NUMERIKUS MÓDSZEREK A DIÁKKÖRI MUNKÁBAN

Eichhardt Iván, Jaloveczki József
Szent László Általános Művelődési Központ Gimnáziuma, Baja

„Az ismert dolgok végesek, az ismeretlenek végtelenek; szellemünk egy kis szigetecskén áll a megmagyarázhatatlan dolgok végtelen óceánjának közepén. Valamennyi generációnak az a dolga, hogy meghódítson még egy kis szigetet."
(*Thomas H. Huxley*)

Diákkörünk

Diákkörünk 1999-ben alakult a bajai Szent László Általános Művelődési Központban, Mandelbrot Tudományos Diákkör néven. Első terveink közé tartozott a fraktálok megismerése. Később a program kibővült fizikai és más természeti jelenségek számítógépes modellezésével. Elsősorban a természettudományokat, matematikát, számítógépes programozást kedvelő tanulók jelentkeznek. A végzett diákköröseink nagy része műszaki, tudományos pályát választ.

Miért használunk numerikus módszereket?

A középiskolában tanult természettudományos tárgyak, köztük elsősorban a fizika gyakran használ differenciálegyenleteket a mozgások, jelenségek időbeli változásának leírására. Ha valós problémákkal szeretnénk szakkörön, diákkörön foglalkozni, akkor az elméleti leírás, de főleg annak egzakt megoldása meghaladja a középiskolában elsajátítható matematikát. Még a matematikában jeleskedő tanulók sem jutnak tovább néhány egyszerű, szeparálható közönséges differenciálegyenlet analitikus megoldásánál. A differenciál- és integrálszámítás alapjainak elsajátítása után a felsőbb éves érdeklődő diákok elegendő matematikai és informatikai tudással bírnak ahhoz, hogy néhány numerikus módszer alkalmazásával oldjanak meg a valós életből vett természettudományos problémát. A kapott eredményeket, grafikonokat célszerű összevetni a tényleges megfigyeléssel, méréssel kapott adatokkal.

Milyen módszereket használunk?

Közönséges, első- és másodrendű lineáris (időnként nemlineáris) differenciálegyenletek megoldására különféle numerikus módszerek léteznek. A diákkörön ezek közül három módszert alkalmazunk. Ezeket szeretnénk most egyszerű példákkal ismertetni.

A cikk a 2009. augusztus 27–29. között a *Fizika tanítása tartalmasan és érdekesen* nemzetközi konferencián szekció-előadásként elhangzott *Numerikus módszerek a diákkörön* (előadó: Jaloveczki József) alapján készült. A szerzők köszönik *Tél Tamás* (ELTE, Elméleti Fizika Tanszék) professzor úr hasznos tanácsait, útmutatásait.

Euler-módszer

Ismerve y_n értékét az x_n pontban (vagy t_n pillanatban), keressük y_{n+1} értékét az $x_{n+1} = x_n + h$ pontban (vagy $t_{n+1} = t_n + dt$ pillanatban), ahol h, illetve dt ismert.

Legegyszerűbb megoldásnak a Taylor-sorfejtést választhatjuk és y_{n+1}-et sorba fejtjük az x_n pont (t_n pillanat) körül és az első két tagot tekintjük:

$$y_{n+1} = y(x_n + h) = \\ = y(x_n) + h\,y'(x_n) + h^2\,\frac{y''(x_n)}{2} + \ldots \tag{1}$$

$$y_{n+1} - y_n = \Delta_{n+1} = h\,y' + O(h^2) \tag{2}$$

ahol $O(h^m)$ olyan hibatagot jelent, mely h-ban m-ed rendű.

Megállapodás szerint m-ed rendűnek nevezzük a módszert, amennyiben a hibatag $O(h^{m+1})$ típusú. Ennek értelmében az Euler-módszer elsőrendű. Az egy lépésben elkövetett hiba h^2 rendű. Így az időbeli változásokat leíró mennyiségre kapott rekurziós formula:

$$y_0 := y(t=0), \\ y_{n+1} := y_n + \Delta t\,y'(t_n, y_n). \tag{3}$$

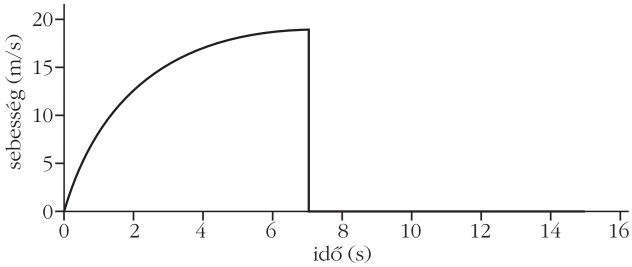
Példa

Ejtőernyős mozgása a gravitációs erő és a sebességgel arányos fékezőerő hatására:

$$\sum F = m \cdot a = F_{grav} - F_{fék}, \tag{4}$$

$$a = \ddot{y} = g - \frac{c}{m}\,\dot{y}. \tag{5}$$

Rekurziós formula a sebességre a (3) alapján:



1. ábra. Egy 100 m magasból, kezdősebesség nélkül zuhanó „ejtőernyős” sebessége Euler-módszerrel ábrázolva a sebességgel arányos közegellenállás esetén, időlépés: dt = 0,0005 s.

$$v_0 = 0,$$
$$v_{n+1} = v_n + a_n \Delta t. \tag{6}$$

Analitikus megoldás $\dot{y}$-ra, vagyis az ejtőernyős sebességére (5) alapján:

$$v(t) = \dot{y} = \frac{m\,g}{c}\left(1 - e^{-\frac{c}{m}t}\right). \tag{7}$$

A megfelelő paraméterek (c, m) és a kezdeti feltétel megadásával a sebesség Euler-módszerrel és analitikusan is ábrázolható. A földre érkezést a sebesség zérusra csökkenése jelzi. Az (5) mozgásegyenlettel jellemezhető esés sebességét Euler-módszerrel a (6) szerint ábrázoltuk (*1. ábra*), az általunk választott paraméterek: c = 0,5 kg/s, m = 1 kg, $y(t{=}0)$ = 100 m.

A mozgásegyenlet numerikus és analitikus megoldása ilyen kicsi (dt = 0,0005 s) időközöket tekintve nem mutat jelentős eltérést a mozgás sebességére és a leérkezés idejére a fenti paraméterek esetén. A sebességre kapott értékek a számolás időlépésének növelésével már jelentős eltérést mutatnak a kétféle eljárásnál (*2. ábra*).

A módosított Euler-módszer

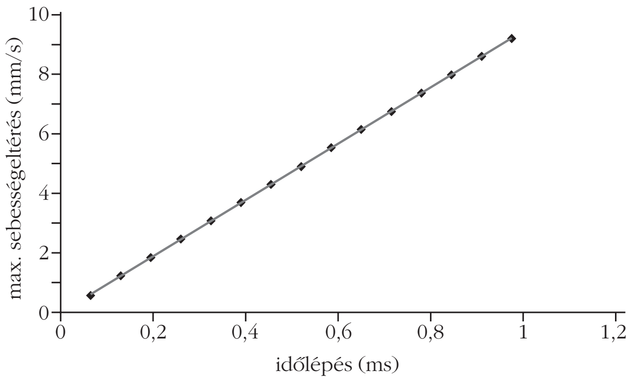
Az Euler-módszerben a test mozgását úgy írjuk le, hogy az új helykoordináta a réginek és a sebesség dt-szeresének az összege. A sebességet az intervallum elején lévő értéknél állandónak vettük. Ehhez képest pontosabb a módszer, ha az intervallum közepén vett értékkel, azaz az időközre vett átlagsebességgel számolunk. Ezt a módszert a Nobel-díjas *Feynman* is használta a dinamikai egyenletek numerikus megoldásánál [1].

$$x(t+dt) = x(t) + dt\,\dot{x}(t+dt/2),$$
$$\dot{x}(t+dt/2) = \dot{x}(t-dt/2) + dt\,\ddot{x}(t). \tag{8}$$

A számolás első és utolsó lépéseként Euler módszerét alkalmazzuk.

Példa

Lánc lecsúszása vízszintes asztalról [2]. Egy sima vízszintes asztalról l hosszú lánc csúszik le. Az egyenlet felírásakor és megoldásakor egyszerűsítésként úgy tekintjük, mintha a lánc egy – az asztal peremére hajlított – csőben csúszna. A mozgás kezdetekor a láncnak már l_0 hosszú része csúszott le az asztalról. A láncra minden időpontban az asztalról addig a pillanatig lecsúszott x hosszúságú láncdarab súlyával egyenlő F erő hat. Ha az egész lánc súlya G, a következő arányt kapjuk:



2. ábra. Az „ejtőernyős” sebességének maximális eltérése az analitikus megoldás és az Euler-módszerrel történt számolás között, az időköz növelésével.

