1 cm hosszú vas- és rézcsővel kísérleteztem. Ezeket is rögzítenem kellett, azonban nem sikerült azonos falvas-

3. táblázat		
Kör alakú lapokkal kialakított elrendezés mért értékei		
a bőr állapota	feszültség	áramerősség
száraz	335 mV	1,8 $\mu$ A
nedves	250 mV	6,5 $\mu$ A
ecetes oldatba mártott	730 mV	75,0 $\mu$ A



5. ábra. Két-két vas- és rézcsődarabból kialakított cella.

tagságú csövekhez jutnom, így nem használhattam PVC- vagy egyéb tömör csövet a henger alapjaként. A kísérleteket két darab (5. ábra, 4. táblázat), illetve három darab (6. ábra, 5. táblázat) sorba kötött cellával is elvégeztem.

A mért adatokból következik, hogy még ezzel a megoldással sem lehet a közös elektrolitból származó rövidzárási áram nagyságát kellően redukálni. Az áramerősség értékek viszont már kettő cellánál is jobbak, mint az előző, több cella alkalmazása esetén, így érdemesebb minél nagyobb felületű cellákat kialakítani. Ha azonban több cellát kötünk sorba, az egyes cellák felülete kisebb lesz (ami a kinyerhető áramerősség csökkenését is maga után vonja), az egy galváncellában kialakuló feszültség és az általam sorba kötött cellák feszültségének arányáról már nem is szólván!

## A galváncella teljesítményének felerősítése áramkör segítségével

A fentiek miatt úgy találtam, hogy módosítani kell eredeti elképzelésemet, és nem sok cella sorba kötésével próbáltam elérni a LED működtetéséhez szükséges legalább 3 V-os feszültséget, hanem egy konver-

6. ábra. Három-három vas- és rézcsődarabból kialakított cella.



4. táblázat

### Két darab vas- és rézcsőből kialakított cella mért értékei

a bőr állapota	feszültség	áramerősség
száraz	180 mV	1,8 $\mu$ A
nedves	300 mV*	6,5 $\mu$ A
ecetes oldatba mártott	580 mV	75,0 $\mu$ A

\* erősen ingadozó

ter áramkör segítségével. A konverternek meg kell elégednie azzal a feszültséggel (és árammal), amit 1 db cella képes nyújtani. Nem nyilvánvaló, hogy lehet ilyen átalakítót készíteni..., de lehet!

Sokféle DC-DC feszültségkonverter létezik és vásárolható is, de a működéshez többségük minimálisan 1–1,5 V-os bemenő feszültséget és eközben jó pár mA-es áramerősséget igényel. Esetünkben ez egész egyszerűen nem áll rendelkezésre, ugyanis még Cu-Al elektródáknál is maximum 0,5–0,9 V körüli feszültségértékeket mérhetünk, miközben az áramerősség csak 10 mikroamper nagyságrendű. Ezért egy olyan konvertáló áramkört kellett készíteni, amelyik menet közben nem pazarolja az áramot (a szivárgási veszteségi árama elhanyagolható), és megelégszik körülbelül 0,8 V-os bemenő feszültséggel.

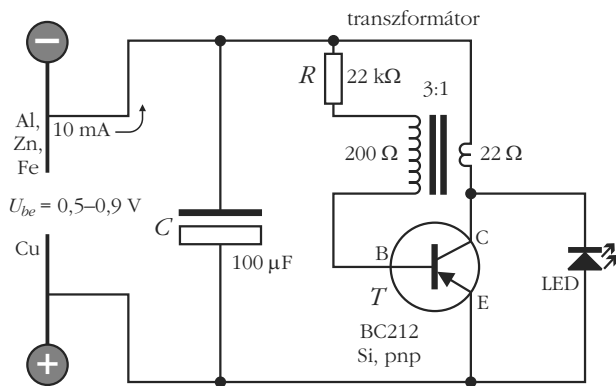
A konverter konkrét felépítésének és működésének megtervezésekor első lépésként az elektródák felől érkező nagyon kicsi (10  $\mu$ A körüli) áram töltését összegyűjtjük egy 100  $\mu$ F-os elektrolitkondenzátorban (C), amely 10–20 másodperc alatt feltöltődik a cella feszültségére. Kezdetben a transzformátoron semmilyen áram nem tud átfolyani, mert a T tranzisztor és a LED is zárt állapotban vannak.

Azonban amikor a C elektrolitkondenzátor feszültsége meghaladja a nagyjából 0,5 V-os feszültséget, a T (bipoláris) tranzisztor bázis-emitter diódáján már annyira áram folyik, hogy az nyitásra kezd vezérelni a tranzisztort a kollektor-emitter között. A szilícium-tranzisztorok (mint a BC212 is) nyitáshoz elvileg 0,6–0,7 V-os feszültség kellene, de ezt a feszültséget néhány mA-es kollektoráramnál szokás mérni, esetünkben pedig sokkal kisebb áramokkal dolgozunk, így a szükséges nyitófeszültség is kisebb. Ahogy a tranzisztor nyitni kezd, számottevő áram indul meg a transzformátor primer tekercsén, amelynek ellenállása esetünkben 22  $\Omega$  körül van. A meginduló áram feszültséget indukál a szekunder tekercsben is, meg-

5. táblázat

### Három darab vas- és rézcsőből kialakított cella mért értékei

a bőr állapota	feszültség	áramerősség
száraz	350 mV	3,9 $\mu$ A
nedves	630 mV	16,3 $\mu$ A
ecetes oldatba mártott	640 mV	52,5 $\mu$ A



7. ábra. Az áramkör kapcsolási rajza.

pedig kissé (háromszoros arányban) feltranszformálva. A szekunder tekercset olyan polaritással kapcsoljuk rá a tranzisztor bázisára, hogy pozitív visszacsatolás jöjjön létre. Ezért amikor a tranzisztor nyitni kezd, a szekunder tekercsen indukálódott (feltranszformált) negatív feszültség még gyorsabb nyitásra készíti a tranzisztort.

Ez az önmagát erősítő folyamat csak addig tart, ameddig az áram növekedni képes a transzformátor primer tekercsén keresztül: a primer tekercs egyenáramú ellenállása, a tranzisztor maradék ohmos ellenállása, és a kimerülni kezdő  $C$  kondenzátor csökkenő feszültsége előbb-utóbb csökkenést eredményeznek. Ezután a pozitív visszacsatolás a tranzisztor minél gyorsabb lezárását fogja eredményezni, ugyanis a csökkenő áram olyan (pozitív) feszültséget indukál a transzformátor szekunder tekercsében, amely a tranzisztort zárni igyekszik. Ez a folyamat igen hamar eljut a tranzisztor teljes lezárásáig (az  $R$  ellenállás szerepe csupán annyi, hogy a tranzisztor bázisába ne folyjék be feleslegesen nagy, veszteséget okozó áram).

Ekkor történik meg a számunkra fontos esemény: a transzformátor induktivitásán áthaladó áram nem hagyja magát egy pillanat alatt kikapcsolni. A  $T$  tranzisztor le is zár, azért az elektronok még jó ideig tovább haladnak a kollektor felé, és ott felhalmozódva egyre nagyobb negatív potenciált eredményeznek. Ez az impulzusszerű feszültségnövekedés akár 20–30 V-os negatív feszültséget is eredményezhetne, de nálunk mindenesetre nem növekszik magasabbra, mint a LED nyitófeszültsége, amelyet elérve az áram a LED-en keresztül halad tovább (azt egy pillanatra világításra bírva), így a kollektornál nem halmozódnak tovább az elektronok. A villanási folyamat azért áll le, mert csakhamar elfogy a transzformátorban (mint induktivitásban) tárolt mágneses energia. Tehát az áramkör a  $C$  kondenzátorban folyamatosan halmozódó energiát időnként „megcsapolja”, és a kondenzátor-transzformátor alkotta rendszer egy olyan áramimpulzust alakít ki belőle, amelynek feszültsége is elegendő a LED meghajtásához. Nagyobb  $C$  kapacitással és kisebb transzformátor-ellenállásokkal nagyobb, de ritkább villanásokat lehet produkálni. A 7. ábra szerinti értékekkel a villanások száraz tényéknél néhány másodpercenként jön-

nek, nedves és szennyezett tényéknél meg szinte folyamatosan. Nem túl világos környezetben a villanások jól láthatók. (Ez a konverter áramkör nagyon hasonlít a televíziós készülékekben korábban előszeretettel használt blocking-oszcillátorokhoz [2], csak most nagyon kis feszültségű és áramú tápláláshoz van igazítva.)

