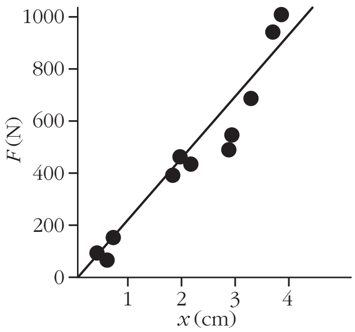

4. ábra. Erő–benyomódás grafikon

1. táblázat

Különböző labdajátékok labdájára jellemző ütközési adatok

Játék neve	sebesség (m/s)	tömeg (kg)	ütközési idő (s)	átlagos erőhatás (N)	átlagos gyorsulás (*g*)
futball	25	0,45	10^{-2}	2250	500
tenisz	30	0,06	$5\cdot10^{-3}$	720	1200
pingpong	15	0,0025	–	–	–
golf	70	0,05	$3–5\cdot10^{-4}$	23300–14000	46700–28000

fej, hanem jóval nagyobb tömeg ütközik, ezért a valóságban a gyorsulás jóval kisebb.

A fotó alapján végzett elméleti meggondolásaink mérőkísérlettel is megerősíthetők.

Az erő–benyomódás függvény lineáris közelítése kísérletileg iskolai körülmények között is alátámasztható. Ennek elvégzéséhez célszerű elkészíteni két rajztáblából a *3. ábrá*n látható egyszerű eszközt. (Fontos, hogy a felső lap a vezetést szolgáló négy függőleges rúdon könnyen mozogjon. A méréshez a szabványosan felfújt labdát helyezzük a két deszkalap közé; majd terheljük a felső lapot egyre nagyobb erőkkel úgy, hogy a felső rajztábla mindvégig vízszintes helyzetben maradjon, és ne szoruljon a vezető rudakhoz. A terhelés kezdeti értéke 10–20 kg legyen, majd először kisebb, később egyre nagyobb súlyú tanulók álljanak rá a lapra. Mérjük meg vonalzóval a különböző terheléseknél a két lap távolságát. A *4. ábra* egy ilyen módon felvett erő–benyomódás grafikont mutat be.

A labda ütközésének idejét gyorsfilmezéssel, illetve érzékelő lapnak rúgott labda esetén a számítógépes technikával mérik. A mért ütközési idők századmásodperc értékűek.

A futball-labda esetén alkalmazott gondolatmenethez hasonlóan természetesen a többi labdajátékra jellemző erő- és gyorsulásértékek is meghatározhatók. Különböző labdák összehasonlításra alkalmas ütközési adatait tartalmazza az *1. táblázat.*

A FIZIKA TANÍTÁSA

NYUGALMI VS. RELATIVISZTIKUS TÖMEG

Szondy György
Budapest

„…a relativisztikus tömeg fogalma sok népszerű tudományos könyvben megjelenik. … *Hawking, Feynman* és mások a relativisztikus tömeg fogalmát használják, mert ez egy ösztönös és hasznos módja, ha matematika nélkül szeretnénk elmagyarázni a dolgokat. Úgy tűnik, néhány fizikus számára elfogadott szabály, hogy nyugalmi tömeget használnak tudományos, míg relativisztikus tömeget ismeretterjesztő írások esetén. Ez a terminológiai kettősség elkerülhetetlenül zűrzavarhoz vezet.” [1]

A fogalmak tisztázása a fizika tanítása során alapvető követelmény. A címben és az idézetben említett témában az elmúlt években több írás született és jelent meg a *Fizikai Szemle* hasábjain is. A vita, ha vitának nevezhetjük egyáltalán, valójában arról folyik, pontosan mi is az a mennyiség, amit tömegnek hívunk. Ennek során rendszerint figyelmen kívül szokták hagyni azt a tényt, hogy a tömeg fogalmát a fizika tudománya és a köznapi (és mérnöki) gyakorlat egyaránt használja, így az objektivitás megkívánja, hogy mindkét terület szempontjait figyelembe vegyük. Ebben az írásban tehát igyekeztem egy objektív, áttekinthető képet adni a tömeg fogalmával kapcsolatos terminológiai kettősségről, tisztázni annak okát és mibenlétét.

Miről is van szó?