$$\frac{F}{G} = \frac{x}{l}. \tag{9}$$

Ezen kívül hat az asztallal való súrlódási erő, ami az asztalon lévő rész súlyával arányos:

$$F_s = k\,\frac{m\,g}{l}(l - x). \tag{10}$$

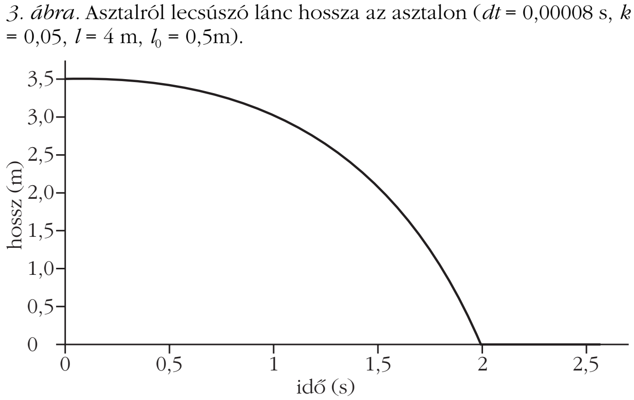
Newton II. törvényével állandó együtthatós, másodrendű (lineáris) differenciálegyenletet kapunk (9) és (10) alapján:

$$\ddot{x} - \frac{g}{l}(1 + k)\,x + g\,k = 0. \tag{11}$$

A mozgásegyenletet a (8) módszer szerint numerikusan megoldva ábrázoltuk a lánc asztalon lévő részének hosszát (*3. ábra*) és a lecsúszó lánc sebességét (*4. ábra*) az idő függvényében.

A lánc mozgásegyenletét (11) megoldottuk a (6) módszerrel is, amikor is az intervallum elején kapott sebességet vesszük állandónak (Euler-módszer). Az asztalon lévő lánchosszakat összehasonlítottuk a (8)

3. ábra. Asztalról lecsúszó lánc hossza az asztalon (dt = 0,00008 s, k = 0,05, l = 4 m, l_0 = 0,5m).



módosított Euler-eljárással kapott értékekkel. A lánchosszak maximális különbségei a lépésköz (*dt*) növekvő értékeivel lineárisan nőnek, ahogy ezt az *5. ábra* mutatja.

A negyedrendű Runge-Kutta-módszer

A numerikus módszerek szakirodalmában gyakran alkalmazott eljárás [5]. A módszer lényege segédváltozókkal kifejezett rekurziós formula az egyenletben szereplő változók időbeli fejlődésének számolására. A segédváltozók kifejezésében h a lépésköz (intervallum), és $f(x_n, y_n) \equiv y'(x_n, y_n)$ derivált:

$$\begin{aligned} k_1 &\equiv h\, f(x_n, y_n), \\ k_2 &\equiv h\, f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right), \\ k_3 &\equiv h\, f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right), \\ k_4 &\equiv h\, f(x_n + h, y_n + k_3). \end{aligned} \tag{12}$$

Mozgásegyenletek megoldásánál a negyedrendű Runge-Kutta-módszer alkalmazott formulái az elmozdulásokra [3]:

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= v_n \Delta t \\ k_2 &= \left(v_n + \frac{k_1}{2}\right)\Delta t \\ k_3 &= \left(v_n + \frac{k_2}{2}\right)\Delta t \\ k_4 &= (v_n + k_3)\Delta t \end{aligned}\right\} \Rightarrow \tag{13}$$

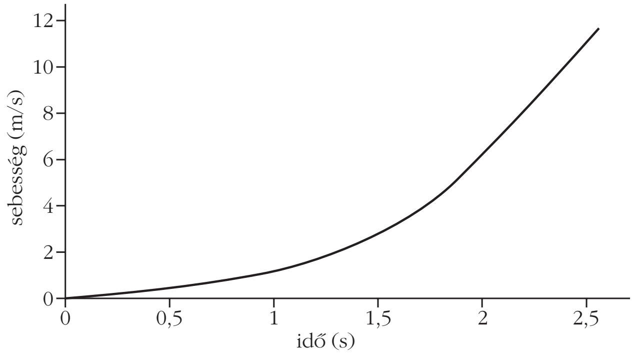
$$\Rightarrow x_{n+1} = x_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$

A sebességekre:

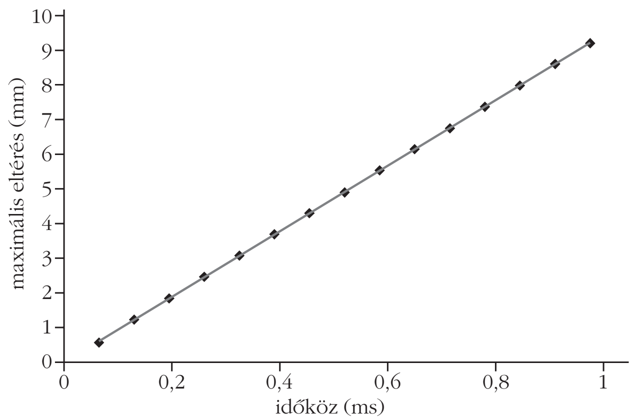
$$\left.\begin{aligned} k_1 &= a(x_n, v_n, t_n)\Delta t \\ k_2 &= a\left(x_n + \frac{k_1}{2}, v_n + \frac{k_1}{2}, t_n + \frac{\Delta t}{2}\right)\Delta t \\ k_3 &= a\left(x_n + \frac{k_2}{2}, v_n + \frac{k_2}{2}, t_n + \frac{\Delta t}{2}\right)\Delta t \\ k_4 &= a(x_n + k_3, v_n + k_3, t_n + \Delta t)\Delta t \end{aligned}\right\} \Rightarrow \tag{14}$$

$$\Rightarrow v_{n+1} = v_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$

Az egy lépésben elkövetett hiba h^5 rendű [3]. Egy N-ed rendű eljárásban a hiba közelítőleg h^{N+1}. A hibák időben halmozódnak, de ez a halmozódás nem feltétlenül lineáris. A Taylor-sorfejtés véges számú taggal



4. ábra. Asztalról lecsúszó lánc csúszási sebessége (dt = 0,00008 s, v_0 = 0 m/s, k = 0,05, l_0 = 0,5 m), a lánc asztalon lévő részének lecsúszása után a sebesség természetesen a szabadesési törvényt követi.



5. ábra. Az asztalon lévő lánchosszra kapott maximális eltérések alakulása az intervallum növelésével Euler- és a módosított Euler-módszerek között.

való közelítéséből adódó hiba mellett egy másik hibaforrás a kerekítési, számábrázolási hiba. Ennek teljes járuléka nő a lépések számával, ezért a h időlépést túlságosan kicsinek sem érdemes választani [4].

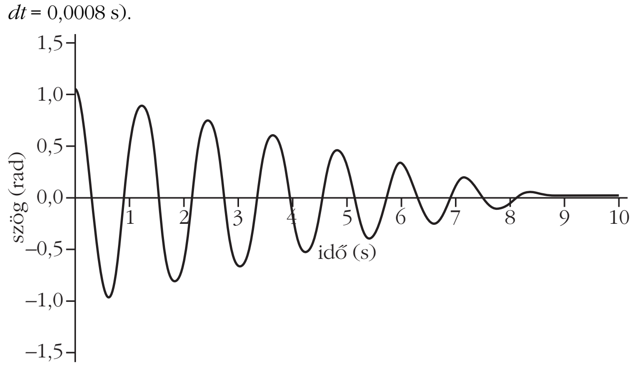
Példa

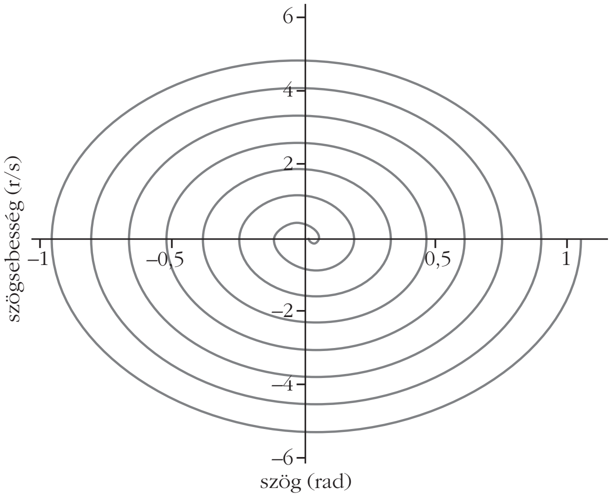
Fizikai (rúd) inga a szögsebességgel arányos súrlódással:

$$\ddot{\varphi} = -\frac{3g}{l}\sin\varphi - k\dot{\varphi}. \tag{15}$$

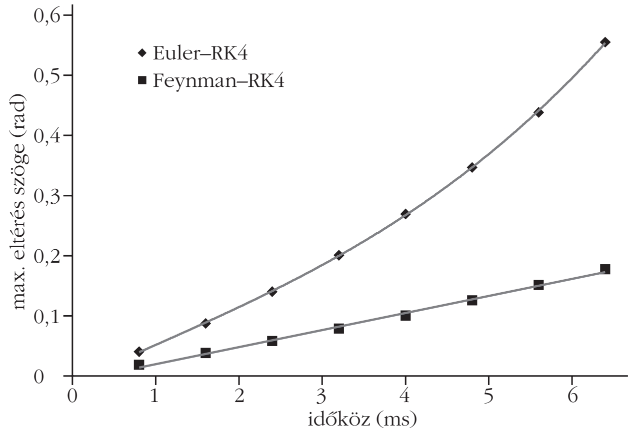
A (15) mozgásegyenlet megoldásakor a szögsebességre a (14), a szögkitérésre a (13) rekurziós formulákat

6. ábra. Az inga szögkitérése RK4 módszerrel (l = 1 m, φ_0 = 60°, k = 1, dt = 0,0008 s).