## A lámpa végső formájának elnyerése

Az első áramkör elkészült. Egy rézcsövet helyeztem az egyik kivezetésére, a másikra pedig egy hengerré hajlított, összeforrasztott cinklemezt, a lámpa így működik! Újabb áramköröket készítettem, majd a kivezetéseket már az elképzelésemhez közelebb álló réz- és cinklapokkal kötöttem össze.

Először szerettem volna készíteni egy „hagyományos” (Aladdina), rúdlámpa jellegű zseblámpát, amihez szükségem volt egy kör alakú lámpatestre. Azt az önkéntelen feltételezést is ki szerettem volna zárni, hogy egy ilyen zseblámpa minden bizonnyal elemmel működik, ezért nem egy hagyományos zseblámpatestet, hanem egy átlátszó üveghengert használtam. Ennek belsejében helyeztem el az áramkört oly módon, hogy a LED a henger egyik kivezetésénél legyen, majd a hengerre palástként helyeztem el a két fémlapot. Kétféle megoldás létezik: az elektródákat kör formájúra hajlítjuk, és így helyezzük el egymás mellett, vagy félkör alakú formát készítünk belőle, és párhuzamosan helyezkednek el az egyenes oldalak. Természetesen itt is ügyelni kell a cellák közötti minimum 1, maximum 3 mm távolságra. Ezt tenyerünkkel megfogva világításra bírhatjuk a LED-et. Mindkét kivitelezéssel működőképes lámpát kapok.

Ezután egy, a meséből ismert, formatervezett lámpát is szerettem volna készíteni, alakra nézve hasonlít Aladdin lámpájához. Ilyen formájú edényt szinte sehol nem tudtam beszerezni, ezért kerámiából készítettem. Az enyém oldala kissé lapított lett, ide helyeztem a megfogandó elektródákat, amelyeket megfelelően nehéz megfelelő alakúra hajlítani. A kanóc helyén világít a LED, és a lámpa testében kapott helyet a konvertáló elektronika. Ha a lámpát elég szorosan fogjuk (dörzsölni azért nem kell), akkor idővel villogni kezd. Több, különböző méretű darabot is készítettem.

Több emberrel is kipróbáltam a lámpa működését, különféle körülmények között végeztem kísérleteket: kézmosás után, tiszta kézzel; étkezés után, illetve sportolás után; 10 másodperces periódusonként mértem a LED villanásainak számát. A kapott adatok igazolásul szolgáltak következtetésemre: a tiszta kéz kevésbé savas, mint a mozgás következtében izzadtá vált, de az étkezés is aktívan befolyásolja a mérhető értékeket. Az egyéni különbség persze a testfelépítéstől is függ, ezért a kísérleti alanyok magasságát és súlyát is dokumentáltam (6. táblázat).

Az Aladdin-lámpa kapcsán akár párhuzamot is vonhatnánk a bagdadi elemmel [3]. Figyelemre méltó,



6. táblázat

## Az elkészült Aladdin-lámpa működése különböző emberek kezében

kísérleti alany adatai		10 s alatt lezajlott villanások száma		
magasság	súly	étkezés után	kézmosás után	sport után
179 cm	70 kg	32 db	27 db	98 db
166 cm	58 kg	26 db	27 db	56 db
159 cm	49 kg	42 db	32 db	53 db
163 cm	48 kg	35 db	11 db	41 db
163 cm	56 kg	52 db	26 db	66 db

hogyan olyan kétezer éves iraki agyagedényeket tártak fel, amelyek belsejében egy rézcső és egy – feltehetően savas kémhatású folyadékkal való érintkezés folyamán oxidálódott – elszigetelt vasrúd található, amelyek galvánelemként funkcionálhattak. Ebben viszont a folyékony halmazállapotú elektrolit minden bizonnyal az edény belsejében helyezkedett el, míg az én lámpámon az edény külső felén kapnak helyet és nem akármilyen folyadék adja az elektródák közötti közvetítő közeget...

## A lámpa használata

A tenyerünket a lámpán elhelyezkedő fémlapokra kell tenni a 8. ábrán látható módon.

Ha elég szorosan fogjuk, a galvanizációs folyamat hatására elektromos áram termelődik.

Ezt az edény/henger belsejében elhelyezett áramkör annyira felerősíti, hogy arról már egy LED-et is működtetni tudunk: a fénykibocsátó dióda 20–30 másodpercen belül villogni kezd. A villanások között eltelt időt több tényező is befolyásolja, ám érdemes feljegyezni az egységnyi idő alatt mérhető villanások számát, mert ebből a bőrt adó személy egészségi állapotára is következtethetünk.

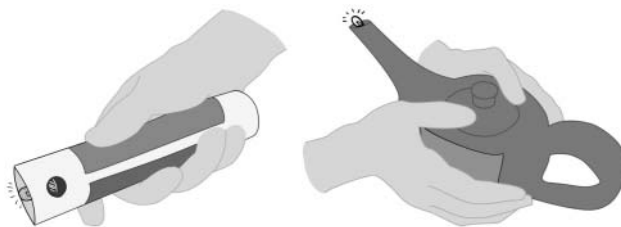
A lámpa mindaddig működik, amíg a kezünkben tartjuk, ha letesszük, a folyamat önmagától leáll.

## További elképzelések, fejleszthetőség

LED helyett egy kis teljesítményű hangszórót is működtetésre bírhat az áramforrás. Ezáltal elég lesz csupán hallótávolságon belül lennünk, így nagyobb fényben is használható lesz a szerkezet.

Másik elektródapár, például cink-réz elektródapár alkalmazásával számunkra ideális a kinyerhető áram mennyisége, ám nemesfémek alkalmazásával ezt még fokozni lehet. Ezért tervezem egy vezető anyag arannyal vagy ezüsttel való galvanizálását, és ezt használnám pozitív elektródaként.

Orvosi, dietetikai felhasználása is elképzelhető, hiszen a lámpa működését nagyban befolyásolja bőrünk ellenállása, de ennek kimutatására már sokféle



8. ábra. A zseblámpa és Aladdin lámpája formájú elkészítés.

eszköz készült (EEG, EKG stb.), a lámpát nem ennek mérésére szeretném használni.

A galváncellából kinyerhető áram mennyisége az elektrolit anyagi minőségétől is függ, esetünkben az emberi bőr savasságától, amit a savháztartásunk határoz meg. Savháztartásunk egyensúlyának felborulása sokáig észrevétlen maradhat, ám súlyos következményekkel járhat, mint például a csonttrikulás, szellemi és fizikai teljesítőképesség-csökkenés, anyagcsere-eltozódás vagy súlyproblémák. Mivel a lámpa működéséből bőrünk savasságára is következtethetünk (minél savasabb az ember bőre, a LED annál sűrűbben villog), a lámpa orvosi mérőműszerré való fejlesztése sem kizárt.

Mindenesetre hasznos kis dietetikai tanácsadó lehet, mert a savháztartás elsősorban az elfogyasztott ételek pH-értékétől függ. Műszerünkkel esetleg ellenőrizhetjük aktuális savháztartásunkat, és eszerint állíthatjuk össze étrendünket.

Másik elképzelésem további „energiaguberálás”, hogy ezt az energy harvestert a mindennapokban is felhasználhassuk energia nyerésére. Gondoljunk bele, hogy mennyi időt töltünk a számítógép előtt, közben meglehetősen sokat nyugtatjuk tenyerünket az egéren! Milyen praktikus lenne, ha az egereknél is hasznosíthatnánk az elképzelést: magunk termelnénk meg a kattintgatáshoz szükséges elektromos áramot.

