REGULARIZÁCIÓ ÉS RENORMÁLÁS: PÉLDÁK A KLASSZIKUS FIZIKÁBÓL

Somogyi Gábor, Zürichi Egyetem
Trócsányi Zoltán, Debreceni Egyetem és MTA ATOMKI

A részecskefizika Standard Modellje mértékelmélet. A tömören megfogalmazható elv azonban hamar meglehetősen bonyolult matematikai kifejezésekké dagad, amint a mértékelmélet mozgásegyenleteit megpróbáljuk kifejteni és fizikailag mérhető mennyiségeket próbálunk kiszámítani. Ráadásul a mozgásegyenleteket csak a részecskék közötti kölcsönhatások elhagyásával tudjuk egzaktul megoldani. A kölcsönhatások figyelembevétele csak közelítőleg lehetséges. A nehézségeket fokozza, hogy a számítások során egyszer csak divergens integrálok jelennek meg, és az egész eljárás hirtelen értelmetlennek tűnik. Mielőtt továbblépnénk, a divergens integrálokat *regularizálni* kell, azaz végessé kell őket tenni. Ezután a divergens integráloktól meg kell szabadulni, amit *renormálásnak* nevezünk. Végül a regularizáció eltávolítható, és visszamarad a fizikai eredmény.

Az elmondott lépések matematikai bűvészkedésnek tűnhetnek, olyan érzést keltenek, mintha a regularizácó és a renormálás csupán arra lenne jó, hogy azt az eredményt kapjuk, amit szeretnénk. Sokak számára az egész eljárás matematikai szempontból elfogadhatatlannak látszik, aminek részben talán az az oka, hogy a kvantumtérelmélet bonyolult matematikai formalizmusa mögött nehéz kibogarászni, hogy mi a perturbatív renormálás lényege.[1] Alább két klasszikus fizikai példa segítségével szeretnénk megmutatni, hogy

- egyrészt a renormálásra nem a végtelenek eltávolítása miatt van szükség, hanem azért, mert a Lagrange-függvény nyelvén megfogalmazott elméletben szereplő paramétereknek így adhatunk fizikai jelentést;
- másrészt, a regularizáció csupán ahhoz szükséges, hogy fizikai jelentéssel nem rendelkező, végtelennek adódó számolási részeredményeket következetes módon értelmessé (végessé) tegyük.

Perturbatív renormálás

A perturbatív renormálás alapgondolatát nagyon egyszerű példán szemléltetjük. Tekintsük egy m tömegű lineáris és köbös erőtörvény hatásának kitett részecske egydimenziós mozgását, azaz egy anharmonikus oszcillátort! A mozgásegyenlet közismert:

$$m\ddot{x} + m\omega_0^2 x + \frac{1}{3!} g x^3 = 0. \qquad (1)$$

Bár a további megfontolásainkhoz a mozgásegyenlet elegendő, a kvantumtérelmélettel történő kapcsolat hangsúlyozása érdekében felírjuk a Lagrange-függvényt is:

$$L = E_m - E_p, \quad \text{ahol} \quad E_m = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

a részecske mozgási energiája,

$$E_p(x) = \frac{1}{2} m\omega_0^2 x^2 + \frac{1}{4!} g x^4 \qquad (2)$$

pedig a potenciális energiája, amely láthatóan vonzó potenciálgödröt jelent (feltételezzük, hogy $g > 0$), az egyensúlyi hely $x = 0$-ban van. Amennyiben a részecske E teljes energiája nullánál nagyobb, akkor az az $x = \pm A(E)$ fordulópontok által kijelölt tartományon belül rezgőmozgást végez. A fordulópontokban $E_m = 0$, tehát helyük az $E_p(A) = E$ egyenletből könnyen meghatározható.

