

Rossz hír, hogy amíg a lineáris Schrödinger-egyenlet valamiféle hályogkovács biztonságával kerüli el a kvantummechanikában rejlő nemlokalitás súlyosabb bonyodalmaival, a nemlineáris dinamikában ez a biztonság összeomlik, és az elmélet építésekor fáradságos aprómunkával kell kerülgetni a kauzalitást fenyegető buktatókat.

Hogy végülis a gravitáció erős vagy gyenge, hogy pályamódosításon vagy interferencián keresztül befolyásolja hatékonyabban a kvantum–klasszikus határon zajló eseményeket, az nyitott kérdés. Itt kapcsolódhat a történet a kvantumgravitáció területéhez: az elmélet egyes változatai arra utalnak, hogy talán nagyon rövid távolságokon (becsavarodott vagy lelapult extra dimenziók méretén belülről) a gravitáció sokkal erősebb lehet annál, mint amit a newtoni távolságskálán megismertünk. Ennek kísérleti tesztelése elkezdődött, de egyelőre nehéznek bizonyult a szintén rövidtávú Casimir-erők zavaró hatása miatt.

## Epilógus

- A kvantum–klasszikus határ megismerése keményebb dió, mint atyáink gondolták.

- Több mint száz évvel Planck felfedezése, nyolcvan évvel a természettörvénnyé vált kvantummechanika megszületése után már igazán ideje lenne megtalálni a biztonságos átjárást kvantum és klasszikus között.

- Lessük a kísérleteket a senkiföldje-tömegek világából,

- addig is, gyártjuk az elméleteket.

Az itt áttekintett kérdések iránti érdeklődésemet *Fényes Imrétől* kaptam; kár, hogy nem érthette meg a témakör mai virágzását. Sok részletkérdéssel kapcsolatban Diósi Lajossal való sűrű diszkussziók másfél évtizede formálta a véleményemet. Külön köszönet illeti *Frenkel Andort*, aki segítette megérteni Károlyházi Frigyes eredményeit.

# BOSE–EINSTEIN-KONDENZÁCIÓ ÉS KRISTÁLYOSODÁS: A FOLYTONOS SZIMMETRIA SÉRÜLÉSÉNEK KÉT ESETE

Sütő András

MTA Szilárdtestfizikai és Optikai Kutató Intézet

Az egyensúlyi statisztikus fizika a múlt század hetvenes éveire elérte teljes érettségét, eszköztudományába és azon túl más tudományágakba, hagyományos vizsgálódási területe azonban a nyolcvanas évektől kezdve fokozatosan kicsúszott a fizikusok központi érdeklődési köréből. Hátramaradt néhány be nem vett erőd, megoldatlan probléma. A nehéz problémák ritkán érdektelenek, nem szabad teljesen megfeledkeznünk róluk.

A rácson definiált feladatok közül példaként szolgál három, a mágnességgel kapcsolatos megválaszolatlan kérdés. Az első a háromdimenziós ferromágneses kvantum Heisenberg-modell rendeződési fázisátmenete. Minden fizikus meg van győződve arról, hogy ebben a modellrendszerben kellően mély hőmérsékleten ferromágneses rendeződés történik. A második a négyzetrácson definiált antiferromágneses, feles spinű Heisenberg-modell alapállapota. Ha teljes közmegegyezés nincs is, a többségi vélemény szerint ennek antiferromágneses rendet kell mutatnia. A harmadik megoldatlan probléma az elemi cellájukban egy pontot tartalmazó, úgynevezett Bravais-rácsokon (például az egyszerű, a tércentrált vagy a lapcentrált köbös rácson) értelmezett Hubbard-modell alapállapotának mágneses momentuma. Ez a rendszer az itineráns ferromágnesség – a mozgó elektronok által létesített ferromágnesség – legegyszerűbb modellje lehetne; de hogy valóban az-e, ebben a tekintetben teljes a tanácstalanság. A folytonos térben mozgó ré-

szecskék fázisátmeneteivel még rosszabb a helyzet. Nem tudunk leírni olyan hétköznapi jelenségeket, mint a gázok cseppfolyósodása és a kristályosodás, és hézagos a tudásunk a kölcsönható bozonok Bose–Einstein-kondenzációjáról és a hélium ezzel összefüggő szuperfolyékonyságáról.