Számos elképzelésem van a szerkezet továbbfejlesztésére. Már van standard lámpám – ráadásul kettő, kíváncsisággal és lelkesedéssel fogadták az emberek ezeket a „találmányokat”. Úgy gondolom, hogy nagyobb tömegek is érdeklődést mutatnának iránta az egyszerű használhatósága miatt (például nem kell elemért szaladgálniuk a boltba..., a kezük mindig „kéznél van” ☺).

## Köszönetnyilvánítás

Hálával tartozom mentoromnak, *Daróczi Csaba Sándornak*, aki szakmai támogatásával és tanácsaival nélkülözhetetlen segítségül szolgált egy kezdő kísérletezőnek; fizikatanárainak: *Inczeffyné Vigh Gyöngyi Noéminek* és *Jarábik Bélának*, akik révén a pályamunkához szükséges ismeretanyaghoz jutottam; *Bábel Ferenc* tv-műszerésznek az elektronikai tanácsokért; osztályfőnökömnek és magyartanáromnak, *Horváthné Gyovai Melindának* a szövegezésben való segítségért és lektorálásért (még az osztálykiránduláson is), és családomnak a biztatásért, kitartásért, illetve a lakásunkban több hónapon át tartó felfordulás elviseléséért ☺.

## Irodalom

1. [http://en.wikipedia.org/wiki/Energy\\_harvesting](http://en.wikipedia.org/wiki/Energy_harvesting)
2. [http://itl7.elte.hu/html/elektronika/node5\\_19.html](http://itl7.elte.hu/html/elektronika/node5_19.html)
3. <http://index.hu/tudomany/tortenelem/elem7841>

# XIII. SZILÁRD LEÓ NUKLEÁRIS TANULMÁNYI VERSENY

Beszámoló, I. rész

Sükösd Csaba  
BME Nukleáris Technika Tanszék

Szilárd Leó születésének centenáriuma alkalmából, Marx György professzor kezdeményezésére 1998-ban került először megrendezésre a Szilárd Leó Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny. Azóta a Szilárd Leó Tehetséggondozó Alapítvány és az Eötvös Loránd Fizikai Társulat minden évben megrendezi a versenyt. 2006 óta határon túli magyar anyanyelvű iskolák tanulói részére is megnyitottuk a részvétel lehetőségét. Az idén éltek ezzel először szerbiai vajdasági iskolák: Zentáról a Gimnázium, valamint a Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, továbbá Újvidékről a Gimnazija Svetozar Marković. Örvendetesen folytatódtak az erdélyi iskolákból történő jelentkezések is: Székely Mikó kollégium (Sepsiszentgyörgy), János Zsigmond Unitárius Kollégium (Kolozsvár), valamint a Nagykárolyi Elméleti Líceum (Nagykároly). A határon túli iskolákból összesen húsz első kategóriás (11–12. osztályos) tanulót neveztek be a versenybe. Sajnos, Felvidékről és Kárpátaljáról 2010-ben sem kaptunk nevezéseket. Összesen 251 első kategóriás (a már említett határon túliakon kívül 177 vidéki és 54 budapesti) valamint 140 junior kategóriás (vidékről 118, Budapestről 22) nevezés érkezett.

A 2010. március 1-jén megtartott első forduló (válogató verseny) tíz feladatát az iskolákban három óra alatt lehetett megoldani. Kijavítás után a tanárok azokat a megoldásokat küldték be a BME Nukleáris Technika Tanszékére, ahol a 9–10. osztályos (junior) versenyzők legalább 40%-os, a 11–12. osztályos (I. kategóriás) versenyzők legalább 60%-os eredményt értek el.

Az alábbiakban ismertetjük a válogató verseny – a 2. részben pedig a döntő – feladatait, valamint rövid megoldásukat. Valamennyi feladatra 5 pontot lehetett kapni.

## A válogató verseny (I. forduló) feladatai és megoldásuk

### 1. feladat

Szilárd Leó életrajzi totó

1. Hányadik lett 18 éves korában az Eötvös Loránd Matematikai Tanulmányi Versenyen? 1: első, 2: második, x: harmadik.
2. Mikor hagyta el Európát? 1: 1933, 2: 1938, x: 1939.
3. Mi volt *Einstein*nel közös szabadalma? 1: mágneses hűtőszekrény, 2: kemosztát, x: ciklotron elv.
4. A hidegháború idején, 1947-ben, a megegyezés érdekében híressé vált levelet írt egy ország vezetőjének. Kinek? 1: *Truman*, 2: *Churchill*, x: *Sztálin*.
5. Küzdött egy európai és egy közel-keleti atomfegyvermentes övezet létrehozásáért. Ezért mondta rá *Klein György*: 1: „...maga volt a világ lelkiismere-

te...”, 2: „...minden elismerést megérdemel...”, x: „...nincs nála erre alkalmasabb ember...”

*Megoldás*: a helyes tipposzlop: 2, 2, 1, X, 1. Minden helyes válasz 1 pontot ért.

*Megjegyzések*: az első kérdéssel kapcsolatban: az 1916-os Eötvös Matematikai Versenyt *Koródi Albert* nyerte, a 18 éves Szilárd Leó akkor a második volt (a fizika versenyt megnyerte). A megadott szakirodalom közül egyesekben azonban csak annyi szerepelt, hogy Szilárd Leó megnyerte mind a matematikai, mind a fizikai Eötvös Versenyt, ezért a Versenybizottság úgy döntött, hogy azokra a megoldásokra is ad egy pontot, akik az első kérdésre 1-gyel válaszoltak.

### 2. feladat

Miért helyes, illetve miért helytelen úgy elképzelni, hogy az elektronok az atommag körül ahhoz hasonlóan keringenek, mint a bolygók a Nap körül? Milyen jelenségeket lehet jól leírni a modellel, és melyeket nem?

#### *Megoldás*

A modell által jól leírt jelenségek:

- az atom tömegének legnagyobb része egy igen kis térrészre összpontosul;
- az atomban lévő pozitív töltések egy igen kis térrészre összpontosulnak (Rutherford-kísérlet);
- a Coulomb-erő képes a különböző elektromos töltésű részeket ugyanúgy pályán tartani, ahogyan a gravitációs erő a bolygókat, mivel mindkettő a távolság négyzetével fordítottan arányos.

A modell hibái:

- A keringő elektronok gyorsuló mozgást végeznek, tehát sugározniuk kellene. Emiatt bele kellene zuhanniuk a magba.
- A bolygók keringési távolsága széles határok között bármi lehet. Az elektronok energiája – és ezáltal a keringési távolságuk – csak meghatározott értékeket vehet fel. Ezt a modell nem magyarázza, pedig ez biztosítja az atomok stabilitását.
- A keringés velejárója a perdület. A kvantummechanika és a kísérletek szerint azonban a H-atom alapállapotában az elektron pályamomentuma nulla.

### 3. feladat

A gadolínium ezüstös színű, lágú nehézfém. Egyes izotópjai nagyon jó neutronelnyelők, így ha atomreaktorba kerül, akkor – a xenonhoz hasonlóan – reaktorméreg. Mivel a  $^{157}\text{Gd}$  atommagok neutronfelvétel után olyan izotóppá alakulnak, amelyek már nem nagyon jó neutronelnyelők, ezért egy idő után elfogy a neutronelnyelésre alkalmas atommagok. Emiatt a gadolíniumot *kiégő méregnek* nevezik. Abban viszont különbözik a xenontól, hogy a reaktor leállása után nem szaporodik. Az atomreaktorok teljesítmény-

növelése és az üzemanyagciklus meghosszabbítása érdekében az eddigi 3,82%-os dúsítású kazetták közé 4,2%-os dúsításúakat is helyeznek. Miért célszerű ilyenkor a reaktorba gadolíniumot is juttatni?

