PROBLÉMAMEGOLDÁS A FIZIKÁBAN

Wiedemann László
Budapest

A következő tanulmány célja kettős: egy konkrét fizikai probléma bemutatása és elemzése, másrészt ismert tanítási-módszertani eljárások bemutatása a tárgyalásra kerülő probléma által. Tekinthető a fizikai probléma oly módon is, hogy modellként szolgál a tanítási-módszertani elvekhez – jelenleg nem középiskolás nívón.

A tanulás szűk, de fontos sávja a problémamegoldás: hogy a középiskolások tanulnak-e órán, illetve szakkörön, vagy átfogóbb tanulásról, magasabb szintű elemzésekről van szó, a tanulás ezen sávján, vagyis a problémamegoldás területén nem a lényegi, csupán a fokozati különbség érvényesül. A sorra kerülő módszertani elvek érvényesítése lehetővé teszi, hogy egy csokorba köthessünk különböző mélységben tárgyalt konkrét fizikai jelenségeket. A módszertani tudás külön kísérője lehet a szakmai tudásnak. Elérhető ezzel, hogy világosan prezentálják a szakanyagot. E tekintetben tanuló, tanár, vagy művelt érdeklődő kedvvel járhatja a módszertani tudás lépcsőit.

A következőkben fontosnak tartott módszertani momentumokat emelünk ki, amelyek a soron következő probléma kezelésében, annak megoldásában is alkalmazást nyertek.

- Egy gondolatsor elején már exponálni kell egy minimumszintet a tárgyalásban, amely meghatározza a feldolgozás mélységét. Például az ismeretterjesztés lehet a minimumszint.
- A kérdést az esetleges kezdeti numerikus megközelítésen túl általánosságban is fel kell tenni.
- Alkalmazzunk kezdő lépésként kvalitatív bevezetést, ami a fogalom pontos körülírására késztet.
- A problémamegoldás központi eleme a matematikai áttét, azaz a matematikai megfogalmazás és tárgyalás.
- Először csak egy megoldást kell kidolgozni, és ezt szigorú matematikai eszköztárral. Ezen belül ajánlatos eljárások lehetnek:

– A megoldás diszkussziója, először matematikai diszkusszió, majd ennek alapján a fizikai kép megalkotása. Ez az egyes paraméterek fizikai értelmezésével, szerepük felismerésével történik. Az eredményeket – ha csak lehet – tegyük szemléletessé, vizuálisan is, rajzban is.

– Fontos a korrespondenciák vizsgálata. Ezen az értendő, hogy a paraméterek kritikus értékeivel, vagy azok határértékei mellett az adott probléma átmegy a megfelelő analóg, egyszerűbb problémába és a limesvétel után a megoldás is annak megoldásába. Például súrlódás lejtőn, ezután $\mu \to 0$.

- A modellben való gondolkodás hangsúlyozása fokozza a realitásélményt. Mindig lehatárolt körülmények között vizsgálhatunk adott problémát: a fő ágensek figyelembe vételével és a kisebb zavaró hatások kiiktatásával. Így jön létre a modell, ami a valóság lényegkiemelő torzítása. A modellen keresztül jut el a valóság tudatunkba és így ismereteink dinamikus elemet tartalmaznak. A modellszemléletben hangsúlyozni kell, hogy a tőlünk független, objektív valóságról szerzünk nem végleges ismeretet. A fizikában való előrehaladás közben tanácsos, ha távol tartjuk magunkat a pozitivista attitűdöktől. *Planck* ezt úgy fejezi ki, hogy „hipotézist kell alkotnunk, amely szerint nem élményeink alkotják a világot, ezek csupán hírnökei egy másik világnak”, az objektív külvilágnak. Érdemes megmutatni, hogy a modellszemléletnek ilyen filozófiai vetületei is vannak.
- Térjünk vissza az adott (komplex) problémára más oldalról is! Keressünk új megoldást és mutassuk ki, hogy ez azonos az elsővel. Megerősítő hatása van ennek az eljárásnak és egyben esztétikai élményt nyújt.
- Diszkutálni kell, hogy a megoldás egzakt, vagy közelítő megoldás, és a közelítés matematikai, numerikus, vagy a fizikai megközelítés tartalmaz megszorító hipotéziseket. Tehát vizsgálni kell az elhanyagolások jogosságát.