Használjunk most g szerinti perturbációszámítást a mozgásegyenlet megoldásához, ami azt jelenti, hogy az $x(t)$ megoldást az

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} g^i x^{(i)}(t)$$

sorfejtés alakjában keressük. Példánkban feltételezzük, hogy $g \ll m\omega_0^2$, ezért a vezető rendű tag, $x^{(0)}(t)$, mellett csak az első perturbatív korrekciót vesszük figyelembe,

$$x(t) \simeq x^{(0)}(t) + g x^{(1)}(t). \qquad (3)$$

Az elhagyott további tagok legalább g^2 rendűek.

A perturbatív megoldást a mozgásegyenletbe helyettesítve, g különböző hatványai együtthatóinak külön-külön nullának kell lenni. Ez g-ben első rendig az alábbi két egyenletet szolgáltatja

$$\ddot{x}^{(0)} + \omega_0^2 x^{(0)} = 0, \qquad (4)$$

$$\ddot{x}^{(1)} + \omega_0^2 x^{(1)} = -\frac{1}{6m}\left(x^{(0)}\right)^3 \qquad (5)$$

amelyekből $x^{(0)}(t)$ és $x^{(1)}(t)$ meghatározható. A határozottság kedvéért tekintsük azt a kezdeti feltételt, amikor $t = 0$-ban fordulópontban van a részecske, $x(0) = A$, $\dot{x}(0) = 0$! A vezető rendű megoldás a harmonikus oszcillátor jól ismert mozgásegyenletét elégíti ki és a megadott kezdeti feltétel esetén

$$x^{(0)}(t) = A\cos(\omega_0 t). \qquad (6)$$

Ennek ismeretében meghatározhatjuk az első perturba-

[1] A renormálásnak több fajtája van, e cikkben csak a perturbatív renormálásról írunk. Példánk egyben a perturbációszámítás lényegét is bemutatja.

tív korrekciót, $x^{(1)}(t)$-t, ami az (5) egyenlet $x^{(1)}(t) = 0$, $\dot{x}^{(1)}(t) = 0$ kezdeti feltétel melletti megoldását jelenti,

$$x^{(1)}(t) = -\frac{A^3}{192\, m\, \omega_0^2} \times \\ \times \left[\cos(\omega_0 t) - \cos(3\,\omega_0 t) + 12\,\omega_0\, t \sin(\omega_0 t)\right]. \tag{7}$$

A (6–7) egyenletek matematikai értelemben helyes megoldásai a (4–5) mozgásegyenleteknek, fizikailag azonban mégsem lehetnek helyesek, ugyanis $x^{(1)}(t)$-ben a szinuszos tag együtthatója az idővel arányosan nő. Így egyszercsak $x(t)$ nagyobbá válik a fordulópontbeli A értéknél, a mozgás nem korlátos. Vajon hol hibázhattunk? A felületes válasz az lehetne, hogy a perturbációszámítás idővel leromlik, csupán kis t-re használható.

Érdemes azonban jobban megvizsgálni a megoldást. A perturbálatlan ($g = 0$) potenciálban szereplő ω_0 paraméter természetesen a négyzetes potenciálban létrejövő harmonikus rezgés fizikai körfrekvenciája, azaz a rezgés tényleges periódusideje $T = 2\pi/\omega_0$. Ezzel szemben az anharmonikus esetben a perturbáció *módosítja* az oszcilláció tényleges periódusidejét, amely így valamely $T' \neq T$, vagyis a perturbált esetben ω_0 *nem a fizikai körfrekvencia*. Ezt nem vettük figyelembe a fenti megoldás során! (Arról van szó, hogy nem jó periódus szerint akartuk Fourier-sorba fejteni a megoldást.) A tanulság, hogy a végeredményt nem az eredeti Lagrange-függvényben szereplő paraméterekkel célszerű kifejezni, hanem a probléma *fizikai* paramétereivel. Ez a *renormálás* alapgondolata. Látjuk, hogy a renormálásnak alapvetően semmi köze ahhoz, hogy megjelennek-e divergens integrálok a számolás során.

