

A piaci kockázat modellezése: egy kopula-megközelítés

KÜRTI LÁSZLÓ-ÁDÁM¹

A dolgozat célja, hogy pontos és transzparens kockázatotott érték (VaR) becslést nyújtsunk egy öt romániai részvényt tartalmazó portfólió szintjén. A modellezési eljárás mögött álló koncepció az, hogy a hozam-variancia modellezést egy nemlineáris megközelítésben építsük fel, az extrém, szélsőséges értékek külön modellezésre kerüljenek, valamint hogy a portfólión belül egy függőségi rendszert határozzunk meg. Ezen gondolatmenetet követve, az elemzés első lépésében egy GARCH-modellt becslünk, mely a hozam és variancia becslött értékeit határozza meg az egyes értékpapírok esetében, majd extrém érték elméletet (EVT) alkalmazunk, hogy a szélsőséges kilengéseket meg- ragadjuk az adatsorban. Egy Student t-kopula segítségével meghatározzuk a portfólión belüli interdependencia szerkezetét, valamint szimuláljuk a portfólió jövőbeli veszteség-eloszlását. A bemutatott metodológia alkalmazásán keresztül gyakorlatilag egy piaci kockázat menedzselési platformot hozunk létre, melyet pragmatikusan GARCH-EVT-KOPULA platformnak nevezhetünk, és amely által pontos és transzparens kockázatotott érték becslést kapunk a portfólió szintjén.

JEL kódok: G17, G11

Kulcsszavak: piaci kockázat, nemlineáris, GARCH, extrém érték elmélet, kopula, kockázatotott érték.

Bevezetés

A piaci kockázat a klasszikus meghatározás szerint a kereskedési portfólió értékének, illetve banki jövedelmeknek az ingadozása a piaci kockázati tényezők (piaci árak, kamatlábak, árfolyamok) ingadozásának hatására. Nagy értékű kereskedési portfólióval rendelkező pénzintézetek számára a piaci kockázat megfelelő modellezése és mérése elsődleges szemponttá vált az elmúlt néhány évben, tekintve, hogy ezen entitások rendkívül érzékenyek az extrém, szélsőséges piaci mozgásokkal

¹ Babeş-Bolyai Tudományegyetem, Közgazdaság- és Gazdálkodástudományi Kar, Kolozsvár

szemben. Például azon nemzetközi tevékenységet és tranzakciókat lebonyolító bankok, melyek szignifikáns kereskedési portfólióval rendelkeznek, kötelező módon kockázati tőkét kell allokálnak a piaci kockázati kitettségből származó nem várt veszteségeikre. Ebben a kontextusban a kockázatosított érték (Value-at-Risk, VaR) a pénzügyi szférában legnépszerűbb és leggyakrabban használt piaci kockázati mérőszám, elsősorban egyszerűségének és könnyű értelmezhetőségének köszönhetően. Jelen dolgozat elsősorban arra fókuszál, hogy a lehető legpontosabb és legmegbízhatóbb VaR-értéket becsülő kockázatmenedzselési platformot dolgozzon ki. Ezt szem előtt tartva, a kihívás a 2007-ben kirobbant gazdasági válságot követően már nem abban áll, hogy megfelelő modellt találjunk a piaci kockázat paramétereinek meghatározására, hanem abban, hogy a rendelkezésre álló módszereket társítva a XXI. századot jellemző kifinomult technológiai háttérrel, olyan kockázatmenedzselési platformot dolgozzunk ki, melynek megbízhatósága és pontossága enyhíti a válság okozta bizonytalan pénzügyi környezet hatásait.

1. Szakirodalmi áttekintés

A részvényhozamok eloszlásának modellezése GARCH, extrém érték modellek (EVT) és kopulák felhasználásán keresztül számos kutatásban kerül alkalmazásra és tesztelésre, mind általános piaci szempontból, mind specifikusabb pénzügyi szemléletmódból.

Hotta, L.K. et al. (2006) a kockázatosított értéket EVT és kopula-megközelítéssel becslik. A hozamok modellezése standard GARCH-modellen keresztül történik, az elemzés alapjául szolgáló portfólió alkotóelemei az IBOVESPA és Merval² tőzsdeindexek. Az általuk használt Gumbel-kopulán és általános Pareto-eloszláson alapuló VaR-becslés eredményeit a hagyományos módszerek eredményeivel hasonlítják össze. Eredményeik alapján a kopula-megközelítés jobban teljesít, mint a három hagyományos modell, a BEKK-modell (Engler–Kroner 1995), a DCC-modell (Engle 2002) és az EWMA-modell. Hasonló modellen keresztül Jondeau et al. (2001) egy portfólió-szintű interdependenciát határoznak

² Brazíliai és argentinai tőzsdeindexek.

meg. A standard GARCH-al ellentétben, Jondeau, E. és Rockinger, M. (2002) a Hansen-féle GARCH-modellt használják a hozamok volatilitásának modellezésére, valamint egy Student t-kopulát a függőségi struktúra modellezésére. A két dolgot összehasonlítva levonható a következtetés, miszerint az aszimmetrikus GARCH-modell a hozam-variancia dinamikus mivoltát pontosabban ragadja meg, mint a standard modell, valamint a Student t-kopulán keresztül a hozamokban fellelhető többlet-csúcosságot (kurtóvizist) jobban lehet magyarázni, mint a Gumbel-kopulával.

Kole, E. et al. (2006) az előbbi két cikkben taglalt Student t-kopulát hasonlítják össze a Gumbel-kopulával és a Gauss-féle kopulával. Az elemzést egy terjedelmes, számos értékpapírt tartalmazó portfólión keresztül végzik el. Következtetések szerint a Student t-kopulához képest a Gauss-kopula alulbecsüli, míg a Gumbel-kopula felülbecsüli a veszteségeloszlást. Ugyanakkor kimutatják, hogy a Gauss-kopula a diverzifikáció hatékonyságát tekintve túlzottan optimista, míg a Gumbel-kopula pesszimista. A Gauss- és Gumbel-kopula tehát két végletként fogható fel, melyek között a Student t-kopula lehet az „arany középút”. Kole, E. et al. kutatásával összhangba hozható Nystrom, K. és Skoglund, J. (2002) elemzése, akik a becslések pontosságát a GARCH-modellek innováció³-eloszlásában keresik. Eredményeik szerint a normális eloszlás alulbecsüli az alsó farkot és felülbecsüli a felső farkot, míg a t-eloszlás mindkét farkot felülbecsüli. A két kutatás között analógiát keresve, a Student t-eloszlás arany középút helyett inkább „best practice”-nek mondható.

Az előbbi négy dolgozattal ellentétben, Eksi, Z. et al. (1996) a GARCH-EVT megközelítés hátrányaira hívja fel a figyelmet, elsősorban a GARCH-módszer által meghatározott „túlzott”, nyomatékos volatilitás-dinamizmusra, majd az ehhez tartozó EVT-küszöbérték becslésre. A nagy volatilitású napi hozamértékek esetében a küszöbérték folyamatos újrabecslése könnyen az eredmények (számolt VaR) irrelevanciájához vezethet.

Hansen, P. és Lunde, A. (2001) a szakirodalomban fellelhető legmélyrehatóbb GARCH-elemzést végzik el. 330 GARCH-modellt hasonlí-

³ Standardizált reziduumok.

tanak össze (szimmetrikus és aszimmetrikus GARCH-modelleket egyaránt), arra keresve a választ, hogy melyik írja le a legjobban a volatilitás dinamikus alakulását. Eredményeik meglepőek, hiszen nincs arra utaló bizonyíték, hogy bármely, időben később kidolgozott GARCH-modell képes lenne a standard normális GARCH(1,1) modellt túlteljesíteni. Az elemzés input-adatait az IBM-részvények hozamai képezik.

Barnett, J. et al. (2007) dolgozatukban a t-kopula hátrányait vizsgálják. Hangsúlyozandó, hogy az extra paraméter, amit a t-kopula bevezet (szabadságfok), a Gauss-féle kopulával szemben, szükséges, de nem elégséges indok egy modellezés alapjául szolgáló kopula megválasztásához. Elemzésükben egy általánosított, többváltozós t-kopulát tesztelnek; az eredményekből egyértelmű következtetés a kopula hatékonyságára vonatkozóan nem vonható le, de világosan látszik, hogy egy apró finomítás a standard kétváltozós Student t-kopulában szignifikáns változásokat okoz bármely portfólióban megfigyelt interdependenciában.

Bouyé, E. et al. (2000) számos kopula alkalmazását tesztelik pénzügyi adatok esetén, kitűnő matematikai háttérrel nyújtva a kopula-modellezés működési mechanizmusának megértéséhez. Egyetértenek Bouyé et al. nézőpontjával, mely szerint a kopulák az egyik legerősebb eszközt jelentik a kockázati modellezéssel foglalkozók számára. Ezen túl számos megválaszolatlan kérdés áll fenn e modern koncepcióval kapcsolatban, valamint további fejlesztések és tesztek szükségesek ahhoz, hogy a kopulák adta előnyöket megfelelően tudjuk kamatoztatni.

Engle, R. és Manganelli, S. (2001) a legnépszerűbb VaR-beclsési módszereket hasonlítja össze, és egy újszerű koncepciót vezet be a VaR történetében: az Engle és Manganelli (1999) által meghatározott CAViaR⁴-ba bevezeti az extrém-érték elméletet. Eredményeik alapján az így kapott CAViaR-modellre elmondható, hogy az összes többi modellel szemben a legjobban képes VaR-értéket becsülni a vastag farkú eloszlások esetén.