Hogy mit értünk tudáson és leírásról, részben egyéni megítélés kérdése. A megértésnek és a leírásnak különböző mélységei vannak. A fent említett jelenségeket az általános fizikai elvek szintjén elég jól értjük, és rendelkezésünkre állnak jó fenomenologikus elméletek is. A hiányérzet abból adódhat, hogy míg az összes problémát matematikai szabotossággal meg tudjuk fogalmazni, képtelenek vagyunk őket ugyanilyen szabotossággal megoldani. Erre lehet legyinteni is, mondván, hogy a közelítő technikák és a numerikus módszerek gyakorlati szempontból mindig kielégítő eredményt adnak. Nehéz azonban megszabadulni attól az érzéstől, hogy amíg élesen felvetett kérdéseinkre nincsenek éles válaszok, addig valamilyen alapvető dolgot nem értünk, valami fontos tényező elkerülte a figyelmünket.

A fent összegyűjtött példák, a gázok cseppfolyósodása kivételével, valamilyen folytonos szimmetria sérülésével és az ezzel együttjáró rendeződéssel kapcsolatosak. A makroszkopikus mágnesség az elemi mágneses momentumok rendeződésével, az izotróp eloszlás sérülésével jelenik meg. A kristály létrejöttekor a gáz- vagy folyadékbéli részecskék térben egyenes-

eloszlása szűnik meg. A Bose–Einstein-kondenzáció során egy kevésbé szemléletes szimmetria, a mértékinvariancia sérül [1, 2], ezt kíséri egy szokatlan, úgynevezett nemdiagonális hosszútávú rend, amely sok részecskére és nagy távolságra kiterjedő fáziskohereniciát jelent. (A lézerrel való hasonlóság nem véletlen: a lézerfény a fotonok Bose–Einstein-kondenzátuma.) Az elmúlt néhány évben jómagam a két utóbbi problémán dolgoztam, a továbbiakban ezekről írok valamilyen részletesebben.

Általánosan igaz az az állítás, hogy a fázisátmenet-hoz kölcsönhatás szükséges. A klasszikus ideális gáz nem cseppfolyósodik és nem kristályosodik, minden hőmérsékleten gáz marad. Az egyetlen ismert kivétel a Bose–Einstein-kondenzáció, amely kölcsönható részecskék között mehet végbe. A jelenség megértése nulla hőmérsékleten a legegyszerűbb. Az egyforma bozonok rendszerét olyan hullámfüggvény írja le, amelyet a részecskék tetszőleges cseréje változtatlanul hagy. Ha a bozonok között nincs kölcsönhatás, akkor energiájuk a kinetikus energiák összege,