Most lássuk, hogyan lehet a renormálás programját ténylegesen végrehajtani az anharmonikus oszcillátor esetén! Definiáljuk a renormált körfrekvenciát, ω_R-t, az

$$\omega_0^2 = Z(g)\,\omega_R^2, \qquad Z(g) = 1 + g\,Z_1 + \mathrm{O}(g^2)$$

egyenlettel, ahol $Z(g)$-t renormálási állandónak nevezzük, amelynek perturbációs sora eggyel kezdődik, hiszen a perturbálatlan esetben ω_0 a fizikai körfrekvencia. Az *eredeti* (2) potenciális energiát a renormált körfrekvenciával kifejezve

$$E_p = \frac{1}{2}\, m\, Z\, \omega_R^2 x^2 + \frac{1}{4!}\, g\, x^4 \\ = \frac{1}{2}\, m\, \omega_R^2 x^2 + \frac{1}{4!}\, g\, x^4 + \frac{1}{2}\, m\,(Z-1)\,\omega_R^2 x^2$$

adódik. Látható, hogy visszakaptuk a kiindulási potenciális energiát egy $\omega_0 \to \omega_R$ csere erejéig, de ezen kívül megjelent egy új tag is, amelyet *renormálási ellentagnak* nevezünk. Ez a tag $(Z-1)$-gyel, tehát g-vel arányos, ezért perturbációnak kell tekinteni! Ezt észben tartva, ismételjük meg a perturbatív számolást a renormált potenciális energiával. Az új mozgásegyenlet:

$$m\,\ddot{x} + m\,\omega_R^2\, x + \frac{1}{3!}\, g\, x^3 + m\,(Z-1)\,\omega_R^2\, x = 0.$$

Behelyettesítve a (3) perturbatív megoldást, az

$$\ddot{x}^{(0)} + \omega_R^2\, x^{(0)} = 0,$$

$$\ddot{x}^{(1)} + \omega_R^2\, x^{(1)} = -\frac{1}{6\,m}\left(x^{(0)}\right)^3 - Z_1\,\omega_R^2\, x^{(0)}$$

egyenleteket kapjuk, míg a kezdeti feltétel változatlan. A renormált vezető rendű megoldás pontosan megegyezik az eredeti vezető rendű megoldással egy $\omega_0 \to \omega_R$ csere után:

$$x^{(0)}(t) = A\cos(\omega_R t). \tag{8}$$

A renormálás az első perturbatív korrekcióban két változást eredményez az eredeti (7) kifejezéshez képest: egyrészt ω_0 helyett mindenhol ω_R szerepel, másrészt az új, Z_1-gyel arányos perturbáció miatt új tag jelenik meg,

$$x^{(1)}(t) = -\frac{A^3}{192\, m\, \omega_R^2} \times \\ \times \left[\cos(\omega_R t) - \cos(3\,\omega_R t) + 12\,\omega_R\, t \sin(\omega_R t)\right] - \\ - \frac{A}{2}\, Z_1\, \omega_R\, t \sin(\omega_R t).$$

Látjuk, hogy az ellentag pontosan megfelelő alakú ahhoz, hogy a renormálási állandó, Z_1, helyes megválasztásával a megoldás nem fizikai, idővel növekvő részét kiejtsük! Ezzel a feltétellel a renormálási állandóra