Benedek, G. et al. (2002) m-dimenziós kopulákon keresztül mérik a

⁴ Conditional Autoregressive Value at Risk, a kockázatotott érték legfejlettebb számítási módszere, gyakorlatilag a két szerző újradefiniálja és pontosítja a VaR-t.

pénzügyi piaci faktorok közötti függőséget. A kopula legnagyobb előnye véleményük szerint, hogy segítségével ki tudunk lépni a normalitás hipotézisére épülő modellek világából, és a lineáris korreláció mellett lehetőségünk van alternatív kapcsolat-szorossági mértékek használatára. Ezt kiegészítve továbbléphetünk az egy- és kétdimenziós elemzéseken is. Összehasonlító elemzésükben a Gauss-féle, Student t-, MM1 és MM2 kopulát tesztelik a Dow-Jones, illetve BUX tőzsdeindexeken. Következtéseik szerint kockázatos piacokon (jellemzően Közép-Kelet-Európa, így Románia is) a normalitásra épülő modelleknek nincs gyakorlati relevanciája. Kóbor, Á. (2000) szintén a normalitásra épülő modellek vizsgálatából indul ki, a normalitás hipotézisének alternatíváit keresi a kockázatos érték számításában. A bemutatott metodológia a BUX és DJIA indexeken keresztül kerül alkalmazásra. Legfontosabb következtetései, hogy a feltételes eloszlásokon alapuló modellek nyugodt időszakban nem eredményeznek túl konzervatív VaR-értékeket, szemben az időfüggetlen eloszlásokkal, amelyek ekkor túlbecsülik a VaR-értékeket. Ugyanakkor a t-eloszlás bevezetésével megbízhatóbb VaR-értékekhez jutunk, az eloszlás kondicionalitásának feltételezése pedig még javítja a becslések pontosságát.

Hsu, C. et al. (2011) a kopula-EVT módszer hatékonyságát vizsgálják, semiparametrikus eloszlásra alapozva. Elemzésükben a legnagyobb fejlődési potenciált rejtő hat ázsiai piac adataiból indulnak ki (Indonézia, Dél-Korea, Malajzia, Szingapúr, Tajvan és Tháiföld). A függőség struktúrájának meghatározásában a Gauss-féle, Gumbel- és Clayton-kopulákat hasonlítják össze. Eredményeik alapján az EVT-vel társított kopulák jobban teljesítenek, mint az önmagukban vett kopulák, kiemelt helyen említve a Clayton-kopulát (EVT modellre építve), mely mindegyik piac esetén, függetlenül a feltételezett hozameloszlástól, a legmagasabb megbízhatósági szinttel teljesít.

A kopula-megközelítést kritikusan megközelítő Abbate, D. et al. (2009) arra hívják fel a figyelmet, hogy a kopulákon keresztül történő modellezés esetén könnyen olyan eredményhez juthat egy elemző, mely a diverzifikáció előnyeinek logikájával ellentmond. Ennek érdekében, a tradicionális kopulák mellett (Gaussi és Student t) az ún. archimédeszi

kopulák családját javasolják kockázati modellezésre, kimutatva, hogy a Frank-kopula és a Cock-Johnson-kopula jobban teljesít, mint a hagyományos kopulák. Hasonlóképpen Chen, X. et al. (2008) a kopulák önmagában vett használatát bírálják, kimutatva, hogy a szemiparametrikus nemlineáris modellezés jobban teljesít, mint a parametrikus modellek.

2. Metodológia

2.1. A GARCH-modell

A GARCH⁵-modellt Engle, R. (1982) és Bollerslev, T. (1986) fejlesztették ki azzal a céllal, hogy a hozamok volatilitásának klasztereződését megragadják. A volatilitás klasztereződési hatásáról az első empirikus megfigyelések már Mandelbrot, B. (1963) idejéből jegyezhetők. Ha a piacot erős sokk éri, a volatilitás nemcsak megváltozik, de egy újabb sokk bekövetkeztének valószínűsége is jelentősen megnő. Egy portfólió kockázatának mérésekor, valamint opcióárazás szempontjából, ez a hatás kritikus. A GARCH-modellben a veszteségeloszlás időbeni változásai autokorreláltak, valamint a (feltételes) variancia egy autoregresszív folyamat outputjaként fogható fel. A modell alapkonceptiója tehát, hogy képes megragadni a volatilitás klaszterező hatást.

A modell két fogalmat tisztáz: feltétel nélküli, illetve feltételes varianciát. A feltétel nélküli variancia a megfigyelt múltbeli hozamok varianciája, mely konstans az adatsor bármely pontjában. Gyakorlatilag a hosszú távú átlagos varianciaértéket jelöli a megfigyelt periódusra vonatkozóan. Ezzel szemben a feltételes variancia a megfigyelések minden pontjában változó, hiszen a múltbeli hozamok alakulása határozza meg. Például ha „n” megfigyelésünk van, és a „t.”-edik időpontban akarjuk felírni a volatilitást, akkor a feltételes variancia $(r_1, r_2, r_3, \dots, r_{t-1})$ függvénye, míg a feltétel nélküli $(r_1, r_2, r_3, \dots, r_n)$ függvénye. A feltételes variancia bevezetésének oka tehát a hozamok dinamikus mivoltának beépítése a GARCH-modellbe. A hozameloszlás a t -edik pillanatban magába foglalja a $(t-1)$ -edik pillanatig megfigyelt összes múltbeli hozamot, mint nem-sztocasztikus idősor.

⁵ Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, Általánosított Autoregresszív Feltételes Heteroskedaszticitás.

A szimmetrikus normális GARCH-modell az ún. alapesetbeli, Bollerslev, T. (1986) által kidolgozott formulát takarja, mely az Engle, R. (1982)-féle ARCH-modell továbbfejlesztett, általánosított változata. Az alapmodellben a volatilitás- és hozam-egyenletek:

$$\begin{aligned} r_t &= c + \rho r_{t-1} + \varepsilon_t \\ \sigma_t^2 &= \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \end{aligned}$$

Az egyenletekben r a hozamot, σ pedig a feltételes varianciát jelöli. A t -edik periódusban tehát a variancia egy hosszú távú átlagérték (ω), a múltbeli volatilitásokról rendelkezésünkre álló információ ($\alpha \varepsilon_{t-1}^2$), valamint a megelőző periódus varianciájának ($\beta \sigma_{t-1}^2$) függvénye. A volatilitás-egyenletben szereplő ε az ún. piaci sokkot jelöli⁶, mely egy feltételes normális folyamatként fogható fel, nulla várható értékkel és időben változó feltételes varianciával. A piaci sokkot általában az átlagos hozameltérésként határozzák meg ($r_t - \bar{r}$), ahol r_t a t -edik periódusban megfigyelt hozam és \bar{r} a múltbeli átlag.

A feltételes variancia meghatározásához a $\sigma_t^2 = \sigma_{t-1}^2 = \bar{\sigma}^2$ egyenletből indulunk ki. Ezt behelyettesítve a GARCH-modell feltételes variancia-egyenletébe kapjuk:

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{\omega}{1 - (\alpha + \beta)}$$

a normális szimmetrikus GARCH-modell esetén. A levezetett egyenlet segítségével meghatározhatóak azon feltételek és kikötések, melyek szükségesek ahhoz, hogy a modell értelmezett legyen: $\omega > 0$, $\alpha + \beta < 1$, valamint $\alpha, \beta > 0$. Tehát kikötések teljesülése értelmében a feltétel nélküli variancia véges és pozitív, míg a feltételes variancia mindig pozitív értéket vesz fel. A GARCH-modellben α a feltételes variancia reakcióját méri a piaci sokkokra, β a feltételes variancia perzisztenciáját méri bármivel szemben, ami a piacon történik, az $(\alpha + \beta)$ összeg pedig a feltételes variancia konvergálásának sebességét határozza meg a hosszú távú átlagérték felé.

⁶ Az alaptrendet figyelembe véve kiugróan magas, illetve alacsony hozamszintek.

A GARCH-modellek becslése, hatékonyság és relevancia szempontjából, napi vagy heti adatok esetén indokolt, havi szinten a becslés értelmét veszti. Ennek oka, hogy a volatilitás klaszterező hatás a pénzügyi eszközök hozamában eltűnik,⁷ ha a hozamok hosszabb időintervallumra vannak számolva. A GARCH-modellek paramétereit loglikelihood módszerrel becslik, a következő loglikelihood függvények összegét kell maximalizálni:

$$\ln L(\theta) = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left[\ln(\alpha_t^2) + \left(\frac{\varepsilon_t}{\sigma_t} \right)^2 \right],$$

ahol θ a feltételes variancia-egyenlet paramétereit jelöli. A szimmetrikus GARCH-modellben $\theta = (\omega, \alpha, \beta)$.

Az eddig bemutatott GARCH-modell elsődleges korlátja, hogy szimmetrikus reakciót vált ki a hozamokban pozitív, illetve negatív sokkok esetén. Ennek fő oka, hogy a feltételes variancia egyenletében a késleltetett reziduuumok négyzetei szerepelnek.⁸ Empirikus tapasztalatok alapján kijelenthetjük, hogy egy negatív sokk a pénzügyi piacokon nagyobb ingadozást okoz, mint egy hasonló erejű pozitív sokk. A részvényt piacok esetében ezt leverage effektusnak nevezzük, mely által egy vállalat részvényárfolyamában bekövetkező csökkenés a D/E⁹ arányt szignifikánsan megnöveli. A részvényesek számára ergo megnő a jövőbeli cash flow-k kockázata. Ugyanezen logikát továbbvíve megfigyelhető, hogy az előbbi forgatókönyv egy kiugró árfolyam-növekedés esetén nem valósul meg, hiszen a részvényes számára az semmilyen hatással nem bír a kockázatra nézve. Végeredményben tehát egy negatív korrelációról beszélhetünk a részvényhozamok és a volatilitás között.¹⁰

Az első, szakirodalomban jegyzett aszimmetrikus GARCH-modell az A-GARCH, melyet Engle, R. (1990) fejlesztett ki. Az A-GARCH-ra épülő legnépszerűbb aszimmetrikus GARCH-modellek a GJR-GARCH,

⁷ A volatilitás ekkor egy hosszú távú átlagérték felé konvergál.

⁸ Az előjel adta magyarázóerő eltűnik.

⁹ Idegen tőke/Saját tőke (Debt/Equity).

¹⁰ A bemutatott két sokk ellentétes irányban idéz elő aszimmetriát a kötvénypiacon (Alexander 2008. 148).

E-GARCH, valamint az Analitikus E-GARCH-modellek.¹¹ A GJR-GARCH-modellt Glosten, Jagannathan és Runkle fejlesztették ki 1993-ban, gyakorlatilag az A-GARCH-modell egy finomított, korszerűsített változata. A modell a szimmetrikus normális GARCH-modellhez képest bevezet egy extra paramétert, mely az előbbieken taglalt leverage-efektust hivatott parametrizálni. A paraméter jellegzetessége, hogy az aszimmetriát kizárólag a negatív sokkokon keresztül építi be a modellbe. A GJR-GARCH-modellben a volatilitás-egyenlet a következő formát ölti („J” a leverage paraméter):

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \lambda I_{\{\varepsilon_{t-1} < 0\}} \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2,$$

ahol $I_{\{\varepsilon_{t-1} < 0\}} = 1$, ha $\varepsilon_t < 0$, illetve 0, minden más esetben. A GJR-modell esetében a paraméterbecslés a már előbbieken bemutatott GARCH-likelihood függvények segítségével történik, melyekben a volatilitás az újonnan bevezetett leverage paraméter függvénye. A modell gyakorlatilag a szimmetrikus normális GARCH-modell egy olyan továbbfejlesztett változata, mely képes megragadni azon hatást, melyben a negatív sokkok nagyobb hatást gyakorolnak volatilitás-ingadozásra, mint a pozitív sokkok.