$$T = \sum_{i=1}^N T_i,$$

ahol  $T_i$  az  $i$ -edik bozon kinetikus energiájának operátora. Nulla hőmérsékleten a rendszer a  $T$  operátor alapállapotában van, ez pedig nem más, mint a  $\phi_0(\mathbf{r}_1) \cdots \phi_0(\mathbf{r}_N)$  szorzatfüggvény, ahol  $\phi_0$  a  $T_i$  operátorok közös alapállapotú hullámfüggvénye. Ez a száz százalékos Bose–Einstein-kondenzáció: minden részecske ugyanabban a kvantumállapotban van. (Fermionok esetében ez az állapot nem megengedett, már két egyforma fermion sem lehet ugyanabban a kvantumállapotban.) Az igazán érdekes azonban pozitív hőmérsékleten történik, és egy *Einstein* kaliberű fizikus kellett ahhoz, hogy a furcsaságot észrevegye. A termikus gerjesztés ki tudja emelni a bozonokat a  $\phi_0$  állapotból. Adott hőmérsékleten, amíg csak kevés részecske van a rendszerben, néhány kivételével az összes bozon gerjesztett állapotba kerül. A részecskeszám növekedtével azonban a gerjesztett állapotú bozonok sűrűsége tiltódik egy hőmérsékletfüggő értéken, és a rendszerhez hozzáadott minden további bozon a  $\phi_0$  egyrészecske-alapállapotba kerül. Ez is Bose–Einstein-kondenzáció, csak nem száz százalékos. Minél alacsonyabb a hőmérséklet vagy minél nagyobb az összsűrűség, a bozonok annál nagyobb hányada foglalja el a  $\phi_0$  állapotot. Mindez csak a háromdimenziós térben van így. Egy és két dimenzióban nincs telítődés, példázva azt az általános tételt, hogy egy és két dimenzióban, pozitív hőmérsékleten nem sérülhet folytonos szimmetria, így a mértékinvariancia sem.

A Bose–Einstein-kondenzáció tehát tisztán a Bose-statisztikával összefüggő jelenség. De miért olyan reménytelenül nehéz a kimutatása kölcsönható bozonok rendszerében? Miért áll ellen minden bizonyítási kísérletnek hetven év óta? Miért van az, hogy még nulla hőmérsékleten, az alapállapotban sem tudunk

biztosat mondani felőle? Technikailag a probléma azal függ össze, hogy a  $T$  operátor spektruma folytonos és rés nélküli, ezért bármilyen gyenge legyen is a kölcsönhatás és bármilyen híg a Bose-gáz, a perturbációszámítás nem alkalmazható kielégítő módon. (A csapdázott Bose-gázok esetében a  $T$  operátorhoz hozzáadódik egy, a középponttól távolodva gyorsan növekvő külső  $E$  tér. A  $T+E$  operátor spektrumában már van egy energiarés az alapállapot felett. Ennek köszönhető, hogy a csapdázott kölcsönható híg Bose-gáz kondenzációja matematikailag is bizonyítható volt [3, 4].) A jelenségek szintjén két okot említhetünk. Az egyik a részecskék kvantumossága jellege. Termikus egyensúlyban az őket leíró állapot térbeli kiterjedése a hőmérséklet négyzetgyökével fordítottan arányos, ezért kellően mély hőmérsékleten – bármilyen kevesen legyenek is – a kölcsönható részecskék érzékelik egymás jelenlétét. Ahogy csökken a hőmérséklet, a gáz egyre kevésbé hasonlít az ideális (kölcsönható) Bose-gázhoz. A másik ok, hogy a Bose–Einstein-kondenzációnak van egy vetélytársa, a kristályosodás. A kölcsönható rendszer alapállapota és alacsony hőmérsékleti egyensúlyi fázisa jó eséllyel kristályos. Ha valóban ez a helyzet, akkor olyasmit keresünk, ami nem létezik, legalábbis nem egyensúlyban. Ez a matematikus rémálma, hamis tétel bizonyításán dolgozni. Persze, fennáll egy harmadik lehetőség is, hogy a rendszer részben kristályos, részben Bose-kondenzált. Az ilyen szuperszilárdtestek, amelyek a szuperfolyadék és a kristály jellegzetességeit egyszerre mutatják, ma a kísérleti kutatás izgalmas célpontjai [5, 6]. A versengés a két jelenség között az energiaminimumra (pozitív hőmérsékleten a szabadenergia-minimumra) való törekvésből ered, és abból, hogy a kinetikus és a kölcsönhatási energia nem minimalizálható egyidejűleg. A kinetikus energia a Bose-kondenzátumban a legalacsonyabb, a kölcsönhatási energia pedig a kristályban (tényleg? – erre visszatérünk). A rendszer választása a három lehetőség közül a részecskék tömegétől, a kölcsönhatás részleteitől és a külső körülményektől egyaránt függ.