$$Z_1 = -\frac{A^2}{8\, m\, \omega_R^2}$$

adódik, amivel a renormált megoldás,

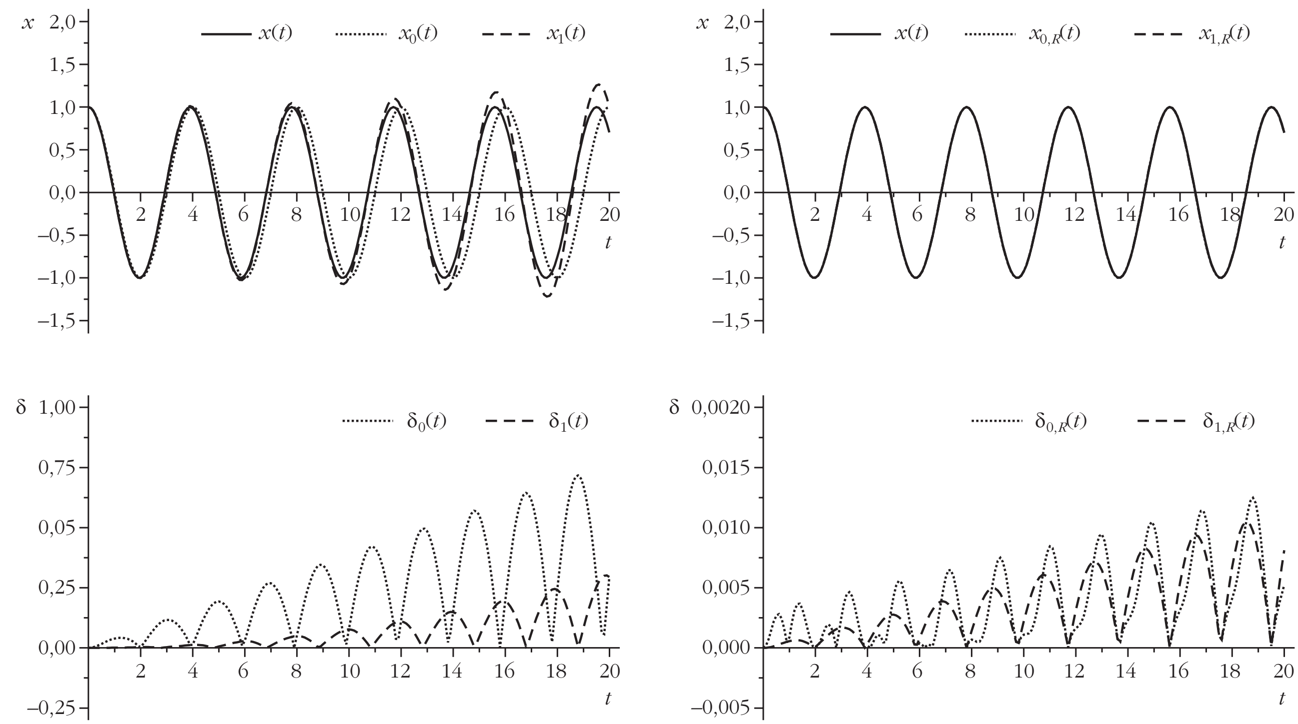
$$x^{(1)}(t) = -\frac{A^3}{192\, m\, \omega_R^2}\left[\cos(\omega_R t) - \cos(3\,\omega_R t)\right] \tag{9}$$

már nem csak matematikai értelemben, hanem fizikailag is helyes (a perturbációszámítás adott rendjében).

Összefoglalva, a perturbációszámítás naiv alkalmazása nem fizikai tagok megjelenéséhez vezetett a perturbatív megoldásban, mert a végeredményt nem a probléma fizikai paramétereinek függvényében kaptuk meg, hanem közvetlenül az eredeti Lagrange-függvényben szereplő „csupasz”, nem fizikai paraméterek függvényében. A renormálás fizikai tartalma pontosan az, hogy ezeket a csupasz paramétereket fizikai paraméterekre cserélve a végeredményből eltűnnek a nem fizikai tagok.

Regularizáció

Nem csak a kvantumtérelméletben fordul elő, hogy a számolás során fizikai tartalommal nem bíró részeredményként matematikailag értelmetlen (végtelen) eredményt kapunk integrálok kiszámításakor. A továbbiakban erre mutatunk klasszikus fizikai példát.