#### Megoldás

A reaktor teljesítményét – kissé leegyszerűsítve – az aktív zónában lévő hasadóanyag mennyisége és az átlagos neutronfluxus nagysága határozza meg. Az energiatermelési kampány elején még sok a hasadóanyag, ezért kisebb neutronfluxus kell az előírt teljesítmény eléréséhez, mint a kampány végén, amikor az üzemanyag már fogyóban van. A neutronfluxus növekedését a kiégő mérgek – például gadolínium – alkalmazásával is el lehet érni. Ha a gadolínium kezdetben megfelelő arányban van jelen, akkor elérhető, hogy a gadolínium kiégése miatt növekvő neutronfluxus éppen kompenzálja a hasadóanyag fogyásából eredő hatást, és a reaktor teljesítménye akár további szabályozóelemek nélkül is – szinte automatikusan – állandó szinten marad.

Különösen fontos a kiégő mérgek alkalmazása teljesítménynöveléskor, és/vagy kampányidő hosszabbításakor. Ezekben az esetekben több energiát akarunk termelni egy kampány alatt, ezért több hasadóanyagot kell bevinni a reaktorba. Ezt magasabb dúsítású kazettákkal érik el. Nem biztos azonban az, hogy az eredetileg tervezett szabályozóelemek elegendőek arra, hogy a kampány elején az így bevitt többletreaktivitást az előírt biztonsági szinten le tudják kötni. Kiégő mérgek – például gadolínium – alkalmazásával azonban kompenzálni lehet a bevitt többlet hasadóanyag hatását.

#### 4. feladat

Az újságokban a következő hír jelent meg: „Az ELTE és a KFKI RMKI három kutatóját érte az a megtiszteltetés, hogy először publikálhattak 2,36 teraelektronvolton történt ütközéseket. A rekord energiaszintet a CERN gyorsítójában, az LHC-ben állították elő, ahol még magasabb energián fogják keresni a rejtélyes Higgs-bozont. A részecskevadászatban jól jönnek majd a magyarok mérései.” A három magyar kutató név szerint: *Siklér Ferenc, Veres Gábor és Krajczár Krisztián*.

A nyugalmi tömegük hányszorosára nőtt a 2,36 TeV energiát eredményező ütközésben részt vevő, felgyorsított protonok tömege?

#### Megoldás

Miután a protonok egymással szembe ütköztek, a 2,36 TeV-es ütközési energiát két, egyenként 1,18 TeV =  $1,88 \cdot 10^{-7}$  J mozgási energiájú proton hozta létre. A protonok nyugalmi tömege  $1,672 \cdot 10^{-27}$  kg. A mozgási energiát az

$$E = m c^2 - m_0 c^2$$

képlettel lehet megadni, ebből

$$m = \frac{E + m_0 c^2}{c^2},$$

behelyettesítve:

$$m = \frac{1,88 \cdot 10^{-7} + 1,672 \cdot 10^{-27} \cdot 9 \cdot 10^{16}}{9 \cdot 10^{16}} = 2,09 \cdot 10^{-24} \text{ kg.}$$

Ez a proton nyugalmi tömegének 1250-szerese.

#### 5. feladat

Becsüljük meg Magyarország összes lakásában lévő radongáz tömegét! Mekkora lenne e gázmennyiség térfogata normálállapotban?

A adatok: A  $^{222}\text{Rn}$  felezési ideje  $T_f = 3,8$  nap. A lakások légtérének átlagos (radonból származó) aktivitása  $50 \text{ Bq/m}^3$ . A lakások számát vegyük 4 millió-nak, az átlagos térfogatot pedig  $V = 60 \text{ m}^2 \times 3 \text{ m} = 180 \text{ m}^3$ -nek.

#### Megoldás

Az összes aktivitás:

$$A_o = 4 \cdot 10^6 \cdot 1,8 \cdot 10^2 \text{ m}^3 \cdot 50 \frac{\text{Bq}}{\text{m}^3} = 3,6 \cdot 10^{10} \text{ Bq,}$$

másrészt

$$A = \frac{\ln 2}{T_f} N,$$

amiből

$$N = \frac{A}{\ln 2} T_f = \frac{3,6 \cdot 10^{10} \text{ 1/s}}{\ln 2} 3,8 \cdot 8,64 \cdot 10^4 \text{ s} = 170,51 \cdot 10^{14} \approx 1,7 \cdot 10^{16},$$

így a radongáz tömege

$$m = \frac{1,7 \cdot 10^{16}}{6 \cdot 10^{23}} 222 \text{ g} = 62,9 \cdot 10^{-7} \text{ g} \approx 6,3 \mu\text{g.}$$

E gázmennyiség térfogata normál állapotban:

$$V \approx \frac{1,7 \cdot 10^{16}}{6 \cdot 10^{23}} 22410 \text{ cm}^3 = 6,35 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^3 \approx 0,6 \text{ mm}^3.$$

#### Második (alternatív) megoldás

$$V = \frac{m R T}{M p} = \frac{6,3 \cdot 10^{-6} \text{ g} \cdot 8,314 \frac{\text{J}}{\text{K mol}} \cdot 273 \text{ K}}{222 \frac{\text{g}}{\text{mol}} \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}} =$$

$$64 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \approx 0,6 \text{ mm}^3.$$

#### 6. feladat

A Nap  $3,92 \cdot 10^{26} \text{ W}$  teljesítménnyel sugároz.

a) Mekkora tömeget veszít másodpercenként a sugárzása következtében?

b) Egy átlagos emberi élet 75 év. Tömegének hányad részét veszíti el ez alatt az idő alatt a Nap?

c) Hova lesz a Nap tömegvesztése?

### Megoldás

a) A másodpercenkénti energiavesztés  $\Delta E = 3,92 \cdot 10^{26}$  J.  $\Delta E = m \cdot c^2$  a relativitáselmélet szerint, ahonnan a másodpercenkénti tömegvesztés

$$m = \frac{\Delta E}{c^2} \approx 4,36 \cdot 10^9 \text{ kg.}$$

b) 75 év alatt körülbelül  $1,0 \cdot 10^{19}$  kg a tömegvesztés, azonban ez a Nap tömegének mindössze

$$\frac{1,0 \cdot 10^{19} \text{ kg}}{1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}} \approx 5 \cdot 10^{-12},$$

azaz 5 pikonapnyi része.

c) A Nap sugárzás miatt bekövetkező tömegvesztésének legnagyobb része sugárzás formájában ma is az Univerzumban van. Igen kis része beleütközött csillagokba, bolygókba (például Föld). Ám a Föld (vagy egyéb bolygók) által elnyelt sugárzás nagy része ismét kisugárzódott, bár jóval alacsonyabb hőmérsékletű hőmérsékleti sugárzás formájában.

### 7. feladat

A Balatonon idén a jég átlagosan 14 cm vastagságúra „hízott”.

a) Mennyi idő alatt tudja ezt a Nap megolvasztani, ha a Nap változó sugárzási intenzitását úgy közelítjük, mintha naponta 6 órán keresztül  $30^\circ$ -kal járna a horizont felett, és a sugárzás 90%-a visszaverődik a jégről?

b) Becsülje meg, hogy mekkora tömegű hidrogén fúziója szolgáltatna ennyi energiát a Napban végbemenő fúziós folyamat során?

Adatok: a Balaton területe  $595 \text{ km}^2$ , a jég hőmérsékletét vegyük mindenütt  $0^\circ \text{C}$ -nak. A Föld felszínére érkező napsugár teljesítménye derült időben, merőleges beesésnél:  $600 \text{ W/m}^2$ . Az energiatermelő magfúziós folyamat (több közbeeső lépcsőn keresztül):  $4 \text{ }^1\text{H} \rightarrow \text{}^4\text{He}$ . A H és a He atommag tömege rendre:  $m_{\text{H}} = 1,673 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ , illetve  $m_{\text{He}} = 6,647 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ .

### Megoldás

Először  $1 \text{ m}^2$  jégre végezzük el a számolást. A jégtábla térfogata  $V = 1 \text{ m}^2 \cdot 0,14 \text{ m} = 0,14 \text{ m}^3$ . A jég sűrűsége  $920 \text{ kg/m}^3$ , ezért a jégtábla tömege:  $128,8 \text{ kg}$ . A jég olvadáshője  $3,35 \cdot 10^5 \text{ J/kg}$ , azaz ekkora jégtábla megolvasztásához  $4,3 \cdot 10^7 \text{ J}$  szükséges. Mivel a Nap átlagosan csak  $30^\circ$ -kal jár a horizont felett, ezért a merőleges beeséskor érvényes  $600 \text{ W/m}^2$  helyett csak  $600 \cdot \sin 30^\circ = 300 \text{ W/m}^2$  az intenzitás, és ennek is csak 10%-a nyelődik el, a többi visszaverődik. Tehát a jégben elnyelődő teljesítmény:  $30 \text{ W/m}^2$ .  $1 \text{ m}^2$ -es jégtábla megolvasztásához tehát

$$t = \frac{4,3 \cdot 10^7}{30} = 1,43 \cdot 10^6 \text{ s} = 398 \text{ h}$$

szükséges. A feladat szerint naponta átlagosan csak 6 órát süt a Nap, ezért a 398 órányi napsütéshez  $66,4$  napra van szükség. Mivel minden egyes négyzetméterre ugyanakkora energia esik, ezért a teljes jég-

mennyiség felolvasztásához is ugyanennyi időre van szükség.

b) A feladat második része a szükséges energia fúziós előállításában résztvevő hidrogén tömege. A teljes jégfelület megolvasztásához  $Q = 4,3 \cdot 10^7 \cdot 595 \cdot 10^6 = 2,56 \cdot 10^{16} \text{ J}$  energia szükséges. A  $4 \text{ }^1\text{H} \rightarrow \text{}^4\text{He}$  fúzióban felszabaduló energia a tömeghiányból számolva  $q = (4m_{\text{H}} - m_{\text{He}}) \cdot c^2 = 4,05 \cdot 10^{-12} \text{ J}$ , ennyi energia előállításához  $N = Q/q = 0,63 \cdot 10^{28}$  magreakció szükséges. Minden magreakcióban 4 hidrogén vesz részt, így az „elhasznált” H-atommagok száma:  $2,5 \cdot 10^{28}$ . Egyetlen H-atom tömege  $1,673 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ , ezért ennyi energiát  $\sim 42 \text{ kg}$  hidrogén fúziójával lehet előállítani. (A Napban 66 nap alatt természetesen ennél sokkal több hidrogén fuzionál, hiszen a Nap által kibocsátott energiának csak igen kis része fordítódik a balatoni jég megolvasztására.)

### 8. feladat

Egy  $500 \text{ nm}$  hullámhosszúságú monokromatikus fényt a tér minden irányába egyenletesen kibocsátó, pontszerűnek tekinthető fényforrás teljesítménye  $20 \text{ mW}$ .

a) Másodpercenként hány foton érkezik be ebből a  $2 \text{ km}$  távolságban álló megfigyelő szemébe, ha pupillájának átmérője  $2 \text{ mm}$ ?

b) Legfeljebb milyen messziről lehet ezt a fényforrást még éppen meglátni, ha tudjuk, hogy egy sötét-höz szoktatott szem retinája másodpercenként körülbelül 30 foton beesését már képes érzékelni?

### Megoldás

Az  $500 \text{ nm}$  hullámhosszúságú foton energiája:  $E = h \cdot f = h \cdot c/\lambda = 4 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ . A másodpercenként kibocsátott fotonok száma:  $N = 20 \text{ mW}/4 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 5 \cdot 10^{16}$  darab.

a) A szembe érkező fotonok számát úgy kapjuk meg, hogy az összesen kibocsátott foton számát elosztjuk a  $2 \text{ km}$  sugarú gömb felszínével, és azt megszorozzuk a  $2 \text{ mm}$  átmérőjű pupilla területével:

$$n = 5 \cdot 10^{16} \frac{(1 \cdot 10^{-3})^2 \pi}{4 \pi (2 \cdot 10^3)^2} \sim 3,1 \cdot 10^3 \text{ foton/s.}$$

b) A 30 foton ennek körülbelül századrésze. Mivel az intenzitás a távolság négyzetével fordítottan arányos, ezért tízszer olyan messzire lehet még elmenni ahhoz, hogy észrevegyük a fényforrást, azaz körülbelül  $20 \text{ km}$ -re. Ez az eredmény természetesen csak akkor igaz, ha a levegő fényelnyelésétől és fényszórásától eltekintünk. (A gyakorlatban  $20 \text{ km}$  távolságban ezeknek már jelentős szerepe van.)

### 9. feladat

Egy  $\gamma$ -forrás aktivitása  $925 \text{ kBq}$ . A Geiger–Müller-számlálóval másodpercenként 160 darab beütést tudunk regisztrálni, amikor a forrás és a számláló közé  $3,2 \text{ mm}$  vastag ólomlemez helyeznek. A lemez eltávolításakor a beütésszám  $280$ -ra nő másodpercenként.

a) Milyen messze van a  $4 \text{ cm}$  átmérőjű GM-cső a forrástól, ha a cső a ráeső fotonok 10%-át érzékeli?

b) Milyen vastag ólomlemez kellene alkalmazni, ha azt szeretnénk, hogy 50%-kal csökkentse a sugárzás intenzitását?

### Megoldás

a) A számláló a  $925 \cdot 10^3$  darab fotonból csak 280-at érzékel. Mivel a cső csak minden tizedik ráeső foton érzékeli, ezért 2800 foton éri el a cső felszínét. A forrás által kibocsátott fotonok egy  $4\pi R^2$  felületű gömbön egyenletesen oszlanak el, ahol  $R$  a detektor forrástól mért távolsága. A detektor felszíne:

$$\pi \left( \frac{d}{2} \right)^2 = 4\pi \text{ cm}^2.$$

Erre esik 2800 foton másodpercenként, a kibocsátott 925 ezerből. Azaz:

$$2800 = \frac{4\pi}{4\pi R^2} 925 \cdot 10^3.$$

Ebből kapjuk:

$$R^2 = \frac{925 \cdot 10^3}{2800} = 330,35,$$

azaz  $R = 18,18$  cm.

b) Az ólomlemez a sugárzást az exponenciális gyengülési törvény szerint gyengíti.

$$I(x) = I_0 2^{-\frac{x}{L}},$$

ahol  $L$  a felezési rétegvastagság. A feladat éppen erre kérdez rá, hiszen ez az a vastagság, amely az intenzitást a felére csökkenti.

A feladatból tudjuk, hogy

$$\frac{I(3,2 \text{ mm})}{I_0} = \frac{160}{280} = 0,571.$$

Azaz

$$0,571 = 2^{-\frac{3,2}{L}}.$$

Mindkét oldal logaritmusát véve kapjuk:

$$\lg 0,571 = -\frac{3,2}{L} \lg 2,$$

amiből

$$L = -3,2 \frac{\lg 2}{\lg 0,571} = 3,96 \text{ mm}.$$

### 10. feladat

a) Mi volt a 64 kg töltetű hirosimai atombomba robbanóanyaga?

b) Megközelítőleg az anyag hány százaléka lépett reakcióba a 15 kt (kilotonna) erejű robbanásban?

c) Mit gondol, miért?

d) Adjon egyszerű magyarázatot arra, hogy miért van szükség egy bizonyos kritikus tömegre az önfenntartó láncreakció létrejöttéhez!

Adatok: 1 kilotonna hagyományos robbanóanyagból  $4,184 \cdot 10^{12}$  J energia szabadul fel. A bomba robbanását okozó anyag egyetlen atommagjának magreakciójából felszabaduló energia 32 pJ.