2.2. EVT-modellek

Az extrém érték elmélet¹² (EVT) egy olyan koncepció, mely valamely változók esetén egyedi (testreszabott) eloszlást képes meghatározni, figyelembe véve ún. „extrém” eseményeket. Az elmélet gyakorlatilag véletlen változók eloszlásának a modellezésére használatos, a részvényárfolyamok elemzése esetén általában az eloszlások szélének modellezésére használják. Extrém érték eloszlások bevezetése egy modellezési folyamatba olyankor tanácsos, amikor kivételes nagyságot ölt egy veszteség-kvantilis, így az EVT elmélet felhasználásával lehetséges diagnosztizálni egy kivételes periódust az eloszlásban. Két típusú extrém ér-

¹¹ Az egyes GARCH-modellek részletes bemutatását lásd Alexander: *Market Risk Analysis*, 2008, Vol. II., 147–157.

¹² Extreme Value Theory, rövidítése a továbbiakban EVT.

ték eloszlást különböztet meg a szakirodalom: a GEV^{13} -eloszlást, valamint a GPD^{14} -eloszlást. Az egyes eloszlások két extrém érték modellt, módszert határoznak meg, melyek alkalmasak a veszteségeloszlások parametrizálására, figyelembe véve a kilengő veszteségeket.

Az első módszer, a *block maxima* modellt, az idősor esetén megfigyelt minimum, illetve maximum értékek eloszlását hivatott magyarázni. A módszer lényege, hogy a megfigyelések sorozatát (adatbázist) ún. tömbökre osztjuk, majd az egyes tömbök esetén megfigyelt maximum értéket extrém értéknek tekintjük. Az így kapott extrém értékek a *block maxima* modell értelmében GEV eloszlást követnek. A második módszer, a *küszöbérték*¹⁵ modellt, egy meghatározott küszöbértéknél nagyobb értéket extrém értéknek tekint az adatsor bármely pontjában. A *peak-over-threshold* modell az extrém értékek meghatározása után kiszámolja a túllépéseket (túllépés = extrém érték – küszöbérték), majd ezeket egy GPD -eloszláshoz igazítja.

A *peak-over-threshold* módszer esetén használatos eloszlás-paraméterek meghatározásában első lépésként diagnosztizálnunk kell az extrém értékeket az adatbázisban. Legyen az adatsorból vett minta r_t , $t = 1, 2, \dots, n$, egy tetszőleges eloszlásfüggvénnyel: $F(x) = \Pr(r_t \leq x)$. A küszöbértéket u -val jelölve elmondhatjuk, hogy a túllépések $r_t > u$ esetén figyelhetőek meg, bármely $t = 1, 2, \dots, n$ pillanatban. A túllépés matematikailag: $y = r_t - u$. A valószínűségfüggvény eloszlása:¹⁶

$$F_u(y) = \Pr(r - u \leq y \mid r > u)$$

Tekintve, hogy r meghaladja a küszöbértéket (u), meghatározható azon y , mely a maximális értéket (túllépést) jelöli, amivel r túllépheti a küszöbértéket. Valószínűségi függvénnyel leírva ezen kijelentést, kapjuk:

¹³ Generalized Extreme Value (Általánosított Extrém Eloszlás).

¹⁴ Generalized Pareto Distribution (Általánosított Pareto-eloszlás), csak az eloszlás valamely szélében megfigyelt értékek tekinthetőek extrém értéknek, általában azon esetben, amikor meghaladnak egy önkéntesen kiválasztott küszöbértéket.

¹⁵ A továbbiakban *peak-over-threshold* módszer.

¹⁶ r meghaladja u -t, azaz a küszöbértéket.

$$F_{(u)Y} = \frac{\Pr(r \mid -u \leq y, r > u)}{\Pr(r > u)} = \frac{F(y + u)}{1 - F(u)}$$

Tudva, hogy $r > u$ és $x = y + u$, a következő egyenlet írható fel:

$$F(x) = [1 - F(u)]F_u(y) + F(u)$$

Balkema, A. és de Haan, L. (1974), valamint Pickands, F. (1975) elméletei alapján eléggé magas u küszöbérték esetén a túllépések eloszlásfüggvényét nagyban közelíti a GPD-eloszlás. A küszöbérték meghatározásakor figyelniük kell arra, hogy elég alacsony legyen ahhoz, hogy elegendő számú túllépést kapjunk a farok-paraméterek pontos becsléséhez; ugyanakkor a küszöbértéknek elég magasnak kell lennie ahhoz, hogy a GPD megfelelően közelítse az empirikus eloszlást. McNeil, A. és Frey, R. (2000), valamint Nyström, K. és Skoglund, J. (2001) Monte-Carlo-szimulációkon keresztül próbálnak maximum likelihood (ML) függvényen keresztül optimális küszöbértéket találni, különféle típusú eloszlások és nagyságú megfigyelések esetén. Eredményeik alapján egy EVT-modellezés akkor releváns, ha a küszöbérték által meghatározott extrém értékek a megfigyelések 5–13%-át képezik.

2.3. Kopulamodellek

A kopulák mögött álló meghatározó ökonometriai koncepció, hogy bármely eloszlás lebontható marginális vagy peremeloszlásokra, és a függőségi struktúrát (interdependenciát) meghatározhatjuk egy kopula-függvénnyel. A kopulák segítségével külön-külön becsült marginális eloszlások egyesíthetők egy globális eloszlásban, mely a marginálisok összes eredeti tulajdonságát tartalmazza.

Definíció – Kopula:

Kopulán az m -dimenziós, egyenletes eloszlású peremekkel rendelkező valószínűségi vektor eloszlásfüggvényét értjük. Matematikailag a kopula egy olyan $C: [0,1]^m \rightarrow [0,1]$ leképezés, amely rendelkezik az alábbi három tulajdonsággal:

1. $C(x_1, x_2, \dots, x_m)$ minden komponensében szigorúan monoton
2. $C(1, \dots, x_j, \dots, 1) = x_j$ minden $j = 1, 2, \dots, m$ -re, $x_j \in [0, 1]$

3. tetszőleges $(a_1, \dots, a_m), (b_1, \dots, b_m) \in [0, 1]^m$ vektorokra, ahol $a_j \leq b_j$ igaz, hogy:

$$\sum_{j_1=1}^2 \sum_{j_2=1}^2 \dots \sum_{j_m=1}^2 (-1)^{i_1+\dots+i_m} C(x_{1j_1}, \dots, x_{mj_m}) \geq 0$$

$$x_{k_1} = a_k, x_{k_2} = b_k, k = \overline{1, m}$$

A kopula fontos szerepet játszik az eloszlások konstruálásában. A kopula fogalma emellett alapvető a valószínűségi változók függőségének megértésében, illetve aszimmetrikus eloszlásokra épülő modellek megalkotásában. A kopula fogalmára építve (analóg módon) a normális eloszlást¹⁷ is újradefiniálhatjuk, mint egydimenziós normális eloszlások kombinációját, a Sklar-tételnek köszönhetően.

Skalar-tétel (1996):

Legyen H egy m -dimenziós eloszlásfüggvény, F_1, \dots, F_m peremekkel. Ekkor létezik m -dimenziós kopula, vagyis:

$$H(x_1, \dots, x_m) = C[F_1(x_1), \dots, F_m(x_m)].$$

Gyakorlati modellezésben (algoritmikában) a fordított tétel használatos: ha C egy m -dimenziós kopula, F_1, \dots, F_m eloszlásfüggvények, akkor a fent megadott H egy m -dimenziós eloszlásfüggvény F_1, \dots, F_m peremekkel.

Skalar-tétel következménye:

Ha H folytonos m -dimenziós eloszlás F_1, \dots, F_m peremeloszlásokkal és $F_1^{-1}, \dots, F_m^{-1}$ kvantilisfüggvényekkel, akkor a

$$C(u_1, \dots, u_m) = H[F_1^{-1}(u_1), \dots, F_m^{-1}(u_m)]$$

kopula egyértelmű. Abban az esetben, ha H nem folytonos, a fenti kijelentés nem igaz. A tétel alapján megadhatjuk a Gauss-féle kopula definícióját, amely egydimenziós normális eloszlású peremekkel többdimenziós normális eloszlást eredményez.

¹⁷ Azon túl bármely eloszlást is.

Definíció – Gauss-féle (normális) kopula:

Legyen R egy szimmetrikus, pozitív véges mátrix, melyben $\text{diag}(R) = 1$, valamint jelölje Φ_R a standard többváltozós normális eloszlást, R korrelációs mátrixszal. Ekkor a Gauss-féle kopula:

$$C(u_1, u_2, \dots, u_n; R) = \Phi_R(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2), \dots, \Phi^{-1}(u_n)),$$

ahol $\Phi^{-1}(u)$ az inverz kumulált eloszlásfüggvényt jelöli. Gyakorlatiasan, a Gauss-féle kopulán a következő függvényt értjük:

$$C(x) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(x_1)} \dots \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(x_n)} K |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1}(x-\mu)} dx_n \dots dx_1,$$

ahol $\Phi(\cdot)$ a standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye, K pedig az m -dimenziós normális eloszlás sűrűségfüggvénye. A kopula lényege tehát abban áll, hogy az eloszlást felbontjuk peremeloszlásokra, illetve az ezeket kombináló kovariancia-struktúrára. Ha normális eloszlású peremekre nem-gaussi kopulát teszünk, akkor olyan eloszlásokat tudunk konstruálni, amelyek nem normálisak normális eloszlású peremekkel.