A nyugalmi tömeg fogalmát mindenki érti és elfogadja. Könnyű a helyzet, hiszen nyugalmi esetben a klasszikus, newtoni tömegfogalomhoz képest semmilyen „komplikáció” nem lép fel. Más a helyzet persze relativisztikus körülmények között: a tapasztalatok azt mutatták, hogy relativisztikus hatások miatt a sebességgel a testek tömege látszólag megnő, méghozzá az alábbi képlet alapján:

$$m_{rel} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{1}$$

Ezt a mennyiséget nevezzük relativisztikus tömegnek. A képlet egyszerűsége ellenére a relativisztikus tömeg mibenléte, értéke nem egyértelmű, létjogosultsága pedig erősen vitatott [8]. A kérdés tisztázásához a tömeg definíciójához kell visszanyúlnunk.

Tömegdefiníciók

Internet

A különböző források különböző dolgokat állítanak a tömegről. Az internetre bárki bármit feltehet: ilyen szempontból tehát nem megbízható forrás – még akkor sem, ha az ember igyekszik csak *edu, nasa, gov* és hasonló oldalakra támaszkodni. Ennek ellenére fontosnak tartom megemlíteni, hogy az ott talált tömegdefiníciók kétfélék: vagy nemrelativisztikusak (50%), vagy a nyugalmi tömeg mellett definiálják a relativisztikus/látszólagos tömeget is. A két csoport közül – mind alaposság, mind pedig a forrás megbízhatósága szempontjából – ez utóbbiak, a relativisztikus definíciók a leginkább bizalomkeltők [1–3].

Tankönyvek, szakkönyvek

Alaposság tekintetében sokkal jobb a helyzet az általam fellapozott tankönyvek, szakkönyvek, illetve egyéb szakmai publikációk esetén. A következőkben néhány – a tömeg fogalma szempontjából lényeges – definíciót gyűjtöttem ki.

Hraskó Péter könyvében [4] ugyan „mozgási”, illetve „látszólagos tömeg” néven definiálja a relativisztikus tömeget (W/c^2), de a „tömeg” fogalmat – az „energia” és „nyugalmi energia” fogalmak használata mellett – kizárólag „nyugalmi tömeg” jelentéssel használja. Sőt, a mozgási (relativisztikus) tömeg fogalmát deklaráltan nem használja. Ezen kívül külön hangsúlyozza azt is, hogy a könyvben használt fogalmak esetén $E = mc^2$ helyett csupán $E_0 = mc^2$ igaz, vagyis az energia és tömeg általános ekvivalenciája nem áll fenn. ([4] 111. o.)

A Landau-sorozat vonatkozó kötete [5] tartalmaz egy olyan definíciót, miszerint „Súlyos tömegnek nevezzük azt az adatot, amely meghatározza a test által keltett gravitációs tér erősségét.” Ez a definíció értékben megegyezik a – Hraskó Péter által mozgási, vagy látszólagos néven emlegetett – relativisztikus tömeg (E/c^2) értékével.[1] Ugyanitt a tehetetlen tömeg értéke csak a nyugalmi állapot esetére van megadva. ([5] 429. o.)

A relativisztikus tömegnövekedésre legrészletesebben *Jánossy Lajos* könyve [6] tér ki. Ebből emeltem ki néhány fontosabb momentumot. „A jelenséget *Lorenz* már 1909-ben az (1) képlet formájában adta meg. Magát a hatást *Kaufmann* viszont már jóval előbb, 1901-ben kimérte, de nem elég pontosan ahhoz, hogy a Lorenz-képlet kvantitatív helyessége eldönthető lett volna – erre még 1940-ig várni kellett. Végül 1958-ban protonkísérletekkel a Lorenz-féle képletet a fénysebesség 83%-a mellett 0,1% pontossággal igazolták.” ([6] 40. o.)

[1] A relativisztikus tömeg esetén természetesen figyelembe kell venni a gravitációs energia hatását is.

[2] t az adott inerciarendszerben mért idő.

A továbbiakban tehát a felmerült tömegdefiníciókat veszem sorra, mégpedig:

1. Newtoni tömegdefiníció: a tömeg a tehetetlenség mértéke ($F = ma$).
2. Nyugalmi tömeg: mely szerint tömeg és nyugalmi energia ekvivalens ($m = E_0/c^2$).
3. Relativisztikus tömeg: mely szerint tömeg és energia ekvivalens ($m = E/c^2$).
4. Gravitációs tömeg: az az érték, mely meghatározza a test által létrehozott gravitációs tér erősségét [5] ($m = E/c^2$).