Megoldás

a) A hirosimai atombomba robbanóanyaga igen magas (>90%) dúsítású  $^{235}\text{U}$  volt.

b) Tudjuk, hogy egy hasadásban megközelítőleg  $32 \cdot 10^{-12}$  J energia szabadul fel. A reakcióba lépett magok száma tehát

$$15 \frac{4,184 \cdot 10^{12}}{32 \cdot 10^{-12}} = 1,96 \cdot 10^{24},$$

azaz 3,27 mol. A bomba hasadóanyaga zömében 235-ös tömegszámú urán. A láncreakcióban résztvevő urán tömege tehát  $3,27 \cdot 235 = 768$  g, ami a bombában lévő hasadóanyag tömegének körülbelül 1,2%-a.

c) Az anyagnak azért csak ilyen kis hányada lépett reakcióba, mert a felszabaduló hatalmas energia elpárologtatta a bomba többi részét, mielőtt a láncreakció kiterjedhetett volna arra is.

d) A kritikus tömeg – a legegyszerűbb magyarázat szerint – azért létezik, mert a láncreakcióban keletkező neutronok száma a térfogattal arányos, míg a bomba felületén kilépő, a láncreakció számára elvesző neutronok száma a felülettel. Az önfenntartás érdekében el kell érni egy kritikus arányt a keletkező/elvesző neutronok között. Ez az arány:

$$\frac{\text{térfogat}}{\text{felület}} \sim \frac{R^3}{R^2} \sim R.$$

Innen látható, hogy a bomba sugarának növelésével ez az arány javítható, és megfelelő hasadóanyag esetén van olyan méret, amikor ez az arány eléri az önfenntartó láncreakcióhoz szükséges értéket.

### Az elődöntő eredményei

Az elődöntő feladatait 72 fő I. kategóriás – Budapestről 20-an, vidékről 51-en, valamint 1 határon túli – és 18 fő junior – 3 budapesti és 15 vidéki – versenyző teljesítette olyan szinten, hogy dolgozataikat a javító tanárok tovább tudták küldeni a BME Nukleáris Technika Tanszékére további rangsorolás végett.

A verseny krónikájához hozzátartozik, hogy az egyik iskolából három diák dolgozatát hibás kategória-jelzéssel küldték tovább: érettségi előtt álló diákokat junior kategóriájúaknak tüntettek fel. A verseny meghirdetésében szerepelt, ha valaki nem a megfelelő kategóriában versenyez, akkor a Versenybizottság kizárhatja. Az esetet kivizsgálva a Versenybizottság megállapította, hogy a kategória téves megadása a javító/felkészítő tanár hibája. Ezért olyan döntés született, hogy a véletlen diákokat nem büntetjük, nem zárjuk ki a versenyből (azaz I. kategóriás diákként versenyezhetnek tovább), de eredményüket nem számítjuk be a tanári Delfin-díj pontversenyébe, s nem vesszük figyelembe a Marx György vándordíjért való versenyben sem. A három diák közül kettő eredmé-

nye elegendő volt az I. kategória döntőjébe jutásához, így ők továbbjutottak.

A beküldött dolgozatokat ellenőrizve egy egyetemi oktatókból álló bírálóbizottság a legjobb 10 junior versenyzőt és a legjobb 20 első kategóriás versenyzőt hívta be a paksi Energetikai Szakközépiskolában 2010. április 24-én megrendezett döntőre. Külön örömet jelentett, hogy az idén először egy határon túli tanuló – Sipos E. Lebel Sepsiszentgyörgyről – is olyan szép eredményt ért el, amivel bekerült a meghívottak közé. Sajnos a döntő előtt értesítést kaptunk: mégsem tud részt venni a döntőn. Néhány további diák is le-

mondta a versenyt a Kémia OKTV-vel való ütközés miatt, így végül 18 fő I. kategóriás, és 9 fő junior kategóriás diák versenyzett.

Az idén csak három lány jutott be a verseny döntőjébe, ketten az I. kategóriában, egy pedig a juniorok között. A verseny fordulón (mobiltelefon és Internet kivételével) bármilyen segédeszközt használhattak a diákok.

A *Fizikai Szemle* következő számában a döntő feladatairól és értékeléséről, a helyezésekről, valamint a tanári Delfin-díj és a Marx György vándordíj nyerteiséről számolunk be.

## HÍREK – ESEMÉNYEK

# AZ AKADÉMIAI ÉLET HÍREI

## Einstein Teleszkóp

*Einstein* 1916-ban közzétett általános relativitáselmélete megjósolta a gravitációs hullámok létezését, és azóta asztrofizikai megfigyelések igazolták az elméleti következtetéseket. A jelenlegi, elektromágneses hullámokon alapuló asztrofizikai, csillagászati megfigyeléseket a nagy áthatoló képességű gravitációs hullámok segítségével új, korábban elérhetetlen tartományokra terjeszthetjük ki, ami különösen az asztronómia és a kozmológia megújulásához vezethet. A fény számára az Ősrobbanás után 300 000 év elteltével vált átlátszóvá a Világegyetem, míg a gravitációs hullámok segítségével a Világegyetem sokkal korábbi folyamatairól is alapvető ismereteket kaphatunk.

Az Einstein Teleszkóp (ET) célja az, hogy Európa vezető szerepet érjen el a gravitációs hullámok észlelésére alapozott új tudományág, a gravitációshullám-csillagászat kialakításában. Ehhez új technológiák kifejlesztése szükséges, különösen a vákuumtechnika, a lézerfizika, valamint a számítástechnika és az informatika területén. Az EU FP7-es keretprogramja támogatja a tervelőkészítő szakaszt. Az EU pénzügyi háttérével, közel 4 milliárd euróból, 10 év alatt egy olyan új, nagy kutatási központ épül fel, amely mintegy 50 évig üzemel majd.

*Ráczy István*, az RMKI-VIRGO és az MTA-ET csoportok vezetőjének összeállítása alapján.

A gravitációs hullámok megfigyelésére irányuló földfelszíni kísérleti berendezések Amerikában 2002 óta LIGO néven, Európában 2004 óta VIRGO néven működnek. A European Gravitational Observatory (EGO) a működő első generációs VIRGO projekt mellett tervezi a második generációs, érzékenyebb Advanced VIRGO és az évtized végére a harmadik generációs, szuperérzékeny Einstein Teleszkóp projekt indítását is. A Magyar Tudományos Akadémia Részecske és Magfizikai Kutatóintézetében létrejött VIRGO Csoport 2008-ban csatlakozott a VIRGO európai tudományos együttműködés munkájához és a csoport szakmai hitelének köszönhetően 2009 óta az ugyancsak az EGO által szervezett ET projekt munkájában is részt vesz. Az ET – valamint a hozzá hasonló amerikai és japán berendezések – a következő öt évtizedben a precíziós csillagászati és kozmológiai megfigyelések elsődleges eszközei lesznek.

Az ET tizenegy lehetséges helyszínének vizsgálata után a második fordulóra a következő négy pályázat jutott: Németország (Fekete-erdő), Magyarország (Mátra), Olaszország (Szardínia) és Spanyolország (Pireneusok). A továbbjutottak nevét az MTA-n megrendezett 3. ET Nemzetközi Műhelyen, 2010. november 23–24-én hirdették ki.

A beruházás fázisai: a döntést előkészítő munkálatok, azaz a versenyben lévő helyszínek részletes geo-

Szerkesztőség: 1121 Budapest, Konkoly Thege Miklós út 29–33., 31. épület, II. emelet, 315. szoba, Eötvös Loránd Fizikai Társulat. Telefon/fax: (1) 201-8682

A Társulat Internet honlapja <http://www.elft.hu>, e-postacíme: [mail.elft@gmail.com](mailto:mail.elft@gmail.com)

Kiadja az Eötvös Loránd Fizikai Társulat, felelős: Szatmáry Zoltán főszerkesztő.

Kéziratokat nem őrzünk meg és nem küldünk vissza. A szerzőknek tiszteletpéldányt küldünk.

Nyomdai előkészítés: Kármán Tamás, nyomdai munkálatok: OOK-PRESS Kft., felelős vezető: Szatmáry Attila ügyvezető igazgató.