Hőtani problémák

I. probléma

Egy l hosszúságú, vízszintes helyzetű zárt csőben kezdetben p_1 nyomású és T_1 hőmérsékletű ideális gáz foglal helyet. A cső fala hőszigetelt. A gázt melegíteni kezdjük oly módon, hogy a cső egyik végét T_2, a másik végét T_1 hőmérsékleten tartjuk ($T_2 > T_1$).

Ha elég sokáig várunk, stacionárius állapot jön létre, vagyis a gázt jellemző paraméterek időfüggése eltűnik. Ez esetben a hővezetési egyenlet megoldásából az adódik, hogy a hőmérséklet a cső mentén lineárisan oszlik el.

Elegendő hosszú ideig várva, milyen nyomás- és sűrűségeloszlás alakul ki a cső mentén? (Legyen például T_1 = 273 K és T_2 = 373 K.)

Megoldás

Helyezzük el az x-tengelyt a cső mentén! Így a peremfeltételek: x = 0 és l közötti értékeket vehet fel, $T(x=0) = T_2$, $T(x=l) = T_1$. Ezekkel a jelenlegi hőmérséklet-eloszlás:

$$T(x) = T_2 - \frac{T_2 - T_1}{l}\,x. \tag{1}$$

Felhasználva a

$$p\,V = \frac{m}{M}\,R\,T$$

állapotegyenletet, a gáz sűrűsége a melegítés előtti állapotban:

$$\rho_1 = \frac{M}{R}\,p_1\,\frac{1}{T_1}, \tag{2}$$

ahol p_1 a gáz nyomása a kiinduló állapotban. A felmelegített, stacionárius állapotban lévő gázra tetszőleges x helyen a cső egy vékony szeletére az állapotegyenlet:

$$p_2\,dV = \frac{dm}{M}\,R\,T(x),$$

mivel

$$\rho = \frac{dm}{dV},$$

ezért a sűrűségeloszlás:

$$\rho(x) = \frac{M}{R}\,p_2\,\frac{1}{T(x)}. \tag{3}$$

Itt p_2 a stacionárius állapotban a gáz új nyomása. p_2 az x helytől független állandó, hiszen stacionárius állapotban a gáztérben nem lehet áramlás, a hely szerint változó nyomás pedig részecskeáramot hozna létre.

Az új, p_2 nyomás kiszámításához még írjuk fel, hogy a gáz m tömege állandó, azaz a kezdő és a végállapotban megegyezik:

$$m = A\,l\,\rho_1 = \int_0^l A\,\rho(x)\,dx,$$

ahol A a cső keresztmetszete. A (2) és (3) egyenlet alapján:

$$A\,l\,\frac{M}{R}\,\frac{p_1}{T_1} = A\,\frac{M}{R}\,p_2\int_0^l \frac{1}{T(x)}\,dx,$$

egyszerűsítve és behelyettesítve $T(x)$ értékét az (1) egyenletből, kapjuk:

$$p_2\int_0^l \frac{1}{T_2 - \dfrac{T_2 - T_1}{l}\,x}\,dx = \frac{p_1\,l}{T_1}.$$

Az integrál kiszámítása után a keresett p_2 nyomás:

$$p_2 = \frac{p_1}{T_1}\,\frac{T_2 - T_1}{\ln\left(\dfrac{T_2}{T_1}\right)}.$$

p_2 értékét a (3)-ba helyettesítve, felhasználva $T(x)$-et leíró (1) egyenletet, megkapjuk a kérdezett $\rho(x)$ sűrűségeloszlást:

$$\rho(x) = \frac{M}{R}\,\frac{p_1}{T_1}\,\frac{T_2 - T_1}{\ln\left(\dfrac{T_2}{T_1}\right)}\,\frac{l}{(l - x)\,T_2 + x\,T_1}.$$

$T_2 \to T_1$ esetben, tehát amikor a cső mindkét vége azonos hőmérsékletű, a L'Hospital-szabályt alkalmazva $p_2 \to p_1$ és $\rho(x) \to \rho_1$, ahogy lennie is kell.

II. probléma

Adott a stacionárius állapot $T(x)$ hőmérséklet-eloszlással. Ezután a csővégeket is hőszigeteljük, így az egész cső hőszigetelt lesz. Mekkora lesz a beálló egységes hőmérséklet?