A tömeg a tehetetlenség mértéke

A hagyományos, nemrelativisztikus definíció szerint a tömeg a tehetetlenség mértéke, vagyis inerciarendszerben $F = ma$. Pontosabban

$$F = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = m\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}. \tag{2}$$

Ezen definíció használata esetén, mozgó testet vizsgálva, azt tapasztaljuk, hogy az erő és a gyorsulás hányadosának számértéke a sebességgel változik. Ez a változás ráadásul a mozgással párhuzamos és arra merőleges irányokban különböző. A tömeg ilyetén definíciójának ezt a következményét legrészletesebben Jánossy Lajos [6] írta le, de a problémának Hraskó Péter is szentelt egy cikket a *Fizikai Szemle* egy korábbi számában [7].

Természetesen Landau [5] is foglalkozik ezzel a jelenséggel, és kimondottan kerüli, hogy az így kapott hányadost tömegnek nevezze. Ennek oka, hogy míg a newtoni definíció feltételezi a tömeg állandóságát, addig a fenti képlet relativisztikus esetre általánosítva az alábbiak szerint módosul:[2]

$$F = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(m\,v)}{\mathrm{d}t} = v\,\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} + m\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}, \tag{3}$$

ahol a jobb oldal első tagja arra utal, hogy az erő nem kizárólag gyorsításra, hanem részben a tömeg megváltoztatására is fordítódik. A sebességre merőleges gyorsítás esetén ez az első tag zérus, így az erő és gyorsulás hányadosa („transzverzális tömeg”) megegyezik a relativisztikus tömeg számértékével. Mozgással párhuzamos erő esetén viszont az erő és a gyorsulás hányadosa a relativisztikus tömeg értékénél nagyobbnak adódik, amint azt a (4) egyenlet bal oldalán láthatjuk.

$$\begin{aligned} \frac{F}{a} &= \frac{v\,\mathrm{d}m_{rel}}{\mathrm{d}v} + m_{rel} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{m_0\,v^2}{c^2\left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}\,\mathrm{d}v + \frac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}\,\mathrm{d}v = \\ &= \frac{m_0}{\left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}. \end{aligned} \tag{4}$$

Mint sejthettük, az egyenlet egyszerűsítése után a jobb oldalon az ismert „longitudinális tömeg” képletét találjuk, ami – fizikai értelemben – nyilván már nem tekinthető tömegnek.

Mindezeket összegezve: nem véletlen, hogy a tömeg eredeti, az alcímben említett newtoni definícióját a vizsgált tankönyvek egyértelműen elutasítják, a módosított, relativisztikus egyenlet (3) ugyanis már nem alkalmas a tömeg definiálására.

Az $E = mc^2$ vita

Valószínűleg ez az *Einstein* nevével fémjelzett fizikai összefüggés a világon a legismertebb. Éppen ezért úgy tekintünk rá, mint a mai fizika egyik alappillérére. Mégis, amint az a relativisztikus tömegre vonatkozó értelmezésekből kitűnik, még ma is éppen e képlet körül van a legalapvetőbb vita.

Az egyik értelmezés szerint ugyanis az egyenlet bal oldalán egy test belső energiája szerepel (a kinetikus és potenciális energia levonása után), a másik oldalon pedig – ebből következően – a nyugalmi tömeg értéke. A modern fizikában általában ezt az értelmezést használják [7]. A másik értelmezés szerint a képlet a tömeg és energia általános ekvivalenciáját, így a tömeg definícióját adja meg [9]. Mint látni fogjuk, éppen ez a két eltérő megközelítés az egyik fő forrása a relativisztikus tömeg körüli végtelennek tűnő vitának.

A tömeg, mint nyugalmi tömeg

Amíg a nyugalmi tömeg egy igen fontos, invariáns mennyiség, addig a relativisztikus tömeg megfigyelőfüggő, tehát nem invariáns. Mivel pedig az általános elméletek alapvető célja a fizikai jelenségek megfigyelőfüggetlen leírása [10], így azt is mondhatnánk, hogy a modern fizikában egyetlen tömegfogalomnak van létjogosultsága, ez pedig az invariáns, más néven nyugalmi tömeg. Nem véletlen tehát, hogy a modern fizikusok egy emberként állnak ki a „tömeg” = „nyugalmi tömeg” értelmezés mellett.

A „nyugalmi tömeg” definíciónak a „hétköznapi” használatban is van néhány előnye. Például, hogy ebben a speciális esetben a tömeg és energia ekvivalenciája, illetve az erő és a gyorsulás arányára vonatkozó (newtoni) definíció ($F = ma$) egyszerre van érvényben. Megfigyelhető, hogy azt a jelenséget, miszerint „minél nagyobb sebességgel mozog egy test, annál nehezebb tovább gyorsítani” egyszerűen elkerülik úgy, hogy a gyorsulást mindig együttmozgó rendszerben írják le, és az említett jelenséget Lorenz-transzformáció alkalmazása után az idődilatációra vezetik vissza [8].