Definíció – Student t-kopula:

Legyen R egy szimmetrikus, pozitív véges mátrix, melyre $\text{diag}(R) = 1$, valamint jelölje $T_{R,\nu}$ a Student t-eloszlást, melyben R a korrelációs mátrix, ν a szabadságfok. Ekkor a többváltozós Student t-kopula a következőképpen írható fel:

$$C(u_1, u_2, \dots, u_n; R, \nu) = T_{R,\nu}(t_\nu^{-1}(u_1), t_\nu^{-1}(u_2), \dots, t_\nu^{-1}(u_n)),$$

ahol $t_\nu^{-1}(u)$ az inverz Student t-kumulált eloszlásfüggvényt jelöli. A t-kopula nagy előnye, hogy bevezet egy extra-paramétert a Gauss-kopulához képest, a szabadságfokot, mely a marginális (perem) eloszlások¹⁸ interdependenciáját képes megragadni (Alexander 2008 és Sklar 1996 alapján).

2.4. Kockázatotott érték (Value-at-risk)

Piaci kockázatnak nevezzük azon jövőbeli események észrevételének bizonytalanságát, melyek szignifikáns veszteséget okozhatnak egy

¹⁸ Extrém értékek, szélek eloszlása.

részvényportfólió szintjén. A modern piaci kockázatelemzés legnépszerűbb elemzési rendszerét a kockázatot érték – Value at Risk (VaR) – számításához kapcsolódó módszerek jelentik. Ez tipikusan egy olyan alkalmazási terület, ahol az alapeloszlásra – a mi esetünkben a piaci hozamok eloszlására – vonatkozó normalitás hipotézise a legkevésbé állja meg a helyét. Az alapadatok (hozam és volatilitás) komponensenkénti, egydimenziós idősoraira többnyire a csúcsosság, illetve a hosszan elnyúló, vastag szélek a jellemzők.

A kockázatot érték adott időintervallum alatt a várható legnagyobb veszteséget méri adott konfidenciaszint mellett, normál piaci körülmények között. A VaR két input-paraméterrel dolgozik: időhorizont (minél hosszabb az elemzési horizont, annál nagyobb a VaR értéke) és konfidenciaszint (minél magasabb a konfidenciaszint, annál nagyobb a VaR értéke). Gyakorlati szempontból, ha a hozamok adatsorában a nyereségeket negatív előjellel jelöljük, a veszteségeket pedig pozitív előjellel, a VaR-t az eloszlás tetszőleges q_α kvantiliseként határozhatjuk meg:

$$\text{VaR}_\alpha = q_\alpha$$

3. Alkalmazás

3.1. Adatok

A metodológiában bemutatott kockázatmodellezési és -értékelési eljárások egy öt romániai részvényből álló portfólió keretén belül kerülnek alkalmazásra. A részvények szimbólumai: SIF1, SIF2, SIF3, SIF4, SIF5; az értékpapírokkal a Bukaresti Értéktőzsdén kereskednek. A SIF értékpapírokból álló portfólió kiválasztásának fő indoka, hogy magas fokú piaci likviditással rendelkeznek, historikus árfolyam-adatbázisuk hosszú időre nyúlik vissza, csupán néhány hiányzó értékkel. Mind az öt vállalat a romániai pénzügyi szektor részét alkotja, elsődleges tevékenységi területüket romániai vállalatokba való befektetések képezik. A megfigyelések a 2000. jan. 5–2011. márc. 24. közötti periódust fedik le, az adatbázis összesen 2767 megfigyelésből áll. A hiányzó értékek az előző napi értékkel lettek helyettesítve.¹⁹ Az árfolyam-adatsorból a hozamok

¹⁹ Ha a megelőző napi adat is hiányzik (4-5 esetben), akkor a legközelebbi múltbeli árfolyamot tekintjük.

logaritmált formában lettek származtatva (p_t az árfolyamot jelöli a t -edik időpontban):

$$r_t = \ln \frac{p_t}{p_{t-1}} .$$

Az adatok forrása a Bukarest Értéktőzsde adatbázis-archívuma.

3.2. GARCH-modellek

A GARCH-modellek becslését megelőzően meg kell vizsgálnunk, hogy autokorreláltak-e a hozamok, valamint a volatilitás klaszterező effektus²⁰ jelen van-e az adatsorban. Az elemzés grafikusan és statisztikailag is elvégezhető, az eredményeket az 1., a 2., a 3. és a 4. mellékletek tartalmazzák. A grafikus ACF²¹-analízis SIF1, SIF2 és SIF4 esetén erős autokorrelációt mutat, SIF3 és SIF5 enyhén autokorreláltak. Ugyanakkor a négyzetes hozamok ACF-elemzése alapján mind az öt adatsorban erős autokorreláció figyelhető meg. A statisztikai eredmények alátámasztják a grafikus elemzés eredményeit. Az eredmények alapján tehát a hozamok autokorreláltak, és időben változó, dinamikus volatilitással jellemezhetőek, így a GARCH-modell megfelelően képes magyarázni a hozamokat generáló folyamatot.

A megfelelő GARCH-modell kiválasztásához első lépésben egy GJR-GARCH-modellt becsülünk, majd a statisztikailag nem szignifikáns változókat kihagyjuk a modelltől és újrabecsljük a GARCH-ot. A koefficiens becslése maximum-likelihood módszerrel történik, feltételezve az innovációk t -eloszlását. A GJR-GARCH-modellt a következő formában becsüljük:

$$r_t = c + \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \lambda \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 .$$

A hozam egyenletben r_t a hozamot, c a hozam hosszú távú átlagértékét, ε_t a reziduumtagot jelöli. A volatilitás egyenletben ω a konstans paramétert, α a GARCH hibtagot, λ a leverage koefficiens, míg β a késle-

²⁰ A klaszterhatás diagnosztizálható, ha kiszámoljuk a négyzetes hozamok autokorrelációjának fokát.

²¹ Autokorrelációs Függvény (Autocorrelation Function).

tetési paramétert jelöli. A kezdeti becslés eredményei meglepőek, a leverage-paraméter egyik SIF esetében sem szignifikáns. A GJR-GARCH hozam-variancia egyenletek:

SIF1:

$$r_t = 0,0969 + \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = 0,4006 + 0,2412\varepsilon_{t-1}^2 + 0,0033\varepsilon_{t-1}^2 + 0,7514\sigma_{t-1}^2$$

SIF2:

$$r_t = 0,1383 + \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = 0,5272 + 0,2195\varepsilon_{t-1}^2 + 0,0019\varepsilon_{t-1}^2 + 0,7524\sigma_{t-1}^2$$

SIF3:

$$r_t = 0,1006 + \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = 0,5417 + 0,2355\varepsilon_{t-1}^2 + 0,0174\varepsilon_{t-1}^2 + 0,7483\sigma_{t-1}^2$$

SIF4:

$$r_t = 0,0777 + \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = 0,3561 + 0,1644\varepsilon_{t-1}^2 + 0,0158\varepsilon_{t-1}^2 + 0,8138\sigma_{t-1}^2$$

SIF5:

$$r_t = 0,1142 + \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = 0,5790 + 0,2019\varepsilon_{t-1}^2 + 0,0088\varepsilon_{t-1}^2 + 0,7613\sigma_{t-1}^2$$

Forrás: Saját becslés, gretl.

A leverage-paraméter, a 2000–2008-as elemzési horizontot véve alapul, szignifikáns a modellben. A 2000–2010-es periódusbeli váltás oka, hogy a válság okozta „hatalmas” negatív sokkot a GJR-GARCH-modell a leverage-paraméter szintjén nem képes (vagy csak torzultan) értelmezni.²² Összegezve tehát, a kezdeti becslésből levonható azon következtetés, miszerint a hozamok volatilitása egyenlő mértékben befolyásolt negatív, illetve pozitív, ugyanolyan mértékű „sokkok” által. A SIF részvények esetén elvetendő az a hipotézis, mely szerint egy negatív hozam erősebben hat a volatilitásra, mint egy pozitív hozam. Mivel az eredmé-

²² Ez nem jelenti azt, hogy a GARCH-modellek nem képesek recessziós periódusokat megragadni, a téma bővebben kifejtve a következtetés-részben.

nyek nem indokolják a leverage-paraméter használatát, a változót kihagyjuk a modelltől, és egy GARCH(1,1) modellt kapunk.

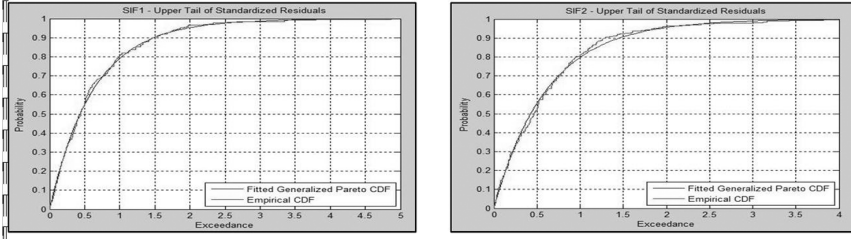
A modellezési eljárás következő lépésében a standardizált reziduumok autokorrelációs analízisét végezzük el. A GARCH-modell koncepciójában $\varepsilon_t = z_t \sigma_t$, ahol z_t (standardizált reziduum) független, és Student t-eloszlást követ. A z_t értékek számolásakor a reziduum-tagokat (ε_t) elosztjuk a feltételes szórással (σ_t). Az 5. melléklet és a 6. melléklet eredményei alapján a négyzetes standardizált reziduumok nem korreláltak. A kapott eredmények alapján elmondhatjuk, hogy a GARCH-modellek pontosan képesek magyarázni a SIF-idősorokat, valamint a standardizált reziduumok teljesítik a függetlenségi kritériumot, mely szükséges ahhoz, hogy az EVT-modelleket alkalmazzuk a modellezés következő fázisában.

3.3. EVT-modellek

A GARCH-modell becsléséből származó innovációk t-eloszlása nagymértékben képes magyarázni a hozamok többletcsúcsosságát. Mindazonáltal az aszimmetria teljes mértékben nem épül be a modellbe, hiszen a feltételezett eloszlás szimmetrikus. Az innovációk megfelelő parametrizálása kritikus pont a piaci kockázat felbontásában, hiszen később ez meghatározó lesz a portfólió veszteségeloszlásának szimulálásakor. Az innovációk modellezésére EVT-modellt használunk, a peak-over-threshold módszerrel keresztül. A standardizált reziduumok extrém elemeinek meghatározásához az értékeket növekvő sorrendbe rendezzük, majd az első 10%-ot tekintjük az alsó, az utolsó 10%-ot a felső szélnek. Ezáltal a küszöbérték impliciten meghatározódik a pozitív, illetve negatív sokkok esetében. Az adatsor 10%-ának megválasztásakor, bár önkényesen választottunk, figyelembe vettük a McNeil, A. és Frey, R. (2000), valamint Nyström, K. és Skoglund, J. (2001) által végzett szimulációkat, akik kimutatták, hogy az extrém tartományok az adatsor 5–13%-ában tekintve vezetnek releváns eredményhez.