7. ábra. A fizikai inga fázissíkja, szögsebessége a szögkitérés függvényében (l = 1 m, φ_0 = 60°, k = 1, dt = 0,0008 s).



8. ábra. A különböző módszerek maximális eltérése az inga szögkitérésére növekvő időlépés (*dt*) szerint ábrázolva.

használtuk. A szögkitérést az idő függvényében ábrázolva (*6. ábra*) a jól ismert csillapított rezgés grafikont kapjuk.

Periodikus mozgásoknál gyakran alkalmazott ábrázolási mód a fázistérben való ábrázolás. Ilyenkor ingánál a szögsebességet ábrázoljuk a szögkitérés függvényében (*7. ábra*). Az inga leállását az origóba befutó trajektória jelzi (fixpont attraktornak nevezzük). Ha a mozgásnál nem lépne fel súrlódás, akkor a fázissíkbeli trajektória kör lenne.

Összehasonlítottuk a három módszerrel kapott szögkitéréseket különböző növekvő időközzel, ugyanolyan paraméterek és kezdeti feltételek esetén.

Szembetűnő, hogy míg az Euler-módszerrel számolt szögkitérés maximális eltérése a Runge-Kutta4-módszertől rohamosan növekszik, addig a módosított Euler-módszer (8) szerint számolva az eltérések csak lineárisan nőnek (*8. ábra*).

Irodalom

1. R. P. Feynman: *Mai Fizika*. (1. kötet, 116. o.) Műszaki kiadó, Budapest, 1969.
2. K. K. Ponomarjov: *Differenciálegyenletek felállítása és megoldása*. (115. o.) Tankönyvkiadó, Budapest, 1981.
3. Tél T., Gruiz M.: *Kaotikus dinamika*. (292. o.) Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2002.
4. Tél T., Gruiz M.: *Kaotikus dinamika*. (293. o.) Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2002.
5. Móricz F.: *Differenciálegyenletek numerikus módszerei*. (30. o.) Polygon jegyzettár, 1998.

A XIX. ÖVEGES JÓZSEF FIZIKAVERSENY ORSZÁGOS DÖNTŐJE

Juhász Nándor, Szeged, Rókusi Általános Iskola
Ősz György, Ács, Jókai Mór Általános Iskola
Vida József, Eger, Eszterházy Károly Főiskola

Nyitónap – 2009. május 22.

A XIX. Öveges József Fizikaversenyt ebben az évben már hetedik éve Győrben és hatodik alkalommal a Kazinczy Ferenc Gimnáziumban rendeztük meg. Jelentős szerepet vállalt, mint társrendező, Győr-Moson-Sopron Megye Közgyűlése, Győr Megyei Jogú Város Polgármesteri Hivatala, Győr-Moson-Sopron Megye Pedagógiai Intézete és a Kazinczy Ferenc Gimnázium.

A verseny döntőjén 72 hazai és 9 határainkon kívüli országokban fizikát magyar nyelven tanuló diák vett részt.

Az országos döntő a versenyzők számára ebben az évben is térítésmentes volt. Az Oktatási és Kulturális Minisztérium és a szponzorok anyagi támogatása, a szakcsoport vezetése, a versenybizottság és a helyi közreműködő kollégák hathatós segítsége mind hozzájárult a sikeres, eredményes lebonyolításhoz. Természetes, hogy a verseny döntőjét ebben az évben sem lehetett volna megszervezni az ambiciózus, nagy hivatástudattal rendelkező és elkötelezett fizikatanárok, az iskolák érdekeit jól látó, a tehetséges tanulók fejlődését elősegítő igazgatók nélkül.

A győri városháza impozáns dísztermében zajló ünnepélyes megnyitóval kezdetét vette a háromnapos verseny. A nyitóünnepségen *Ősz György,* a versenybizottság titkára bemutatta és köszöntötte a díszelnökség tagjait és a megjelenteket, majd *Kiss Gyula,* az ELFT Általános Iskolai Oktatási Szakcsoportjának elnöke szólt a meghívottakhoz, és *Fülöp Viktorné* me-