Terjeszti az Eötvös Loránd Fizikai Társulat, előfizethető a Társulatnál vagy postautalványon a 10200830-32310274-00000000 számú egyszerűsített.

Megjelenik havonta, egyes szám ára: 800.- Ft + postaköltség.

HU ISSN 0015–3257 (nyomtatott) és HU ISSN 1588–0540 (online)

lógiai, szeizmológiai vizsgálata, ami várhatóan 2014–2015-ig tart. 2016–2017-re várható a helyszín kiválasztása, előkészítése, a részletes konkrét helyre történő tervezés. A döntésben a geológiai adottságokon túl fontos szerepet kap majd a fogadó állam kormányának, tudományt támogató szervezeteinek és kutatóinak összehangolt erőfeszítése. A szükséges alagútépítési munkálatok 2017–2018-ban kezdődhetnek, 2022-re várhatóan befejeződnek. A vákuumrendszer építése 2021-ben indulhat, a detektorok kiépítése 2023-tól, míg az első adatok mintegy 2025-től várhatók.

Kutatási és fejlesztési (K+F) lehetőségek a VIRGO és az ET projektekben: Mivel a két projekthez kapcsolódó kutatási és fejlesztési lehetőségek egymásra épülnek, célszerű először ezeket a VIRGO detektor kapcsán áttekintnünk. A VIRGO, a többi első generációs gravitációshullám-detektorhoz hasonlóan, 2014–2015-re éri majd el a második generációs detektorokra jellemző tízszeres érzékenységnövekedést, ami a megfigyelhető csillagászati események számát ezerszeresére növeli. E fejlesztés keretében a vákuumrendszeren és az optikai rendszeren kívül a vezérlő és adatgyűjtő elektronikai rendszert is felújítják. Az EGO konzorcium úgy döntött, hogy a VIRGO vákuumrendszer elemeinek elméleti modellezését, mérnöki tervezését, valamint gyártását és a VIRGO detektorba történő beépítését az MTA RMKI mérnökeinek bevonásával kívánja megoldani. A vákuumrendszer létesítésében való magyar részvétel mértéke megfelelő hazai pénzügyi források esetén, 20% önrész biztosításával lényegesen növelhető lehetne; minden egyes itthon befektetett magyar forint négy forint külföldi (EGO) megrendelést hozna. Így a létrehozott érték 20%-ánál jóval nagyobb része maradhatna a tervezésben és kivitelezésben érintett magyar mérnökknél és vállalkozásoknál.

A VIRGO detektor két lépcsőben elképzelt felújítása akkor ér véget, amikor az ET detektor vákuumrendszerének megépítése a kiválasztott európai helyszínen megkezdődik. Azok a hazai vállalatok, amelyek a VIRGO fejlesztésében részt vesznek, lényeges versenylőnnyel rendelkeznek majd az ET detektor közel 50 000 m<sup>3</sup> térfogatú vákuumrendszerének felépítésére kiírandó tenderben.

Ha nálunk valósulna meg az ET detektor, szinte elképzelhetetlen tudományos, műszaki, ipari és gazdasági húzóágazat megjelenését jelentené a szűkebb és tágabb régióban.

Geológiaiag nagyon stabil, kis szeizmikus zajjal terhelt környezetben, mélyen a föld alatt kell felépíte-

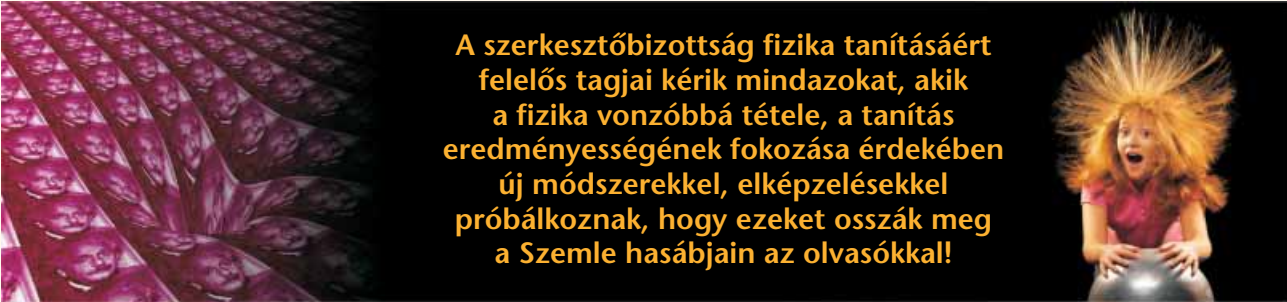
ni a 10 km oldalhosszúságú, 5 m átmérőjű alagutakból álló szabályos háromszög alakú alagútrendszert (lásd a címlapot). Az építkezés a Mátrában évszázadok óta folytatott bányászattal összemérhető mennyiségű nyersanyagkincset hozhat a felszínre, amely csak mellékterméke az érintett bányavállalatok mérnökeinek és bányászainak adott óriási megrendelésnek.

A kialakított járatokat betonozni kell, majd a vákuumrendszer elemeivel kell feltölteni. Ez magyar építőipari, valamint vákuum- és lézertechnikai megrendeléseket generál. Ezt követné Európa legpontosabb szeizmológiai állomásának kialakítása, majd a detektort felépítő optikai interferométerek rendszerének kialakítása. Mindez európai laboratóriumokban kifejlesztett, világszínvonalú technikai elemek Magyarországra történő telepítését, részben hazai kifejlesztését jelentené. A projekt ezen a ponton is kapcsolódik az MTA kutatóintézeteihez (RMKI, amely a hazai gravitációs kutatások központja, ATOMKI, Szilárdtestfizikai és Optikai Kutató Intézet) és egyetemeinkhez (ELTE, BME, Szegedi Egyetem). A detektor – a tervek szerint – öt évtizeden keresztül mér majd, és az időközben elért újabb technikai fejlesztések is megjelennének a detektornál.

A hasonló kaliberű nagyberuházások (mint például CERN LHC, grenoble-i nagyfluxusú neutronforrás stb.) tapasztalatai bizonyítják, hogy az ilyen volumenű csúcstervezések tervezése, építése és működtetése a környék gazdasági fejlődésének motorjává válik. A csúcstechnológiai fejlesztés helye világszínvonalú tudásközpontot hoz létre, építőipari és egyéb kiszolgáló munkahelyeket teremt a kis és közepes vállalkozásoknak is, a külföldi vendégkutatók ellátása a vendéglátóipar színvonalát és bevételeit növeli. Ezért is rendkívül figyelemreméltó az a tény, hogy a Föld mélyébe ágyazott Einstein Teleszkóp létesítésének helyszínéként, a gyönyörös elhagyott ércbányában végzett mérések alapján a Mátra is komolyan szóba került.

Ha nem a Mátrában valósulna meg az ET detektor, a korábban említett EGO–RMKI együttműködésben a vákuumtechnológiai elemek gyártásához szükséges fejlesztések önmagukban is hosszú távú, kedvező megtérüléssel járó K+F befektetésre adnak lehetőséget mind a VIRGO, mind pedig az ET detektorok kapcsán.

Az építkezések várható megkezdése *Eötvös Loránd* halálának centenáriumaival esik majd egybe, így a precíziós gravitációs mérései alapján méltán híressé lett magyar tudós nevével is összekapcsolódik az ET teleszkóp projekt.



**A szerkesztőbizottság fizika tanításáért felelős tagjai kérik mindazokat, akik a fizika vonzóbbá tétele, a tanítás eredményességének fokozása érdekében új módszerekkel, elképzelésekkel próbálkoznak, hogy ezeket osszák meg a Szemle hasábjain az olvasókkal!**

## Felhívás javaslattételre

A korábbi évekhez hasonlóan az idén is szándékunkban áll kiosztani az Eötvös Loránd Fizikai Társulat érmeit és díjait. Ezúton is kérem a Társulat szakcsoportjait, a területi szervezeteket és a Társulat valamennyi tagját, hogy a Társulat díjainak odaítélésére vonatkozó javaslataikat (pályázatukat) **2011. április 1-jéig** szíveskedjenek eljuttatni a Társulat titkárságára (1121 Budapest, Konkoly Thege Miklós út 29–33., 31. épület, II. emelet, 315. szoba).