A peak-over-threshold módszertanában az extrém értékek GPD-eloszlást követnek. Az innovációk modellezésekor az alsó és felső szélek eloszlásához GPD-eloszlást igazítunk, míg az eloszlás belsejét a „kernel

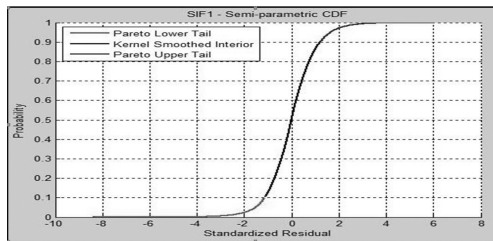
smoothing”²³ módszerrel konstruáljuk. A GPD-eloszlás hatékonyságát jól mutatja az 7. melléklet: az EVT-módszer sokkal jobban közelíti meg az innovációk eloszlását, mint a Student t-eloszlás.²⁴ Az 1. grafikonon SIF1 és SIF2 esetén láthatóak a felső szélek eloszlásai.



1. ábra. Az innovációk felső szélének eloszlása (SIF1 és SIF2)

Forrás: Saját szerkesztés, MATLAB

Az egyes innovációsorok teljes szemiparametrikus eloszlásának felépítéséhez egy CDF²⁵, illetve ICDF²⁶-et hozunk létre. A CDF felvesz egy értéket, megnézi, hogy a becsült szemiparametrikus eloszlásban hol található (szélekben vagy az eloszlás belsejében), majd összehasonlítja ezt a küszöbértékkel, visszaadva egy kumulált valószínűségértéket. Az ICDF függvény hasonlóképpen működik. A két függvény segítségével felépíthetőek az egyes szemiparametrikus eloszlások (lásd 8. melléklet). SIF1 esetén a kumulált eloszlásfüggvényt a 2. grafikon mutatja.



2. ábra. Kumulált eloszlásfüggvény (SIF1)

Forrás: Saját szerkesztés, MATLAB

²³ Interpoláció a felső és alsó küszöbértékek között, maximum likelihood segítségével.

²⁴ A szabadságfokot bootstrap algoritmussal határoztuk meg.

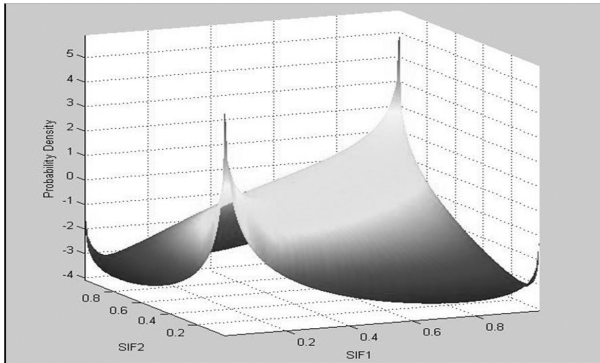
²⁵ Kumulált eloszlásfüggvény (Cumulative Distribution Function).

²⁶ Inverz Kumulált eloszlásfüggvény (Inverse Cumulative Distribution Function).

3.4. A kopula-megközelítés

A standardizált reziduumok alapján létrehozott modellekből kiindulva, a portfólió-szintű interdependencia modellezése az elemzés következő része. Az összefüggőség úgy adható meg, hogy a szemiparametrikus eloszlásokat összekötjük egy kopulával. Az alkalmazott kopula a Student t-kopula, melynek indoka, hogy a korrelációs mátrix mellett a kopulának van egy szabadságfok-paramétere is, amely a szélek szintjén képes összefüggést teremteni az egyes SIF-hozamok esetén. A kopula kalibrálása CML²⁷-módszer segítségével történik, amely két fázison keresztül építi fel a kopulát.

Első lépésben a kezdeti adatbázist, $X = (X_{1t}, \dots, X_{nt})^T_{t=1}$ uniformizált értékekké alakítja: egyes $t = 1, 2, \dots, T$ értékekre legyen $u_t = (u^t_1, \dots, u^t_n) = [F_1(X_{1t}), \dots, F_n(X_{nt})]$. Értelmezés: az i -edik részvény esetén X_i az innovációk időszora, F_i pedig a CDF. Második lépésben a CML a kopula paramétereinek vektorát (α) becsüli, a következő algoritmussal: $\hat{\alpha}_{\text{CML}} = \arg \max \sum_{t=1}^T \ln c(u^t_1, \dots, u^t_n; \alpha)$, ahol c a Student t-kopula sűrűségfüggvénye. A kalibrált Student t-kopula látható a következő grafikonon:



3. ábra. A portfólión belüli függőséget meghatározó Student t-kopula

Forrás: Saját szerkesztés, MATLAB

A kopula által meghatározott korrelációs mátrix pozitív korrelációt

²⁷ Canonical Maximum Likelihood.

mutat az öt részvény között, míg a relatíve alacsony szabadságfok²⁸ erős összefüggésre utal az eloszlás széleinek szintjén:

Korrelációs mátrix					
	SIF1	SIF2	SIF3	SIF4	SIF5
SIF1	1	0,7536	0,7237	0,7147	0,7398
SIF2	0,7536	1	0,7298	0,7423	0,8212
SIF3	0,7237	0,7298	1	0,7283	0,7122
SIF4	0,7147	0,7423	0,7283	1	0,7372
SIF5	0,7398	0,8212	0,7122	0,7372	1
<i>Szabadságfok: 5,0266</i>					

Forrás: Saját számítás, MATLAB

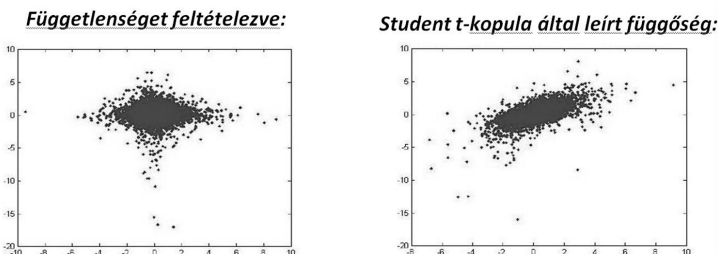
3.5. Portfólió-szimuláció

A peremeloszlások modelléből és az interdependencia struktúrájából kiindulva szimulálhatjuk a portfólió veszteséeloszlását és kiszámolhatóak a kockázati mérőszámok. A szimulációt két lépésben valósítjuk meg. Első lépésben a Student t-kopula által meghatározott interdependencia-struktúra felhasználásával, az egyes SIF-értékpapírok esetén (szimulált) hozamokat generálunk, 500 darab 1-napos előrejelzési periódusokat részvényenként. A generált adatsorok t-eloszlást követnek, a t-kopula szabadságfokában meghatározva. A generált hozamokat az EVT-moddal meghatározott szemiparametrikus eloszlásokhoz kell igazítani; a folyamat:

- A hozameloszlást a létrehozott CDF függvény segítségével uniformizáljuk.
- Az így kapott CDF-ek segítségével létrehozunk a szemiparametrikus eloszlásokat az egyes részvények esetén.

A fenti két művelettel gyakorlatilag létrehozunk egy függőségi rendszert (lásd 4. grafikon), amit a GARCH-modell inputjaként tudunk használni a továbbiakban.

²⁸ A kopula szabadságfokát a t-kopula negatív log-likelihood függvényének minimumában határozzuk meg.



4. ábra. Szimulált szemiparametrikus eloszlások, SIF1 és SIF2 esetén

Forrás: Saját szerkesztés, MATLAB

A szimuláció második lépésében a szemiparametrikus eloszlásokat inputként vezetjük be a GARCH-modellbe, amely meghatározza a feltételes hozamokat, melyekből már számolható a kockázatosított érték.

3.6. Kockázatosított érték (value-at-risk)

Pozitív előjellel tekintve a veszteségeket és negatívvval a nyereségeket, a VaR-érték a feltételes hozam megfelelő q_a kvantiliseként becsülhető:

$$VaR_a = q_a$$

A kockázatosított érték az egyes részvények, majd a portfólió szintjén is becslésre kerül; a portfólióban a részvények azonos súlyozással szerepelnek. A kapott eredményeket a következő táblázat tartalmazza az egyedi értékpapírok esetén:

2. táblázat. Kockázatosított érték az egyedi értékpapírok esetén

	Kockázatosított érték		
	90%	95%	99%
SIF1	-5,68%	-8,68%	-15,28%
SIF2	-6,96%	-10,15%	-16,41%
SIF3	-6,91%	-10,29%	-18,25%
SIF4	-6,34%	-9,69%	-16,52%
SIF5	-5,86%	8,86%	20,01%

Forrás: Saját számítás, MATLAB

A portfólió szintjén becsült kockázatotott érték a következő táblázatban látható, az eredmények 90%, 95%, illetve 99%-os konfidenciaszinten lettek becsülve:

3. táblázat. Kockázatotott érték a portfólió szintjén

PORTFOLIO - VaR		
90%	95%	99%
-1,9163%	-2,6869%	-4,4033%
<i>Szabadságfok: 5,0266</i> <i>Maximum szimulált veszteség: 7,40%</i> <i>Maximum szimulált nyereség: 9,16%</i>		

Forrás: Saját számítás, MATLAB

A becsült kockázat összehasonlítható a részvények között, átlagos VaR-értékek szerint, az eredmények alapján SIF3 a legkockázatosabb értékpapír, míg SIF1 a legkevésbé kockázatos. A részvények közötti magas korrelációt figyelembe véve és a részvényenkénti VaR-, illetve a portfólió VaR-adatokat összehasonlítva megállapítható, hogy a diverzifikációból származó előnyök szignifikánsak.