Fontos áttekintenünk mi is a helyzet makroszkopikus testek esetén, ahol a testet alkotó részecskék tömegét egyenként nem lehet mérni. De ha lehetne is, ezek nyugalmi tömege nem összegződik. Mind a Landau-, mind a Hraskó-könyv egyértelműen leírja, hogy makroszkopikus test esetén a nyugalmi tömeg a nyugalmi energiából számolható, vagyis a részecskék kötési és kinetikus energiája is tömegként jelenik meg. Ez alapvetően a relativisztikus tömegdefinícióra emlékeztet, persze leszűkítve a makroszkopikus méretekben nyugalomban lévő rendszerek vizsgálatára. „Még nehezebb a tömeg–energia szétválasztás akkor, amikor mezőket és nyugalmi tömeggel rendelkező anyagból álló közeget, nem ideális, hanem disszipatív kontinuumokat szeretnénk leírni.”[3]

Relativisztikus tömeg

A relativisztikus tömeg fogalmának használata esetén Einstein híres képletét definícióként fogadjuk el és a tömeg értékét az energiából számoljuk ($m = E/c^2$).

Abban egyetértés van, hogy nemrelativisztikus (nyugalmi) esetben a két megközelítés között nincs különbség [7]. Azt azonban kevésbé szokták hangoztatni, hogy nyugalmi tömeggel rendelkező relativisztikusan mozgó testek esetén az objektumok mozgásában éppen ez az E/c^2 relativisztikus tömeg játszik szerepet. A tömegnövekedés mérése is éppen ezen a jelenségen alapul. Fontos megjegyezni, hogy a nyugalmi tömeggel nem rendelkező sugárzásokra (pl. rádióhullámokra) nyilván nem a newtoni mozgásegyenletek vonatkoznak, így ezekre a newtoni értelemben vett tehetetlen tömeg fogalma (akár nyugalmi, akár relativisztikus) sem értelmezhető.

Gravitációs tömeg

A nyugalmi tömeg mellett fontos, elfogadott fogalom a gravitációs tömeg. Landau-féle definíció szerint „Súlyos tömegnek nevezzük azt az adatot, amely meghatározza a test által keltett gravitációs tér erősségét” [5]. Ez a súlyos, helyesebben gravitációs tömeg egyértelműen az energiából vezethető le [7], így értéke megegyezik relativisztikus tömegével, míg értelmezési tartománya nem korlátozódik a nyugalmi esetre, hanem igaz a relativisztikusan mozgó testekre és a nyugalmi tömeggel nem rendelkező sugárzásokra is.

A gravitációs tömeg értékében – és tulajdonképpen definíciójában is – megegyezik a relativisztikus tömegével.[4] Ez a mennyiség természetes módon nem kovariáns, mégis jól definiált, hiszen az energiával, vagyis a kovariáns négyesimpulzus időszerű komponensével arányos érték. Speciálisan, együttmozgó esetben megegyezik a nyugalmi tömeggel.

[3] A lektor megjegyzése alapján

[4] Fontos megjegyezni, hogy a gravitációs tömeg ilyetén definíciója újabb kérdéseket vet fel a gravitációs energia és a tömeg viszonyával kapcsolatban, melyek tárgyalása jóval túlmutat egy ilyen cikk keretein, ezért itt nem is térünk ki rá. Azt jegyzem meg csupán, hogy ezek a tömegfogalmak inkább tartoznak a gravitáció posztnewtoni leírásához, mint az általános relativitáselmélet fogalomrendszeréhez.

Van-e kompromisszum?

Én az ésszerű kompromisszumok híve vagyok. Bár mondhatjuk, hogy a tudományos igazságot illetően kompromisszumoknak nincs helye, de itt másról van szó. Van két, rokon fizikai mennyiség, melyekre ugyanazt a szót használjuk. A helyzet nem rendezhető úgy, hogy valamelyiket – jelen esetben a relativisztikus tömeget – egyszerűen „lehúzzuk a listáról”. Lássuk be: ez nem volna tudományos hozzáállás.

A látszólagos ellentmondás feloldására az egyetlen korrekt megoldásnak a két tömegfogalom viszonyának „rendezését” látom. Ez – mint ahogy az alábbiakban látni fogjuk – egyáltalán nem bizonyul bonyolultnak.