1. ábra. Az ábra az (1) egyenlet $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$ kezdeti feltétellel történő pontos (numerikus) $x(t)$ megoldását, illetve a perturbációszámítással kapott $x_0(t) = x^{(0)}(t)$ vezető rendű, és az első korrekciót tartalmazó $x_1(t) = x^{(0)}(t) + g x^{(1)}(t)$ megoldását szemlélteti. A paraméterek értékeit $m = 1$, $\omega_0 = \pi/2$ és $g = 1$-nek választottuk. A bal oldali ábrán a perturbációszámítás naiv alkalmazásával kapott (6–7) megoldást, míg a jobb oldali ábrán a renormált (8–9) megoldást ábrázoltuk. Mindkét esetben feltüntettük az pontos és a perturbatív megoldások $\delta_i(t) = |x(t) - x_i(t)|$ különbségét is.

Határozzuk meg egy végtelen hosszú vonal menti egyenletes ρ lineáris sűrűségű töltéseloszlás körül kialakuló elektromos mezőt! A szokásos megoldás a Gauss-tételt, továbbá „szimmetriamegfontolásokat” használ. Az utóbbiakat nem szokás részletezni, és bár valóban teljesül, hogy az elektromos mező hengerszimmetrikus és a töltésvonaltól sugárirányban kifelé mutat a vonalra merőleges síkban, a levezetés pontos végiggondolása nem egyszerű, továbbá megköveteli az elektrosztatikus tér örvénymentességének felhasználását is. Mindezek helyett lehet a „nyers erőt” használni: határozzuk meg előbb egy vonal menti integrálással az elektrosztatikus potenciált, majd ebből deriválással a mezőt.

Legyen a koordinátarendszerünk z-tengelye a töltésvonal mentén, és keressük a potenciált az $\boldsymbol{r} = (r, \phi = 0, z = 0)$ hengerkoordinátákkal jellemzett pontban. Ez a választás a hengerszimmetria és a vonal menti eltolási szimmetria miatt nem jelent megszorítást. A $(0,0,z)$ helyen található $\mathrm{d}Q = \rho\,\mathrm{d}z$ infinitezimális töltés potenciálja $\boldsymbol{r}$-ben

$$\mathrm{d}V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}Q}{\sqrt{r^2+z^2}}.$$

A teljes töltéseloszlás potenciálja

$$V(r) = \frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{r^2+z^2}} = \infty. \tag{10}$$

A potenciálnak közvetlen fizikai jelentése nincs, csupán a feszültségnek, azaz két pont közötti potenciálkülönbségnek. Az utóbbit megszorozva a töltés nagyságával megkapjuk azt a munkát, amelyet ez elektrosztatikus mező végezne a töltésen a két pont között. Elvileg tehát nem baj, hogy végtelent kaptunk eredményül. Gyakorlatilag azonban igen, ugyanis végtelenek különbségét, $[V(r_1) - V(r_2)]$-t nem értelmezzük, hiszen bármennyi lehet. Nem nehéz ellenőrizni, hogy a (10) integrál skálainvariáns, $V(kr) = V(r)$, ami végképp zavarbaejtő, hiszen arra a következtetésre juthatunk, hogy a potenciál mindenütt ugyanakkora, ezért az elektromos mező nulla.

Mi a kiút? A végtelen integrált előbb *regularizálni* kell. Ennek egyszerű módja, hogy végtelen töltésvonal helyett $\pm L$ távolságra elnyúló, véges $2L$ hosszúságú töltésvonalat tekintünk. Ekkor az integrál értéke

$$V(r, L) = \frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-L}^{L}\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{r^2+z^2}} = \frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sqrt{L^2+r^2}+L}{\sqrt{L^2+r^2}-L}. \tag{11}$$

Ez az eredmény (i) véges, (ii) a fizikai r távolságon kívül az L regulátortól is függ (iii) és végtelenné válik, ha eltávolítjuk a regularizációt, $L \to \infty$. Ha a regularizált $V(r, L)$ függvényből a szokásos módon kiszámítjuk az elektromos mezőt, nagyságára

$$E(r, L) = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\rho}{2\pi\varepsilon_0 r}\frac{L}{\sqrt{L^2+r^2}} \tag{12}$$

adódik, és sugárirányban kifelé mutat a z-tengelyre merőlegesen. A (12) egyenletben már nyugodtan eltávolíthatjuk a regularizációt, a végeredmény véges,

$$E(r) = \lim_{L\to\infty} \frac{\rho}{2\pi\varepsilon_0 r} \frac{L}{\sqrt{L^2+r^2}} = \frac{\rho}{2\pi\varepsilon_0 r}. \quad (13)$$