Megoldás

Felírjuk a Δx egyenlő hosszúságú szeletek ΔU belső energiáit

$$\Delta U = \frac{f}{2}\,p_2\,\Delta V,$$

ahol f a gáz szabadsági foka. Összegezve kapjuk a

$$U = \frac{f}{2}\,p_2\,V$$

teljes energiát. Minthogy U változatlan marad miközben beáll az új hőmérséklet, ezért az új p_3 nyomás is marad p_2. Ezután a T_1 hőmérsékletű kezdő és a mostani T_3 hőmérsékletű végállapotra is felírjuk az állapotegyenletet:

$$p_1\,V = \frac{m}{M}\,R\,T_1,$$

$$p_3\,V = \frac{m}{M}\,R\,T_3.$$

A kettőt egymással elosztva, valamint kihasználva, hogy $p_3 = p_2$ és p_2 értéket behelyettesítve kapjuk:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{p_1}{T_1}\,\frac{T_2 - T_1}{\ln\left(\dfrac{T_2}{T_1}\right)}\,\frac{1}{p_1} = \frac{T_3}{T_1}$$

és innen az új egyensúlyi hőmérséklet:

$$T_3 = \frac{T_2 - T_1}{\ln\left(\dfrac{T_2}{T_1}\right)},$$

amelyre természetesen igaz, hogy $T_1 < T_3 < T_2$.

Az eredeti $T_1 = 273$ K és $T_2 = 373$ K hőmérsékletadatokkal:

$$T_3 = \frac{373 - 273}{\ln\left(\dfrac{373}{273}\right)}\ \mathrm{K} = 320{,}4\ \mathrm{K}.$$

További elemzések

Egy paradox helyzet

Az előbbiekben arra jutottunk, hogy a ρ sűrűség stacionárius állapotban helyfüggő. Ugyanez látható az állapotegyenlet $p = nkT$ alakjából is, mivel p állandó és $T = T(x)$, az n térfogat-koncentráció pedig ρ-val arányos. Ha n helyfüggő, a diffúzió törvényei következtében belső diffúziónak kellene fellépnie, ami viszont már nem stacionárius állapot. Jelenleg stacionárius állapotban hőáram van, de részecskeáram nem lehet. A magyarázat az lehet, hogy *Fick* II. törvénye szerint az $n_t = D n_{xx}$-ben most időfüggés nem lévén $n_t = 0$, így az $n_{xx} = 0$ differenciálegyenletből $n(x)$ lineáris függvény lenne, de ez mégsem biztosítja a (3) egyenletbeli $\rho(x)$ konkrét alakját. E paradoxon végülis így nem szűntethető meg.

Az irreverzibilis termodinamika Onsager-féle relációi adnak magyarázatot. A vezetési egyenletek írják le a jelenségeket. Jelenleg energiaáramról és részecskeáramról van szó. A bevezetett termodinamikai erők együttesen szabják meg a hőáramot és a részecskeáramot. A jelenség hasonlít a termodiffúzióhoz, mivel az egyes áramokat T és n gradiensei hozzák létre, amelyek a termodinamikai erőket szolgáltatják. Most azonban éppen azt kell kikötni, hogy nincs diffúzió, bár grad$n$ nem zérus. E furcsa helyzetet megengedik a vezetési egyenletek. *Onsager* szerint a vezetési egyenletek a részecske- és az energiaáramra:

$$j_n = -L_{11}\,\Delta\left(\frac{\mu}{T}\right) + L_{12}\,\Delta\left(\frac{1}{T}\right),$$

$$j_u = -L_{21}\,\Delta\left(\frac{\mu}{T}\right) + L_{22}\,\Delta\left(\frac{1}{T}\right),$$

ahol j_n és j_u a megfelelő áramsűrűségek, $T = T(x)$ a hőmérséklet, μ a kémiai potenciál, a Gibbs-féle szabad entalpia és az L_{ik} együtthatók az Onsanger-féle vezetési együtthatók. Látható, hogy mindkét termodinamikai erő egyszerre határozza meg az áramokat. Így ez a termodiffúzió esete. A mostani problémára ennek speciális esete vonatkozik. Kikötjük, hogy a j_n részecskeáram zérus legyen, és ez az egyenletek alapján lehetséges. Mivel most $j_n = 0$, ezért μ-nek függnie kell a T hőmérséklettől. Ezen feltételt j_n egyenletébe téve, kiszámítható a stacionárius hőáramsűrűség, amely képletben:

$$j_u = \frac{D}{L_{11}}\,\Delta\left(\frac{1}{T}\right),$$

itt D az L_{ik} Onsager-együtthatókból adódó determináns.