Az előbbiek tanulsága az, hogy a Bose–Einstein-kondenzáció és a kristályosodás összefüggő problémák, egyszerre értjük vagy nem értjük őket. Ez a megállapítás alacsony hőmérsékletre érvényes, amikor a kvantumeffektusok döntőek. Klasszikusan a Bose–Einstein-kondenzáció nem létezik, a kristályosodás viszont, mint normális (nem extrém) hőmérsékleten végbemenő folyamat, része a klasszikus fizikának is. A klasszikus statisztikus fizikában a részecskék impulzusának és helyzetének eloszlása független egymástól. Az impulzusok egymástól is függetlenek, eloszlásuk termikus egyensúlyban a jól ismert Maxwell-eloszlás. A kristályosodás a részecskék helyzetének eloszlásfüggvényéből olvasható ki. Klasszikusan tehát a kristályosodás egyszerűbb feladat, mint kvantumosan, de ettől még éppoly megoldatlan, mint kvantumosan. És a probléma nem pusztán a folyadék és a kristály közötti fázisátmenet kérdése, hanem már a kristályos alapállapot létezése is!

Vizsgáljuk meg ezt a kérdést kicsit közelebbről. Rendeződési fázisátmenetet nehéz úgy bizonyítani, ha nem tudjuk, milyen rendet keressünk. Egy rendszerben több fázisátmenet is történhet. A legalacsonyabb hőmérsékleten végbemenő rendeződési átmenet a nulla hőmérsékleti, alapállapotú rendet hozza létre. Ismernünk kell tehát a rend mikéntjét legalább a rendszer alapállapotában. Rácson értelmezett spinmodellek esetében, amelyekre a fázisátmenet bizonyítható volt, ez a minimális ismeret többnyire triviálisan rendelkezésre állt. A kristályosodással más a helyzet: rögzített sűrűségen is kontinuum számosságú különböző atomi elrendeződés létezik, ezek között kell megtalálni azokat, amelyek minimálissá teszik az energiát. Nemcsak a kristályrács típusát nem ismerjük, hanem arra sincs garanciánk, hogy az alapállapotú konfigurációk egyáltalán periodikusak. Az alapállapotú konfigurációk megtalálása globális minimalizálási feladat, amelynek megoldására általános párkölcsönhatás esetén nincs módszerünk. Van azonban a kölcsönhatásoknak egy olyan osztálya, amelyre sikerült az alapállapotú konfigurációkat azonosítani [7, 8]. Írásom hátralévő részében ezt az eredményt ismertetem.

A munka fogalmi tisztázással kezdődik. Az atomokat pontokkal,  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots$  ábrázoljuk, feltesszük, hogy csak páronként hatnak kölcsön, és hogy egy  $\{\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j\}$  pár energiája csak a különbségvektortól függ, tehát egy  $u(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$  alakú függvény, amely nullához tart  $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$  növekedtével. A rendszer stabilitásához (a kolapszus elkerüléséhez) szükséges, hogy az atomok egymáshoz közelítése energiába kerüljön, tehát  $u(\mathbf{r}) > 0$  legyen  $|\mathbf{r}|$  kis értékeire. Feltesszük azonban, hogy a taszítás nem végtelenül erős egybeeső helyzetben sem, azaz  $u(\mathbf{0}) < \infty$ . Ha véges sok atomot egy korlátos tartományba zárunk, az energia véges lesz. Ilyenkor az alapállapot definíciója egyszerű: alapállapot minden konfiguráció, amely az energiát minimálissá teszi. Látható azonban, hogy az energiaminimum és az őt megvalósító konfiguráció függ a tartomány alakjától. Ettől az esetleges és a feladatot végeredményben megnehezítő vonástól megszabadulhatunk, ha az alapállapot fogalmát a végtelen pontrendszer körében definiáljuk. Ekkor a teljes energia végtelen, minimalizálása nem értelmes feladat. A fajlagos energia – az egységnyi térfogatra eső energia – minimalizálása már értelmes, de nem elég szelektív. A jó definíció a lokális stabilitásra épül: alapállapot az olyan végtelen konfiguráció, amelynek energiája nem csökkenhet tetszőlegesen nagy számú, de véges sok atom véges távolságon való elmozdításával. Mivel az energiakülönbségek végesek, elvben tetszőleges végtelen konfigurációról eldönthető, alapállapot-e vagy sem. Gyakorlatban a konfigurációk egy családjára kell szorítkozni, és azon belül keresni a lokálisan stabil konfigurációkat. Fontos azután megvizsgálni, hogy az azonosított alapállapot fajlagos energiája minimális-e, legalábbis az adott sűrűségű konfigurációk körében. Ha igen, a megtalált alapállapotot nevezhetjük globálisan stabilnak, ha nem, metastabilnak.