Kiszámítható a feszültség is:

$$V(r_2) - V(r_1) = \lim_{L\to\infty}\left[V(r_2, L) - V(r_1, L)\right] = \\ = \frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0} \ln\frac{r_1^2}{r_2^2}. \quad (14)$$

A (11) egyenletnek van még egy tulajdonsága: (iv) elveszett az eredeti z-menti eltolással szembeni szimmetria. Természetesen a fizikai tartalommal bíró mennyiségek már újra rendelkeznek az eredeti szimmetriával. Bár a vizsgált egyszerű problémában nincs nagy jelentősége, hogy a részeredmény nem volt eltolás-szimmetrikus, a részecskék kölcsönhatásait leíró mértékelméletek esetén a mértékszimmetria elvesztése még a részletszámolásokban is igen kellemetlen. Bonyolult számítások esetén ugyanis lényeges, hogy minél több ellenőrzési lehetőségünk legyen a közbenső lépések esetén. A mértékszimmetria ellenőrzése igen erős kapaszkodót nyújt. Vajon létezik-e olyan regularizáció, amely megőrzi a szimmetriát?

A múlt század utolsó fizikai Nobel-díját *Gerard 't Hooft* és *Martinus Veltman* kapta a „részecskefizikai elektrogyenge folyamatok kvantumfizikai alapjainak tisztázásáért". Munkájukban döntő jelentőségű volt a dimenzionális regularizáció (DR) használata, ugyanis ez a fajta regularizáció – más fajtákkal ellentétben – meghagyja a szimmetriákat (részecskefizikai elmélet esetén például a Lorentz- és mértékszimmetriát). A DR lényege, hogy a téridő dimenziószámát szabadon választható paraméterként kezeljük, azaz négy (három tér és egy idő) dimenzió helyett a számolásokat tetszőleges d dimenzióban végezzük. Lássuk, hogyan alkalmazható a DR az elektrosztatikai példánkban!

A (10) integrál egydimenziós; d dimenzióra történő általánosításához az integrálási mértéket d dimenzióban kell felírni,

$$\mathrm{d}z \to \mathrm{d}^d z = z^{d-1}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\Omega_d.$$

Itt az egyenlőség jobb oldalán polárkoordinátákban írtuk fel a mértéket (tehát itt $0 \le z \le \infty$), és $\mathrm{d}\Omega_d$ a szögintegrálok mértéke d dimenzióban. Például $\mathrm{d}\Omega_2 = \mathrm{d}\phi$, $\mathrm{d}\Omega_3 = \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$. Elvégezve az integrálást a teljes térszög felett megkapjuk a d-dimenziós hiperfelület nagyságát,

$$\Omega_d = \int \mathrm{d}\Omega_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}. \quad (15)$$

Az Euler-féle gamma-függvény értékét táblázatból kiolvasva (például $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$, $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$), $\Omega_2 = 2\pi$ az egységsugarú kör kerülete, $\Omega_3 = 4\pi$ az egységsugarú gömb felülete, $\Omega_4 = 2\pi^2$ az egységsugarú négy-dimenziós gömb felülete, és így tovább. A (15) képlet azonban akár valós *tört* dimenzióban is érvényes.