A díjak odaítélésével kapcsolatban az Alapszabály vonatkozó rendelkezései az irányadóak, a díjak kiosztására az előreláthatóan 2011. májusban megrendezendő küldöttközgyűlés keretében kerül sor.

### Az Eötvös Társulat kitüntetései és díjai

#### Tudományos díjak

A Eötvös Loránd Fizikai Társulat az alábbi tudományos díjakat adományozhatja:

- **Bródy Imre**-díjat annak a személynek, aki a fizika alkalmazásának területén,
- **Budó Ágoston**-díjat annak a személynek, aki az optika, molekulafizika vagy a kísérleti fizika területén,
- **Detre László**-díjat annak a személynek, aki a csillagászatban, valamint bolygónkkal és annak kozmikus környezetével foglalkozó fizikai kutatások területén,
- **Gombás Pál**-díjat annak a személynek, aki az alkalmazott kvantumelmélet kutatása területén,
- **Gyulai Zoltán**-díjat annak a személynek, aki a szilárdtestfizika területén,
- **Jánossy Lajos**-díjat annak a személynek, aki az elméleti és kísérleti kutatások területén,
- **Novobáczky Károly**-díjat annak a személynek, aki az elméleti fizikai kutatások területén,
- **Schmid Rezső**-díjat annak a személynek, aki az anyag szerkezetének kutatása területén,
- **Selényi Pál**-díjat annak a személynek, aki a kísérleti kutatás területén,

- **Szalay Sándor**-díjat annak a személynek, aki az atom- vagy atommag-fizikában, illetve ezek interdiszciplináris alkalmazási területén,

- **Szigeti György**-díjat annak a személynek, aki a lumineszcencia- és félvezető-kutatások gyakorlati alkalmazásában,

- **Bozóky László**-díjat annak a személynek, aki a sugárfizika és a környezettudomány területén,

- **Felsőoktatási Díjat** annak a személynek, aki a felsőoktatás területén kimagasló eredmény ért el.

#### Társulati díjak

- **Eötvös Loránd Fizikai Társulat Érem** a Társulat azon tagjának adható, aki a fizika területén hosszú időn keresztül folytatott kutatási, alkalmazási vagy oktatási tevékenységével és a Társulatban kifejtett munkásságával kiemelkedően hozzájárult a fizika hazai fejlődéséhez.

- A Társulat **Prometheusz** éremmel – „A fizikai gondolkodás terjesztéséért” – tüntetheti ki azt, aki a fizikai műveltség fokozásához országos hatással hozzájárult.

- A Társulat **Eötvös Plakett** emléktárgya annak a tagnak/személynek ítélhető oda, aki

rendkívüli mértékben nyújt segítséget a Társulat célkitűzéseinek megvalósításához, neves külföldi vendégnek a Társulat valamely rendezvényén tartott előadása alkalmából.

A Társulat díjaira az Alapszabály szerint a Társulat szakcsoportjai és területi szervezetei, valamint a Társulat tagjai tehetnek javaslatot, de minden társulati tag maga is pályázhat a díjakra. A díjak elnyerésének a társulati tagság nem feltétele. A javaslatokat és a pályázatokat az illetékes szakcsoportok véleményével együtt a [www.elft.hu](http://www.elft.hu) weblapról letölthető, vagy a titkárságon beszerezhető űrlap felhasználásával kell a Társulat titkárságára eljuttatni.

A díjazottak személyéről a Díjbizottság javaslatára a Társulat Elnöksége dönt.

Kádár György főtitkár







## EÖTVÖS LORÁND FIZIKAI TÁRSULAT

A MŰSZAKI ÉS TERMÉSZETTUDOMÁNYI  
EGYESÜLETEK SZÖVETSÉGÉNEK TAGJA

1121 Budapest, Konkoly Thege Miklós út 29–33.,  
31. épület, II. emelet, 315. szoba  
Levelezési cím: 1371 Budapest, PF. 433  
Telefon: 201-8682, Fax: 201-8682  
E-mail: elft@elft.hu, Honlap: <http://www.elft.hu>

### Tájékoztató az Eötvös Loránd Fizikai Társulat 2011. évi tagdíjairól

#### Tisztelt Kollégák!

Mindenek előtt szeretném tolmácsolni a Társulat elnökségének üdvözlését és újrakezdését a Társulat tagjainak, a fizika barátainak és a *Fizikai Szemle* valamennyi olvasójának. Biztosíthatom Önöket, hogy a Társulat és a *Fizikai Szemle* az idén is változatlan erővel kívánja megvalósítani mindazokat a feladatokat, amelyek betöltésére Alapszabályában vállalkozott. Bár a Társulat működését érintő költségek várhatóan idén is növekednek, az adott helyzetben a társulati tagdíjakon az Elnökség mégsem változtatott. Kérem, hogy a 2011. évre vonatkozó tagdíjukat az alábbiak figyelembevételével, a mellékelt csekkkel szíveskedjenek befizetni.

Ha Ön a Társulatunk rendes tagja, akkor a 2011. évi tagdíja **7.300,- Ft.**

Ha Ön a Társulatnak rendes tagjaként általános vagy középiskolai tanár, akkor évi tagdíja **730,- Ft** alaptagdíj + **6.570,- Ft** kiegészítő tagdíj, azaz összesen **7.300,- Ft.** (Az alap- és kiegészítő tagdíjat együtt kérjük befizetni.)

Ha Ön nyugdíjasként rendes tagja a Társulatnak, 2011. évi tagdíja **2.500,- Ft.** Ezúttal is kérem azokat a nyugdíjas korú tagjainkat, akik nyugdíjuk mellett teljes munkaviszonnyal vagy közalkalmazotti jogviszonnyal rendelkeznek, hogy a tagdíjfizetés szempontjából ne tekintsek magukat nyugdíjasnak!

Ha Ön tanulmányait végzi (felsőoktatási intézmény hallgatója) és munkaviszonnyal nem rendelkezik, vagy középiskolai tanuló, akkor kedvezményes tagdíja **3.200,- Ft.**

Kérem, hogy tagdíjukat mielőbb szíveskedjenek rendezni. A tagjainknak tagsági jogon járó *Fizikai Szemle* folyamatos küldését csak azok számára tudjuk biztosítani, akik 2011. évi tagdíjukat rendezték. Felhívom ugyanakkor szíves figyelmüket arra a lehetőségre, hogy tagdíjuk megfizetését esetleg munkahelyük is átvállalhatja.

Az EPS-be a továbbiakban csak egyéni tagként lehet belépni. **Kérem a kollégákat, hogy a hazai fizika megfelelő képviselője érdekében az EPS-be minél nagyobb számban lépjenek be.**

#### **Felhívás tagjainkhoz és a fizika minden barátjához!**

Tájékoztatom a Társulat tagjait és a *Fizikai Szemle* olvasóit, hogy a 2009. évről szóló jövedelemadó-bevalláshoz kapcsolódó felajánlások révén a Társulat 2010-ben **959.191,- Ft** bevételhez jutott, amit a korábbi évekhez hasonlóan, teljes egészében a *Fizikai Szemle* megjelentetési költségeinek részbeni fedezeteként használtunk fel. E támogatás tette lehetővé többek között azt is, hogy tagjaink folyamatosan megkaphatták társulatunk folyóiratát, amiért köszönetünket fejezzük ki a Társulat javára rendelkezőknek. Kérem a fizika minden barátját, ha teheti, az idén is rendelkezék személyi jövedelemadója 1%-ának a Társulat céljaira való felajánlásáról, és buzdítsa erre barátait, ismerőseit is. Az Eötvös Loránd Fizikai Társulat nyilatkozaton feltüntetendő **adószáma 19815644-2-41.**

Budapest, 2011. január hó

Tisztelettel:

Kádár György főtitkár