Adott inerciális vonatkoztatási rendszerben a $\boldsymbol{v}^{\mathrm{IV}}$ négyessebesség (c = 1 helyettesítéssel):

$$\boldsymbol{v}^{\mathrm{IV}} = \frac{(1, \boldsymbol{v})}{\sqrt{1 - v^2}}. \tag{5}$$

Ebből a $\boldsymbol{p}^{\mathrm{IV}}$ négyesimpulzus:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p}^{\mathrm{IV}} = m\boldsymbol{v}^{\mathrm{IV}} &= \left(\frac{m}{\sqrt{1 - v^2}}, \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - v^2}} \right) = \\ &= \left(m_{rel}, m_{rel}\boldsymbol{v} \right) = \left(m_{rel}, \boldsymbol{p} \right). \end{aligned} \tag{6}$$

A képletről egyértelműen leolvasható, hogy a nagyoknak igaza van akkor is, amikor nyugalmi, és akkor is, amikor relativisztikus tömeget használnak. Ugyanis a hármassebesség fogalmához természetes módon a relativisztikus tömeg fogalma tartozik, míg a tudományos írásokban, ahol a négyessebesség van használatban, kizárólag az invariáns, nyugalmi tömeg fogalmának van értelme.

Helyzetértékelés

A kezdetektől nyilvánvaló, hogy a témában fogalmi vita folyik:

– Valóban megtévesztő és ellentmondásos-e a relativisztikus tömeg fogalma?

– Van-e értelme egy, az energiával arányos, tömeg jellegű, megfigyelő függő mennyiséget bevezetni?

Szerintem nyugodtan kimondható, hogy a relativisztikus tömeg fogalma nem ellentmondásos, hiszen – mint láttuk – egy jól definiált mennyiség.

Azt is tapasztalhattuk, hogy a „relativisztikus tömeg” fogalmának létezése tény. Nem bevezetésről van tehát szó, hanem egy mélyen gyökerező szemléletről. Így aztán nyilván nem is fogjuk tudni az emberek százmillióit rábeszélni arra, hogy felejtsék el. Ráadásul mindaddig, amíg a hétköznapi életben „sebesség” alatt nem négyessebességet értünk, vagyis amíg e klasszikus fogalomrendszer használatban van (és amíg a speciális relativitáselméletet is ebben a fogalomrendszerben tanítják), addig az ehhez tartozó tömegfogalom sem vonható ki a forgalomból. Az lenne a fontos, hogy egyértelműen helyezzük el fizikai fogalomrendszerünkben és a fizikatanításban: mikor és mire használjuk, mikor és mire ne, gondoskodjunk róla, hogy ne legyen félrevezető.

Köszönetnyilvánítás

Köszönet Hraskó Péternek az őszinte véleményért és a vitáért, amit a témáról vele folytathattam, illetve másoknak, akik véleményükkel és magyarázatukkal döntő módon hozzájárultak ahhoz, hogy a fizikusok relativisztikus tömegről való vélekedését, ellenvetéseit megismerjem, illetve, hogy megállapításaimat „fizikus” nyelven megfogalmazhassam.

Irodalom

1. Carr, J.: *Usenet Physics FAQ: Does mass change with velocity?* http://math.ucr.edu/home/baez/physics/Relativity/SR/mass.html
2. *Mass in special relativity.* Wikipedia, http://en.wikipedia.org/wiki/Mass_in_special_relativity
3. *HyperPhysics*. Georgia State University, http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/relativ/tdil.html#c3 és http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/mass.html#mas
4. Hraskó P.: *Relativitáselmélet.* Tipotex, Budapest, 2002.
5. Landau, Lifsic: *Elméleti fizika II.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1972.
6. Jánossy L.: *Relativitás Elmélet a fizikai valóság alapján*. Akadémiai kiadó, Budapest, 1973.
7. Hraskó P.: Ekvivalens-e egymással a tömeg és az energia? *Fizikai Szemle 53/9* (2003) 330. és http://www.hrasko.com/peter/ekvi.pdf
8. Hraskó P.: A relativitáselmélet tanításáról. *Fizikai Szemle 56/2* (2006) 61. és http://www.hrasko.com/peter/mozgasi.pdf
9. Einstein, A.: *Einstein Explains the Equivalence of Energy and Matter.* http://www.aip.org/history/einstein/voice1.htm
10. Ostwald, W.E.: *Emancipálódás a tudományos materializmusból.* http://www.kfki.hu/chemonet/hun/olvaso/histchem/mol/ostwald.html