Visszatérve a potenciált meghatározó (10) integrálhoz, ennek d dimenziós általánosítása:

$$V(r, d) = \frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^\infty \mathrm{d}\Omega_d \left(\frac{z}{\mu}\right)^{d-1} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{r^2+z^2}}. \quad (16)$$

Itt felfigyelhetünk a DR egy sajátosságára: az integrandusba beírtunk egy hosszúságdimenziójú μ tényezőt (megfelelő hatványon), hogy az integrál *fizikai dimenziója* változatlan maradjon. Az integrál kiszámításához felhasználva a szögintegrálra vonatkozó (15) eredményt (az integrandus nem függ a polárszögektől), a maradék egydimenziós integrál könnyen elvégezhető. A dimenziószámot célszerűen (és szokásosan) $d = 1-2\varepsilon$-ként paraméterezzük, így a regularizáció megszüntetését az $\varepsilon \to 0$ határátmenet jelenti. Az eredmény,

$$V(r, d) = \frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0} \Gamma\left(\frac{1-d}{2}\right)\left(\sqrt{\pi}\,\frac{r}{\mu}\right)^{d-1} = \\ = \frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0} \pi^{-\varepsilon}\,\Gamma(\varepsilon)\left(\frac{\mu^2}{r^2}\right)^{\varepsilon} \quad (17)$$

a következő tulajdonságokkal rendelkezik: (i) véges, (ii) függ a dimenzió nélküli regularizációs paramétertől, ε-tól, (iii) függ a hosszúságdimenziójú segédparamétertől, μ-től, (iv) értelmetlenné válik akár az $\varepsilon \to 0$, akár a $\mu \to 0$ határesetben (a gamma-függvény a nullában nincs értelmezve), (v) a levágásos regularizációval ellentétben, a DR megőrzi az eltolási szimmetriát, hiszen a (16) integrál értékét a $z \to z + c$ változótranszformáció nem változtatja meg.

A potenciál ismeretében a szokásos módon ki tudjuk számolni az elektromos mezőt,

$$E(r, d) = \frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0 r} 2\varepsilon\,\pi^{-\varepsilon}\,\Gamma(\varepsilon)\left(\frac{\mu^2}{r^2}\right)^{\varepsilon},$$

és a feszültséget ε-szerinti sorfejtés alakjában. Ehhez felhasználjuk a gamma-függvény sorfejtését:

$$\Gamma(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \mathrm{O}(\varepsilon),$$

tehát $\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\,\Gamma(\varepsilon) = 1$. Az elektromos mező négydimenziós értékére a (13) egyenletben kapott véges eredmény, míg a feszültségre a (14) egyenletben kapott eredmény adódik. Megnyugtató, hogy a fizikai mennyiségek függetlenek az alkalmazott regularizációtól. Továbbá az is látszik, hogy a bevezetett μ segédskálától sem függnek, amit egyenlet nyelvén is megfogalmazhatunk:

$$\mu\,\frac{\partial E(r)}{\partial\mu} = 0, \qquad \mu\,\frac{\partial \Delta V(r)}{\partial\mu} = 0.$$

E két egyenletet renormálási csoport egyenleteknek nevezik. Nagy jelentőségük van, de ennek bemutatása már túlmutat e cikk keretein.

A potenciál köztudott módon csak egy additív állandó erejéig van meghatározva. A d-dimenziós (17) eredmény

$$V(r,\varepsilon) = \frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln\pi + \ln\frac{\mu^2}{r^2} + O(\varepsilon)\right]$$

sorfejtéséhez szabadon hozzáadhatunk r-től független mennyiséget. E szabadságot kihasználva a potenciál végessé tehető bármely dimenzióban, amihez a minimális levonás

$$\frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\varepsilon},$$

de levonhatjuk akár a

$$\frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln\pi\right]$$

mennyiséget is (módosított minimális levonás).

A maradékból nyugodtan eltávolíthatjuk a regularizációt az eredmény véges marad:

$$V(r) = \frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\mu^2}{r^2}.$$

A renormálható kvantumtérelméletekben az ilyen levonás megfogalmazható az elmélet paramétereinek az anharmonikus oszcillátor példáján megmutatott renormálásával. A különbség mindössze annyi, hogy a $Z(g,\varepsilon)$ renormálási állandó függ ε-tól is, mégpedig $1/\varepsilon$ pólust is tartalmaz. Azonban a renormált Lagrange-függvényből számolt fizikai eredmények már végesek az $\varepsilon \to 0$ határesetben (a perturbációszámítás adott rendjében).