A kristályokban az atomok periodikusan helyezkednek el, ezért azt várjuk, hogy a legtöbb kölcsönhatásnak periodikus az alapállapota. A periodikus rendszerek tanulmányozásának egy igen hatékony eszköze a Fourier-analízis, ez vezetett célra a jelen esetben is. Mindenekelőtt fel kellett tételezni, hogy a párkölcsönhatás Fourier-sorba fejthető, azaz felbontható szinusz- és koszinusz hullámok súlyozott integráljára. További megszorítás, hogy a súlyozó tényező, az  $u(\mathbf{r})$  kölcsönhatás  $v(\mathbf{k})$  Fourier-transzformáltja, pozitív egy adott  $K_0$  hullámszámérték alatt, és nulla felette. (A hullámszám a hullámhossz reciproka, a hosszegységre eső hullámok száma. A Fourier-analízis a háromdimenziós térben háromdimenziós  $\mathbf{k}$  hullám(szám)vektorokat használ, amelyek komponensei a tér három irányában haladó hullámok hullámszámjai. A  $K_0$  érték e vektorok hosszára vonatkozik:  $v(\mathbf{k}) > 0$ , ha  $|\mathbf{k}| < K_0$  és  $v(\mathbf{k}) = 0$ , ha  $|\mathbf{k}| \geq K_0$ .) Már volt róla szó, hogy a legegyszerűbb periodikus szerkezetek a Bravais-rácsok, ezek egyetlen atomot tartalmaznak az elemi cellájukban. Minden rácspontnak ugyanolyan a relatív helyzete a rács egészéhez képest, és ezért minden egyes atomnak ugyanaz az összegezett kölcsönhatási energiája a rács összes többi atomjával. Ezt a  $B$  Bravais-rácson futó végtelen összeget egy klasszikus, *Poisson*tól származó képlet segítségével fel lehet írni egy másik, általában végtelen összeg alakjában, amely egy  $B^*$  Bravais-rácson, a  $B$  duális- vagy reciprokrácsán fut, az összegezendő mennyiség pedig  $v(\mathbf{k})$  a  $B^*$  pontjaiban. Mivel most a Fourier-transzformált nulla a  $K_0$ -nál hosszabb hullámvektorokra, a végtelen összeg végessé redukálódik. Ebben a véges összegben mindig ott van a nulla hullámvektor szerkezettől független  $v(\mathbf{0})$  járuléka, mert az origó minden reciprokrácsnak közös pontja. A duális rácspárok fontos tulajdonsága, hogy sűrűségeik szorzata állandó. Ha az atomok Bravais-rácsának  $\rho$  sűrűsége nő, a reciprokrács sűrűsége csökken, és előbbutóbb  $B^*$  minden nemnulla vektorának hossza meghaladja  $K_0$ -t, amelynél  $v(\mathbf{k})$  eltűnik. A sűrűség, amelynél ez megtörténik, függ a rács típusától. A különböző típusú, de egyforma  $\rho$  sűrűségű rácsokat összehasonlítva: Azon rácsook fajlagos energiája, amelyek duálisának nincs  $K_0$ -nál rövidebb nemnulla vektora, egy közös, a szerkezettől független  $e_p$  érték, míg az olyan rácsook fajlagos energiája, amelyek duálisának a  $\rho$  sűrűségen van a  $K_0$ -nál rövidebb nemnulla  $\mathbf{K}$  vektorral megadott pontja, ennél nagyobb,  $v(\mathbf{K})$  pozitív járulékanak köszönhetően. Belátható, hogy létezik egy legkisebb sűrűség és egyetlen, ehhez tartozó  $B$  rács, amelynél  $B^*$  legrövidebb nemnulla vektorának éppen  $K_0$  a hossza. Három dimenzióban ez a sűrűség