Következtetések

A dolgozatban egy modern, technikai szemléletű piaci kockázatmodellezési platform került bemutatásra, mely a lehető legpontosabban képes Value-at-Risk értéket becsülni, illetve képes szétválasztani a marginális eloszlások leírását és a portfólión belüli interdependencia szerkezetét. Az egyes SIF-részvények esetén a hozamok GARCH-modell segítségével lettek becsülve, mely képes magyarázni az idősorokban az autokorrelációt, illetve az időben változó, dinamikus volatilitást. A GARCH-modell outputjait felhasználva, az innovációkat egy szemiparametrikus eloszlással írtuk le, melyben az extrém értékek GPD-eloszlást követnek, az eloszlás belsejének szerkezetét pedig a kernel-smoothing-módszer határozza meg. A szemiparametrikus eloszlás képes megragadni az aszimmetriát, illetve a többlet-kurtózist, csúcsosságot. A szemiparametrikus eloszlások között az összefüggés struktúráját egy Student t-

kopula határozza meg, mely a portfólióbeli interdependenciát is definiálja. A kopula segítségével a portfólió veszteségeszlását szimuláltuk; a szimulált hozamok alapján pontos VaR-beclést kaptunk. További kutatások végezhetőek el a bemutatott modellezési eljárásból kiindulva. Egyrészt a felhasznált metodológia tesztelhető eltérő profilú részvényportfóliók esetén is, melyben más kockázati faktorok fejtik ki hatásukat. Az elemzés megvalósítható több értékpapírt tartalmazó portfólió esetén is. Másrészt a kidolgozott elemzési platform tovább fejleszhető, például más típusú GARCH-modellek felhasználásával, amely az innovációk telosztlástól eltérő eloszlását feltételezi, illetve komplexebb kopulák használatával.

Irodalomjegyzék

Abbate, D. – Farkas, W. – Gourié, E. 2009. Operational Risk Quantification using Extreme Value Theory and Copulas: From Theory to Practice. *The Journal of Operational Risk*, Vol. 4, Number 3.

Alexander, C. 2008. *Market Risk Analysis, Vol. II. – Practical Financial Econometrics*, John Wiley & Sons Ltd. kiadó, The Atrium, Southern Gate, Cheichester.

Barnett, J. – Krepes, J. – Major, J. – Venter, G. 2007. Multivariate Copulas for Financial Modeling. *Variance - Advancing the Science of Risk*, Volume 1., Issue 1.

Benedek, G. – Kóbor, Á. – Pataki, A. 2002. A kapcsolatszorosság mérése m-dimenziós kopulákkal és értékpapírportfólió-alkalmazások. *Közgazdasági Szemle*, XLIX. évf. 105–125.

Bollerslev, T. 1986. Generalised Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. *Journal of Econometrics* 31. 107–327.

Bouyé, E. – Durrleman, V. – Nikeghbali, A. – Riboulet, G. – Roncalli, T. 2000. Copulas for Finance A Reading Guide and Some Applications, *SSRN Working Paper Series*, <http://ssrn.com/abstract=1032533>

Brooks, C. 2008. *Introductory Econometrics for Finance*. Cambridge University Press, Second Edition.

Chen, X. – Koenker, R. – Xiao, Z. 2008. Copula-Based Nonlinear Quantile Autoregression. *Cowless Foundation For Research In Economics*

Yale University, Discussion Paper No. 1679.

Eksi, Z. – Yildirim, I. – Yildirak, K. 1996. Alternative Risk Measures And Extreme Value Theory In Finance: Implementation On ISE 100 Index. *International Conference on Business, Economics and Management*, Yasar University, Izmir, Turkey.

Engle, R. – Manganelli, S. 1999. Conditional Autoregressive Value at Risk by Regression Quantiles. *Department of Economics, UCSD, UC San Diego*, Discussion Paper 99–20.

Glosten, L. R. – Jagannathan, R. – Runkle, D. E. 1993. On the Relation Between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks. *The Journal of Finance* 48. 1779–1801.

Engle, R. 1982. Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation, *Econometrica* 50. 987–1007.

Engle, R. – Manganelli, S. 2001. Value at Risk in Finance. *European Central Bank (ECB) Working Paper Series*, <http://ssrn.com/abstract=1032533>, www.ecb.int

Hansen, P. – Lunde, A. 2001. A Forecast Comparison Of Volatility Models: Does Anything Beat a GARCH(1,1)? *CAF Centre For Analytical Finance*, University of Aarhus, Aarhus School of Business, Working Paper Series no. 84.

Hotta, L. K. – Lucas E. C. – Palaro, H. P. 2006. Estimation of VaR Using Copula and Extreme Value Theory. *Cass Business School Research Paper*.

Hsu, C. – Huang, C. – Chiou, W. 2011. Effectiveness of Copula-Extreme Value Theory in Estimating Value-at-Risk: Empirical Evidence from Asian Emerging Markets. *SSRN Working Paper Series*, <http://ssrn.com/abstract=1772208>.

Jondeau, E. – Rockinger, M. 2002. Conditional Dependency of Financial Series: The Copula-GARCH Model. *International Center For Financial Asset Management And Engineering (FAME) Research Paper*.

Kole, E. – Koedijk, K. – Verbeek, M. 2006. Selecting Copulas for Risk Management. *Journal of Banking and Finance*, CEPR Discussion Paper, no. 5652.

Kóbor Á. 2000. A feltétel nélküli normalitás egyszerű alternatívái a kockázatotott érték számításában. *Közgazdasági Szemle*, XLVII. évf. 878–898.

Maddala, G. S. 2004. *Bevezetés az ökonometriába*. Nemzeti Tankönyvkiadó Rt., Budapest.

Mandelbrot, B. 1963. The variation of certain speculative prices. *Journal of Business* 36. 394–419.

McNeil, A. J. – Frey, R. 2000. Estimation of Tail-Related Risk Measures for Heteroscedastic Financial Time Series: an Extreme Value Approach. *Departement Mathematik ETH Zentrum*.

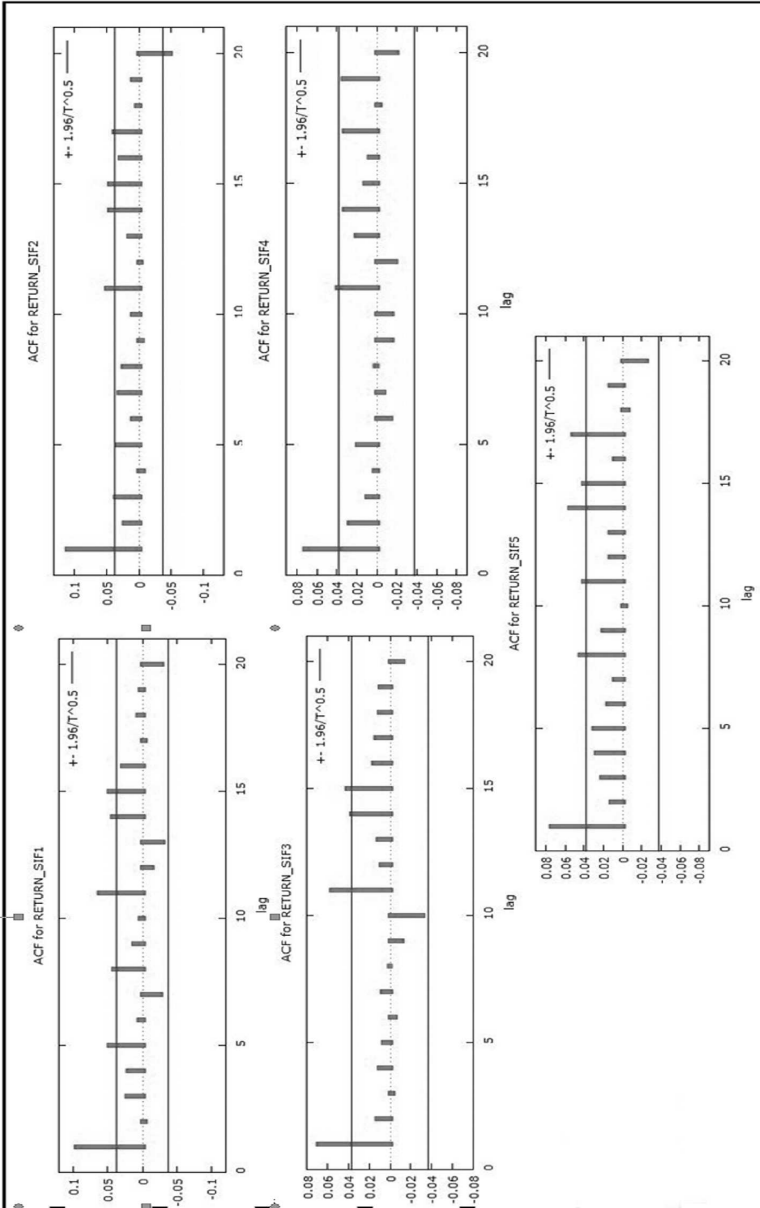
Nyström, K. – Skoglund, J. 2002. Framework for Scenariobased Risk Management. *Swedbank, Group Financial Risk Control*.

Sklar, A. 1996. Random Variables, Distribution Functions and Copulas – A personal look backward and forward, *Distributions with Fixed Marginals and Related Topics*. Institute of Mathematical Statistics, Hayward CA., 1–14.

*** Bukaresti Értéktőzsde adatbázis-archívuma, www.bvb.ro, www.kmarket.ro és www.ktd.ro

MELLÉKLETEK

1. melléklet. Hozamok korrelogramjai



Forrás: Saját becslés, gretl.