Éppen negyedszázada hallottam (*T.Z.*) először a perturbatív renormálásról az egyetemi kvantum-elektrodinamika előadáson. Az érthetetlennek tűnő gondolatsor késztetett arra, hogy hosszú és kemény erőfeszítéssel megpróbáljam alaposabban megismerni a kvantumtérelméletet. Úgy gondoljuk, hogy az itt mutatott példák tankönyvekbe illenek, és a mai egyetemi hallgatók számára könnyen érthetővé teszik a valójában egyszerű alapgondolatot.

Kutatásunkat az OTKA (K-60432) támogatta.

SZÖVEVÉNYES RAJZOLATOK…

Laczik Bálint
BME Gyártástudomány és -technológia Tanszék

A megismerés módszere a megfigyelés – alaposan pedig csak az ismétlődő jelenségek figyelhetők meg. Az egymást követő világos és sötét napszakok, a holdfázisok, az évszakok, a csillagvilág éjszakánként újra és újra felsejlő csodái ösztönözhették régvolt embertársainkat a világról alkotott első elképzeléseik kialakítására.

A tudomány immár az atomfizika elenyészően rövid idejű részecske élettartamaitól a Világegyetem tízmilliárd években mért időparamétereiig a legkülönbözőbb ismétlődési idejű jelenségeket vizsgálja.

A 19. század kutatói különösen sokat foglalkoztak a mechanikus és villamos rendszerekben fellépő, periodikus mozgásokkal, lengésekkel, rezgésekkel. A műszaki alkalmazásokban már jóval korábban megjelentek az úgynevezett alternáló szerkezetek. Az Országos Műszaki Múzeum könyvtárának értékes relikviái *Jacob Leupold* (1674–1727) *Theatrum Machinarium* című, 1720–39 között kiadott könyvsorozatának kötetei. A korabeli műszaki ismereteket összefoglaló, hatalmas, gazdagon illusztrált fóliánsok megannyi ötletes szerkezetet mutatnak be. Például az *1. ábracsoport* hiányos fogazatú pálcás fogaskerekeit folyamatosan egy irányba forgatva, a velük kapcsolódó fogaslécek vagy pörgőpárok szakaszosan egyik, majd az ellentétes értelemben mozognak attól függően, hogy a meghajtó kerék fogai melyik oldalon lévő elem fogaival kapcsolódnak. A későbbi századok során a periodikus működésű szerkezetek megannyi, érdekes változata készült el.

A legegyszerűbb harmonikus mozgás elemi trigonometrikus függvényekkel írható le. Az egységnyi sugarú kör polárvektorát egységnyi fordulatszámmal forgatva a sugár függőleges és vízszintes vetületei a közismert szinusz és koszinusz függvényt állítják elő (lásd *2. ábra*).

A csillapítatlan, ideális fonálinga kis ϕ szögkitérésű lengései jól közelíthetők a T periódusidejű harmonikus lengő mozgással (lásd *3.a ábra*).

Az S jelű súlypontján kívül rögzített, a felfüggesztési pont körül lengő merev test a fizikai inga (*3.b ábra*). Kis ϕ határkitérésekhez tartozó T lengésidejének közelítő formulája a fonálingáéhoz hasonló, egyszerű összefüggés.

Lényegesen bonyolultabb a kettős fonálinga (*3.c ábra*), még inkább a kettős fizikai inga, például a meghúzott harang és a benne lévő harangnyelv viselkedése. A kölni dóm legendás nagyharangjánál egy egészen különös jelenség lépett fel: a mozgásba hozott harang néma maradt – a véletlenül adódott, roppant különleges méret- és tömegviszonyok okán ugyanis a harangtest és a nyelv lengéseinek periódusideje megegyezett, a haranggal együtt mozgó nyelv tehát nem verődött a harangtesthez (lásd *3.d ábra*).