$$\rho^* = \frac{K_0^3}{8\sqrt{2}\pi^3},$$

$B$  pedig a tércentrált köbös rács. Ez azt jelenti, hogy a  $\rho^*$  sűrűségen a tércentrált köbös rács fajlagos energiája kisebb, mint bármelyik más Bravais-rácsé; ha tehát a tércentrált köbös rács lokálisan stabil, akkor a Bravais-rácsok között ez az egyetlen alapállapot.

A Fourier-analízis kiterjeszhető volt a lokális stabilitás vizsgálatára is, és meg lehetett mutatni, hogy a  $\rho^*$  sűrűségen a tércentrált köbös rács az egyetlen alapállapot nemcsak a Bravais-rácsok között, hanem a konfigurációk egy nagyobb családján belül, amely a periodikus konfigurációkat és ezek unióit tartalmazza. Ha a sűrűség  $\rho^*$ -nál nagyobb, az alapállapotok között más Bravais-rácsok és ezek periodikus és nemperiodikus uniói is megjelennek. A fajlagos alapállapot energiája minden esetben  $e_p$ , és ez az érték az adott sűrűségen elérhető abszolút minimum. A megtalált alapállapotok tehát globálisan stabilak.

Felvetődik a kérdés, mi a köze mindennek a természetben végbemenő kristályképződéshez? A párkölcsönhatás korlátossága a szerves kristályok (sók, fémek) körében nem reális feltevés. Érvényesül ugyanis a Pauli-elv, amely gyakorlatilag végtelenül erős taszításban nyilvánul meg az atomok, ionok átlapolása esetén. Molekulák, polimerek kristályai azonban jól leírhatók a tömegközéppontok közötti párkölcsönhatással, és a tömegközéppontok átlapolásának nincs fizikai akadály. Másrészt, a párkölcsönhatás módosítható egy véges hatósugarú, tetszőleges erősen taszító kölcsönhatás hozzáadásával. A fent leírt eredmények még érvényben maradnak egy felülről is behatárolt sűrűségtartományban [8]. A  $v(\mathbf{k})$  Fourier-transzformáltra tett két feltevés erősen megszorító jellegű, azonban a természetben léteznek ilyen effektív erők a

fémbebeli ionok között. Valóban,  $v(\mathbf{k})$  levágása  $K_0$ -nál az  $u$  potenciálban oszcillációt és hatványfüggvény szerinti lecsengést idéz elő, és megkapható ily módon a fémfizikából ismert Ruderman–Kittel–Kasuya–Yosida- vagy Friedel-potenciál. Az alkalmazhatóságot leginkább az korlátozza, hogy az eredmény a  $\rho^*$ -nál kisebb sűrűségekre nem érvényes.