A probléma vizsgálata az entrópiaelvvel

Amikor a csőben lévő gázt teljesen elszigeteljük a környezettől, a $T(x)$ lineáris hőmérséklet-eloszlás megváltozik és a gáztérben beáll egy egyensúlyi, helytől független hőmérséklet. Ezt jelöltük T_3-mal és az adódott, hogy

$$T_3 = \frac{T_2 - T_1}{\ln\left(\dfrac{T_2}{T_1}\right)}.$$

Ezt kívánjuk meghatározni az entrópiaelvvel. A rendszer S entrópiájának maximuma adja az egyensúlyi állapotot. Helyesnek látszik az a módszertani alapozás, hogy először három testet hozunk termikus kapcsolatba, midőn együttesen mindvégig hőszigeteltek maradnak környezetüktől.

Ha T_0-t választjuk alappontnak, az entrópia

$$S = \int_{T_0}^{T} \frac{dQ}{T}$$

definíciójából nyerjük az egyes testekre, hogy

$$S = a\ln\left(\frac{\tau_1}{T_0}\right),$$

ahol $a = Cm$ a hőkapacitás és τ_1 a test tetszőleges hőmérséklete, továbbá b, c és τ_2, τ_3 rendre a másik két test hőkapacitásai, illetve tetszőleges hőmérsékletei. Az entrópia most háromváltozós $S(\tau_1,\tau_2,\tau_3)$ függvény, és teljesül az a mellékfeltétel, hogy a testek összes K energiája nem változhat. Ezután így szól a feladat: többváltozós függvény szélsőértékét (maximumát) kell meghatározni adott feltétel mellett, azaz többváltozós függvény feltételes szélsőértékét keressük a Lagrange-féle multiplikátor-módszerrel. Tehát az

$$S(\tau_1, \tau_2, \tau_3) + \lambda\,\varphi(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$$

szélsőértékét keressük, midőn $\varphi(\tau_1,\tau_2,\tau_3)$ a feltételi egyenlet. Írjuk fel az összes energiát a kezdő állapotban és egy tetszőleges állapotban

$$a\left(T_1 - T_0\right) + b\left(T_2 - T_0\right) + c\left(T_3 - T_0\right) = K,$$

ahol a, b, c a testek hőkapacitásai, T_1, T_2, T_3 a kezdeti hőmérsékletek. A φ feltételi egyenlet:

$$\varphi(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = a\left(\tau_1 - T_0\right) + b\left(\tau_2 - T_0\right) + c\left(\tau_3 - T_0\right) - K.$$

Képezve a parciális deriváltakat, bevezetve a

$$f_{\tau_1} = \frac{\partial\varphi}{\partial\tau_1},\quad f_{\tau_2} = \frac{\partial\varphi}{\partial\tau_2},\quad f_{\tau_3} = \frac{\partial\varphi}{\partial\tau_3}$$

jelöléseket,

$$f_{\tau_1} = \frac{a}{\tau_1} + \lambda\,a,\quad f_{\tau_2} = \frac{b}{\tau_2} + \lambda\,b,\quad f_{\tau_3} = \frac{c}{\tau_3} + \lambda\,c.$$

Egyensúlyban

$$f_{\tau_1} = 0,\quad f_{\tau_2} = 0,\quad f_{\tau_3} = 0,$$

ebből adódik, hogy $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3$.

Nem kellett külön feltenni, hogy közös hőmérséklet alakul ki, ez az entrópiatételből, vagyis a II. főtételből matematikailag következik. Számítsuk ki a T_k közös hőmérsékletet. Vegyük figyelembe a $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = T_k$ eredményt:

$$T_k(a+b+c) - T_0(a+b+c) =$$
$$= a\,T_1 + b\,T_2 + c\,T_3 - T_0(a+b+c),$$

ebből

$$T_k = \frac{a\,T_1 + b\,T_2 + c\,T_3}{a+b+c},$$

azaz a közös T_k értéke a kezdő hőmérsékletek egyes hőkapacitásokkal súlyozott átlaga.