2. melléklet. Autokorreláció tesztelése hozamok esetén

Autocorrelation function for RETURN_SIF1

LAG	ACF	PACF	Q-stat.	[p-value]
1	0.0959 ***	0.0859 ***	25.4912	[0.000]
2	-0.0031	-0.0124	25.5175	[0.000]
3	0.0225	0.0242	26.5204	[0.000]
4	0.0206	0.0162	28.0953	[0.000]
5	0.0469 **	0.0442 **	34.1978	[0.000]
6	0.0094	-0.0056	34.2198	[0.000]
7	0.0286	-0.0266	36.1899	[0.000]
8	0.0414 **	0.0458 **	40.9470	[0.000]
9	0.0126	0.0023	41.3871	[0.000]
10	0.0024	0.0009	45.5950	[0.000]
11	0.0648 ***	0.0617 ***	52.0827	[0.000]
12	-0.0032	-0.0034	52.0828	[0.000]
13	0.0327	0.0325	54.9539	[0.000]
14	0.0425 **	0.0449 **	59.8991	[0.000]
15	0.0469 **	0.0450 **	66.1226	[0.000]
16	0.0277	0.0150	68.2521	[0.000]
17	-0.0035	-0.0066	68.2866	[0.000]
18	0.0053	0.0103	68.3642	[0.000]
19	0.0029	-0.0113	68.3860	[0.000]
20	-0.0286	-0.0338 *	70.6670	[0.000]

Autocorrelation function for RETURN_SIF2

LAG	ACF	PACF	Q-stat.	[p-value]
1	0.1102 ***	0.1102 ***	33.6337	[0.000]
2	0.0221	0.0100	34.9915	[0.000]
3	0.0359 *	0.0328 *	38.5502	[0.000]
4	-0.0052	-0.0030	38.6248	[0.000]
5	0.0324 *	0.0339 *	41.5398	[0.000]
6	0.0098	0.0017	41.5088	[0.000]
7	0.0297	0.0287	44.2571	[0.000]
8	0.0294	0.0146	45.7761	[0.000]
9	-0.0094	-0.0090	45.8289	[0.000]
10	0.0454 ***	0.0479 ***	46.5282	[0.000]
11	0.0484 ***	0.0479 ***	50.2828	[0.000]
12	-0.0018	-0.0136	52.9713	[0.000]
13	0.0153	0.0140	53.5294	[0.000]
14	0.0438 **	0.0380 **	58.8654	[0.000]
15	0.0441 **	0.0419 **	64.2656	[0.000]
16	0.0283	0.0149	66.4967	[0.000]
17	0.0377 **	0.0307	70.4498	[0.000]
18	0.0020	-0.0111	70.4613	[0.000]
19	0.0096	0.0061	70.7180	[0.000]
20	-0.0470 **	-0.0536 ***	76.8865	[0.000]

Autocorrelation function for RETURN_SIF3

LAG	ACF	PACF	Q-stat.	[p-value]
1	0.0686 ***	0.0686 ***	13.0379	[0.000]
2	0.0127	0.0080	13.4833	[0.001]
3	-0.0030	-0.0044	13.5076	[0.004]
4	0.0099	0.0004	13.7816	[0.008]
5	0.0061	0.0048	13.8856	[0.016]
6	-0.0051	-0.0061	13.9561	[0.030]
7	0.0074	0.0082	14.1086	[0.049]
8	0.0003	-0.0007	14.4098	[0.079]
9	-0.0003	-0.0003	14.4381	[0.081]
10	-0.0313	-0.0303	15.1881	[0.048]
11	0.0358 ***	0.0365 ***	15.3851	[0.001]
12	0.0086	0.0010	16.2130	[0.010]
13	0.0113	0.0095	16.4947	[0.015]
14	0.0372 *	0.0372 *	30.3458	[0.007]
15	0.0409 **	0.0351 **	35.0006	[0.002]
16	0.0159	0.0091	35.7082	[0.003]
17	0.0137	0.0127	36.2287	[0.004]
18	0.0107	0.0075	36.5489	[0.006]
19	0.0093	0.0062	36.7921	[0.008]
20	-0.0124	-0.0139	37.2179	[0.011]

Autocorrelation function for RETURN_SIF4

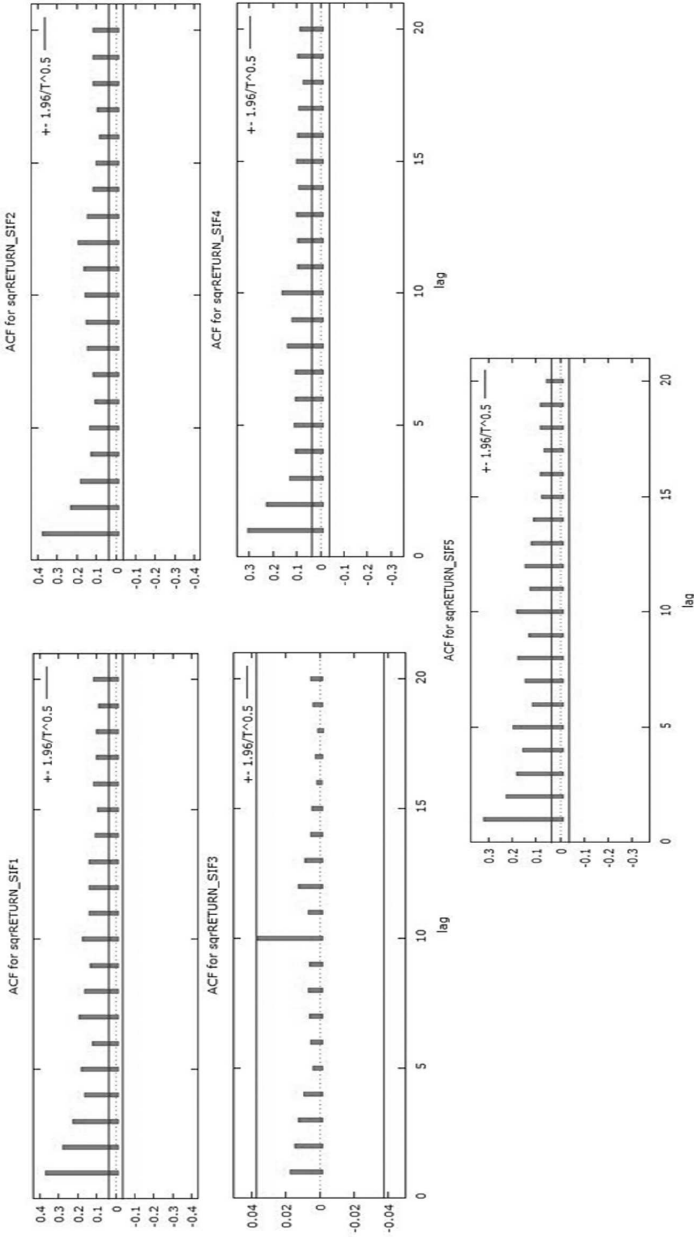
LAG	ACF	PACF	Q-stat.	[p-value]
1	0.0714 ***	0.0714 ***	14.1033	[0.000]
2	0.0266	0.0216	16.0660	[0.001]
3	0.0088	0.0054	16.2790	[0.001]
4	0.0019	0.0004	16.2893	[0.001]
5	0.0152	0.0129	17.7179	[0.007]
6	-0.0182	-0.0182	17.7179	[0.007]
7	0.0066	0.0054	17.8370	[0.003]
8	0.0010	0.0023	17.8397	[0.022]
9	-0.0148	-0.0146	18.4444	[0.030]
10	0.0154	0.0138	19.1055	[0.039]
11	0.0385 **	0.0421 **	23.2285	[0.016]
12	-0.0187	-0.0226	24.2009	[0.019]
13	0.0195	0.0207	25.2557	[0.021]
14	0.0119	0.0068	28.5672	[0.018]
15	0.0113	0.0068	28.5672	[0.018]
16	0.0071	0.0037 *	28.7069	[0.026]
17	0.0318 *	0.0327 *	31.5271	[0.017]
18	-0.0033	-0.0034	31.5572	[0.025]
19	0.0035	0.0037 *	34.6903	[0.015]
20	-0.0203	-0.0234	35.8448	[0.016]

Autocorrelation function for RETURN_SIF5

LAG	ACF	PACF	Q-stat.	[p-value]
1	0.0737 ***	0.0737 ***	15.0375	[0.000]
2	0.0057	0.0057	15.8904	[0.000]
3	0.0198	0.0198	16.5982	[0.001]
4	0.0258	0.0258	18.5110	[0.001]
5	0.0101	0.0101	21.8398	[0.001]
6	0.0051	0.0051	21.8238	[0.003]
7	0.0412 **	0.0412 **	27.1058	[0.001]
8	0.0117	0.0117	28.1665	[0.001]
9	-0.0070	-0.0070	28.1665	[0.001]
10	0.0466 **	0.0390 **	32.7679	[0.001]
11	0.0139	0.0085	33.8294	[0.001]
12	0.0139	0.0085	33.8294	[0.001]
13	0.0508 ***	0.0508 ***	41.9831	[0.000]
14	0.0399 ***	0.0399 ***	46.6190	[0.000]
15	0.0051	0.0051	46.6190	[0.000]
16	0.0469 **	0.0469 **	54.0242	[0.000]
17	-0.0059	-0.0059	54.1081	[0.000]
18	0.0165	0.0165	54.5950	[0.000]
19	0.0070	0.0070	56.2658	[0.000]
20	-0.0524 *	-0.0524 *	56.2658	[0.000]

Forrás: Saját becslés, gretl.

3. melléklet. Négyzetes hozamok korrelogrammjai



Forrás: Saját becslés, gretl.