Beszámolómat azzal kell zárjam, hogy mind a Bose–Einstein-kondenzáció, mind a kristályosodás problémája a tagadhatatlan előrelépés ellenére lényegében megoldatlan. Íme két szép feladat a matematikai fizikusok újabb nemzedéke számára.

#### Irodalom

1. A. Sütő: Equivalence of Bose–Einstein condensation and symmetry breaking. *Phys. Rev. Lett.* 94 (2005) 080402.
2. E. H. Lieb, R. Seiringer, J. Yngvason: Justification of c-number substitutions in bosonic Hamiltonians. *Phys. Rev. Lett.* 94 (2005) 080401.
3. E. H. Lieb, R. Seiringer: Proof of Bose–Einstein condensation for dilute trapped gases. *Phys. Rev. Lett.* 88 (2002) 170409.
4. A. Sütő: Thermodynamic limit and proof of condensation for trapped bosons. *J. Stat. Phys.* 112 (2003) 375–396.
5. E. Kim, M. H. W. Chan: Probable observation of a supersolid helium phase. *Nature* (London) 427 (2004) 225.
6. E. Kim, M. H. W. Chan: Observation of superflow in solid helium. *Science* 305 (2004) 1941.
7. A. Sütő: Crystalline ground states for classical particles. *Phys. Rev. Lett.* 95 (2005) 265501.
8. A. Sütő: From bcc to fcc: Interplay between oscillating long-range and repulsive short-range forces. *Phys. Rev. B* 74 (2006) 104117.

## SZOCIOFIZIKA: HUMÁN KAPCSOLATOK HÁLÓZATA NAGY SKÁLÁN

Palla Gergely

MTA–ELTE Statisztikus és Biológiai Fizika Tanszék

Kertész János

BME Fizikai Intézet

A hálózatok kutatás igazi multidiszciplináris tudomány, matematikusok, fizikusok, vegyészek és biológusok egyaránt hozzájárulnak. A „kemény” tudományok művelőit talán meglepi, de ez a terület sokat köszönhet a szociológiának is, amelynek keretében már a 30-as évektől kezdve tanulmányoztak emberek kis méretű kapcsolati hálózatokat, és fontos felismeréseket tettek. (Itt meg kell említeni a világhírű *Mérei Ferenc* nevét.) Az adatgyűjtés alapvető eszközei a kérdőívek voltak. Az ilyen vizsgálatok előnye, hogy a kapcsolatokról nagyon részletes információkat lehet kapni: milyen az ismeretség, milyen erős a kapcsolat, mennyire

kölcsönös, érzelmileg hogyan viszonyulnak egymáshoz a vizsgált személyek stb. Ezzel szemben nagy hátrány, hogy az ilyen módon tanulmányozható minta mérete erősen korlátozott, továbbá a válaszokból a szubjektivitást nem lehet teljesen kiszűrni.

A hálózati megközelítés közben nagy sikereket hozott biológiai, technológiai és gazdasági problémák vizsgálatánál is, amelynek eredményeként mára a komplex hálózatok témaköre önálló, interdiszciplináris tudományterületté fejlődött [1]. Fontos szerep jutott ezen a téren a fizikusoknak is, ugyanis a sok kölcsönható alegységből álló rendszerek tárgyalására kidolgozott statisztikus fizikai megközelítés rendkívül gyümölcsözőnek bizonyult. Ez a fajta megközelítés több fontos új eredménnyel bővítette a korábbi, kisméretű társaskapcsolat-hálózati mintákon szerzett ismereteket. Az információtechnológia utóbbi két évtizedben bekövetkezett rohamos fejlődésének köszönhetően olyan új lehetőségek nyíltak meg az emberi

A szerzők kutatásait az OTKA K68669 és K60456 jelű pályázatai támogatták.

A szerzők köszönettel tartoznak Szabó Gábornak, Barabási Albert-Lászlónak és Vicsek Tamásnak, valamint az ezen cikk alapjául szolgáló korábbi publikációk további társszerzőinek is.