Áttérve most eredeti – mekkora az egyensúlyi hőmérséklet – kérdésünkre, osszuk fel a gázt tartalmazó csövet n darab egyenlő vastagságú vékony szeletre. Ekkor az i-edik szeletben lévő gáz tömege Δm_i, a fajhők azonosak, azaz $c_i = c_v$ végállapoti fajhő, viszont a $c_v \Delta m_i$ hőkapacitások különbözőek. A számítás menete azonos az előbbivel, csak most n változós az előbbi f függvény, az S entrópiakifejezés azonos a már felírt S függvénnyel, mivel a térfogat változatlansága mellett ideális gázra

$$S = c_v\, m \ln\left(\frac{T}{T_0}\right).$$

A T_k közös hőmérséklet az egyes szeletek T_i $(1 \le i \le n)$ kezdő hőmérsékleteinek a szelet $c_v \Delta m_i$ hőkapacitásával súlyozott átlaga, azaz

$$T_k = \frac{\sum_{i=1}^{n} c_v\,\Delta m_i\, T_i}{\sum_{i=1}^{n} c_v\,\Delta m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i\, T_i}{m}.$$

Itt felhasználtuk, hogy az egyes szeletek Δm_i tömegének összege megegyezik a gáz teljes m tömegével.

Fejezzük most ki az egyes Δm_i tömegeket a $\rho(x)$ sűrűség és az állapotegyenlet segítségével

$$\Delta m_i = A\,\rho(x_i)\,\Delta x,$$

$$\Delta m_i = \frac{A\,M}{R}\,P_2\,\frac{1}{T(x_i)}\,\Delta x,$$

$$\Delta m_i = \frac{\alpha}{T(x_i)}\,\Delta x.$$

Itt x_i az i-edik szelet koordinátája. Vezessük be a $T(x_i) = T_i$ jelölést, így

$$T_k = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha}{T_i}\,\Delta x\, T_i}{\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha}{T_i}\,\Delta x} = \frac{\alpha}{m}\,l,$$

hiszen az elemi Δx szakaszok összege megegyezik a cső l hosszával és a nevezőben szereplő elemi tömegek összege a gáz teljes tömegével.

A kezdő állapotra felírt

$$P_1\,V = \frac{m}{M}\,R\,T_1$$

állapotegyenletből az m tömeg kifejezhető.

$$\alpha = \frac{A\,M}{R}\,P_2$$

értéket behelyettesítve a közös hőmérsékletre

$$T_k = T_1\,\frac{P_2}{P_1}$$

kifejezést kapjuk, ahol a p_2 nyomás értékét már korábban meghatároztuk. Azt behelyettesítve

$$T_k = \frac{T_2 - T_1}{\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)}$$

lesz a közös (korábbi jelöléssel T_3) hőmérséklet. Így az entrópiaelv alapján határoztuk meg a csőben lévő gáz hőmérsékletének végső, T_k értékét.

Megjegyzés

T_k utolsóként felírt szummációs képlete matematikailag súlyozott átlag, az egyes súlyok értéke α/T_i. Ha $\Delta x \to 0$, akkor diszkrét helyett immár folytonos súlyozott átlagról beszélhetünk

$$\varphi(x) = \frac{\alpha}{T(x)}$$

súlyfüggvénnyel, a szummázás pedig integrális alakot ölt:

$$T_k = \frac{\int_0^l \varphi(x)\,T(x)\,dx}{\int_0^l \varphi(x)\,dx},$$

ami természetesen ugyanarra a T_k-ra vezet.

Szerkesztőség: 1027 Budapest, II. Fő utca 68. Eötvös Loránd Fizikai Társulat. Telefon/fax: (1) 201-8682
A Társulat Internet honlapja http://www.elft.hu, e-postacíme: mail.elft@mtesz.hu
Kiadja az Eötvös Loránd Fizikai Társulat, felelős: Szatmáry Zoltán főszerkesztő.
Kéziratokat nem őrzünk meg és nem küldünk vissza. A szerzőknek tiszteletpéldányt küldünk.
Nyomdai előkészítés: Kármán Tamás, nyomdai munkálatok: OOK-PRESS Kft., felelős vezető: Szathmáry Attila ügyvezető igazgató.
Terjeszti az Eötvös Loránd Fizikai Társulat, előfizethető a Társulatnál vagy postautalványon a 10200830-32310274-00000000 számú egyszámlán.
Megjelenik havonta, egyes szám ára: 780.- Ft + postaköltség.
HU ISSN 0015–3257 (nyomtatott) és **HU ISSN 1588–0540** (online)