4. melléklet. Autokorreláció tesztelése, négyzetes hozamok

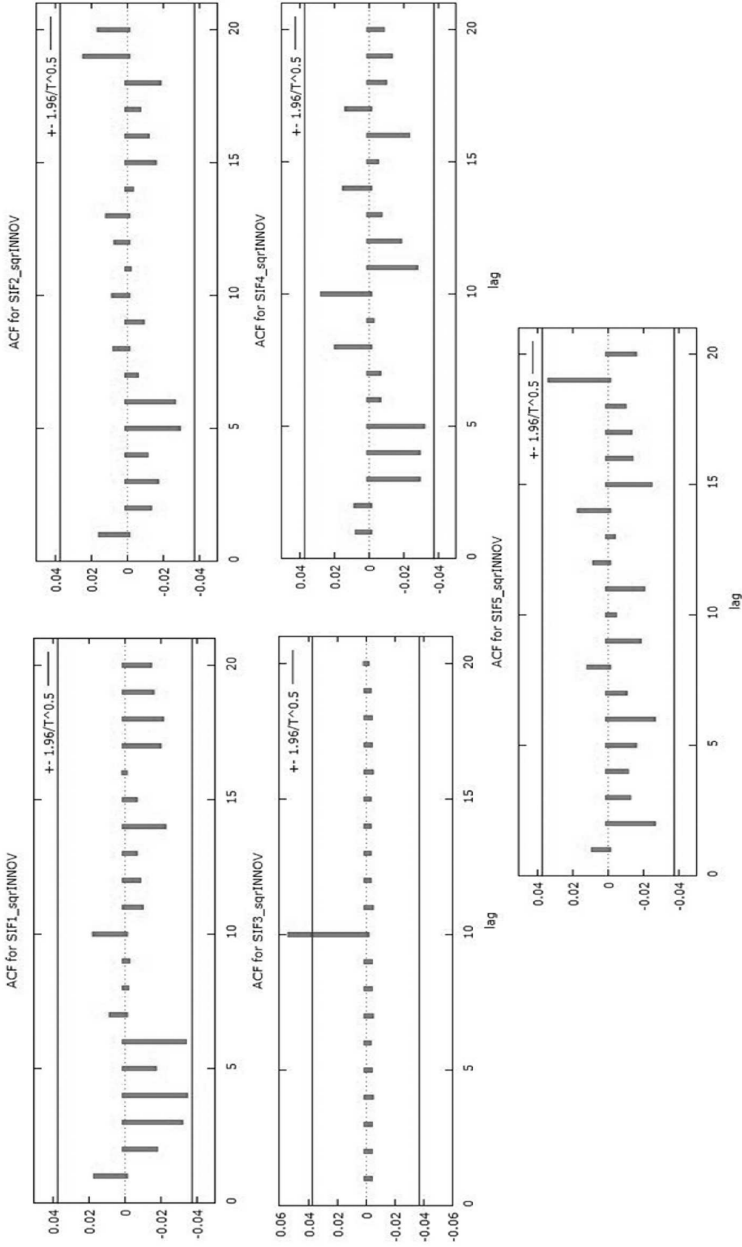
Autocorrelation function for sqRETURN_SIF1					Autocorrelation function for sqRETURN_SIF2					Autocorrelation function for sqRETURN_SIF3				
LAG	ACF	PACF	Q-stat.	[p-value]	LAG	ACF	PACF	Q-stat.	[p-value]	LAG	ACF	PACF	Q-stat.	[p-value]
1	0.3578 ***	0.3578 ***	354.5695	[0.000]	1	0.3623 ***	0.3623 ***	363.3786	[0.000]	1	0.0156	0.0156	0.4712	[0.413]
2	0.2665 ***	0.1565 ***	518.3788	[0.000]	2	0.2228 ***	0.1054 ***	500.9318	[0.000]	2	0.0128	0.0126	1.1252	[0.570]
3	0.1257 ***	0.0939 ***	677.3316	[0.000]	3	0.1684 ***	0.0674 ***	579.4708	[0.000]	3	0.0108	0.0108	1.4719	[0.489]
4	0.1518 ***	0.0265 ***	741.4246	[0.000]	4	0.1176 ***	0.0248 ***	617.8143	[0.000]	4	0.0070	0.0070	1.6286	[0.804]
5	0.1688 ***	0.0789 ***	821.1787	[0.000]	5	0.1250 ***	0.0607 ***	661.1151	[0.000]	5	0.0015	0.0015	1.6401	[0.896]
6	0.1095 ***	-0.0029 ***	854.4497	[0.000]	6	0.0930 ***	0.0443 ***	688.0958	[0.000]	6	0.0020	0.0020	1.6778	[0.947]
7	0.1837 ***	0.1193 ***	918.0497	[0.000]	7	0.1046 ***	0.0822 ***	715.4823	[0.000]	7	0.0043	0.0043	1.7381	[0.973]
8	0.1200 ***	0.0111 ***	1054.0350	[0.000]	8	0.1194 ***	0.0555 ***	821.5821	[0.000]	8	0.0041	0.0041	1.8524	[0.994]
9	0.1240 ***	0.0151 ***	1054.0350	[0.000]	9	0.1394 ***	0.0555 ***	821.5821	[0.000]	9	0.0041	0.0041	1.8524	[0.994]
10	0.1625 ***	0.0629 ***	1127.4346	[0.000]	10	0.1472 ***	0.0570 ***	847.7662	[0.000]	10	0.0355 *	0.0351 *	5.9452	[0.867]
11	0.1275 ***	0.0195 ***	1172.6132	[0.000]	11	0.1506 ***	0.0852 ***	944.7573	[0.000]	11	0.0053	0.0040	5.4247	[0.909]
12	0.1307 ***	0.0256 ***	1220.0803	[0.000]	12	0.1309 ***	0.0873 ***	1033.7832	[0.000]	12	0.0112	0.0100	5.7774	[0.927]
13	0.1269 ***	0.0331 *	1264.8642	[0.000]	13	0.1352 ***	0.0981 ***	1096.6204	[0.000]	13	0.0068	0.0055	5.9000	[0.950]
14	0.0949 ***	-0.0098 ***	1289.9301	[0.000]	14	0.1088 ***	0.0078 ***	1131.3922	[0.000]	14	0.0035	0.0024	5.9394	[0.968]
15	0.1080 ***	0.0175 ***	1322.0450	[0.000]	15	0.1003 ***	0.0066 ***	1151.3922	[0.000]	15	0.0033	0.0026	5.9611	[0.980]
16	0.0930 ***	-0.0010 ***	1352.0450	[0.000]	16	0.0734 ***	-0.0003 ***	1156.3373	[0.000]	16	0.0026	0.0026	5.9611	[0.980]
17	0.0886 ***	-0.0038 ***	1363.8851	[0.000]	17	0.0854 ***	0.0196 ***	1176.6485	[0.000]	17	0.0010	0.0004	5.9670	[0.983]
18	0.0915 ***	0.0143 ***	1387.2209	[0.000]	18	0.1050 ***	0.0394 **	1207.3860	[0.000]	18	0.0000	-0.0014	5.9689	[0.996]
19	0.0759 ***	-0.0019 ***	1403.2933	[0.000]	19	0.1039 ***	0.0198 ***	1237.4687	[0.000]	19	0.0021	0.0016	5.9809	[0.998]
20	0.1051 ***	0.0392 **	1494.1067	[0.000]	20	0.1090 ***	0.0207 ***	1279.5753	[0.000]	20	0.0034	0.0019	6.0131	[0.999]

Autocorrelation function for sqRETURN_Sif4				
LAG	ACF	PACF	Q-stat.	[p-value]
1	0.22947 ***	0.2947 ***	240.5346	[0.000]
2	0.2168 ***	0.1423 ***	370.6977	[0.000]
3	0.1208 ***	0.0269 ***	411.1314	[0.000]
4	0.0973 ***	0.0335 **	437.4012	[0.000]
5	0.0993 ***	0.0509 ***	464.7407	[0.000]
6	0.0950 ***	0.0415 ***	493.7886	[0.000]
7	0.1262 ***	0.0726 ***	500.3983	[0.000]
8	0.1142 ***	0.0726 ***	540.3983	[0.000]
9	0.11031 ***	0.0349 ***	592.8502	[0.000]
10	0.1524 ***	0.0874 ***	657.3819	[0.000]
11	0.0887 ***	-0.0042 ***	679.2484	[0.000]
12	0.0864 ***	0.0157 ***	700.1512	[0.000]
13	0.0943 ***	0.0354 *	723.2017	[0.000]
14	0.0893 ***	0.0198 ***	742.4872	[0.000]
15	0.0894 ***	0.0261 ***	764.7086	[0.000]
16	0.0894 ***	0.0161 ***	802.9113	[0.000]
17	0.0894 ***	0.0161 ***	827.9113	[0.000]
18	0.0656 ***	-0.0036 ***	844.9225	[0.000]
19	0.0849 ***	0.0345 **	894.8922	[0.000]
20	0.0760 ***	0.0112 ***	850.6792	[0.000]

Autocorrelation function for sqRETURN_SIF5				
LAG	ACF	PACF	Q-stat.	[p-value]
1	0.3065 ***	0.3065 ***	260.1310	[0.000]
2	0.2133 ***	0.1317 ***	386.1187	[0.000]
3	0.1703 ***	0.0822 ***	466.4761	[0.000]
4	0.1450 ***	0.0599 ***	524.7701	[0.000]
5	0.1856 ***	0.1124 ***	620.2825	[0.000]
6	0.1545 ***	-0.0022 ***	752.3959	[0.000]
7	0.1349 ***	0.0622 ***	778.0191	[0.000]
8	0.1842 ***	0.0829 ***	818.2003	[0.000]
9	0.1703 ***	0.0159 ***	898.7552	[0.000]
10	0.1703 ***	0.0861 ***	935.7525	[0.000]
11	0.1154 ***	0.0079 ***	986.7511	[0.000]
12	0.1354 ***	0.0452 **	1021.6222	[0.000]
13	0.1120 ***	0.0084 ***	1050.9074	[0.000]
14	0.1027 ***	-0.0202 ***	1077.9530	[0.000]
15	0.1027 ***	-0.0202 ***	1077.9530	[0.000]
16	0.0704 ***	-0.0073 ***	1087.1907	[0.000]
17	0.0576 ***	-0.0146 ***	1100.7935	[0.000]
18	0.0699 ***	0.0103 ***	1115.5750	[0.000]
19	0.0748 ***	0.0146 ***	1122.1097	[0.000]
20	0.0484 ***	-0.0159 ***	1122.1097	[0.000]

Forrás: Saját becslés, gretl.

5. melléklet. Négyzetes standardizált reziduumok korrelogramjai



Forrás: Saját becslés, gretl.

6. melléklet. Autokorreláció tesztelése, négyzetes standardizált reziduuumok

Autocorrelation function for SIF1_eqGINNOV

LAG	ACF	PACF	Q-stat.	[p-value]
1	0.0158	0.0158	0.6882	[0.4071]
2	-0.0169	-0.0172	1.4839	[0.476]
3	-0.0308	-0.0303	4.1170	[0.249]
4	-0.0336 *	-0.0330 *	7.2485	[0.123]
5	-0.0160	-0.0160	7.9662	[0.159]
6	-0.0329 *	-0.0346 *	10.9596	[0.090]
7	0.0073	0.0057	11.1060	[0.194]
8	-0.0009	-0.0044	11.1882	[0.196]
9	-0.0014	-0.0042	11.1335	[0.268]
10	-0.0166	-0.0144	11.5677	[0.229]
11	-0.0076	-0.0076	11.5861	[0.229]
12	-0.0076	-0.0080	12.2943	[0.426]
13	-0.0054	-0.0044	12.3260	[0.510]
14	-0.0220	-0.0221	13.6686	[0.475]
15	-0.0058	-0.0062	13.7632	[0.541]
16	-0.0001	-0.0008	13.7633	[0.616]
17	-0.0188	-0.0219	14.7483	[0.614]
18	-0.0200	-0.0219	15.8637	[0.602]
19	-0.0153	-0.0169	16.5161	[0.623]
20	-0.0137	-0.0175	17.0389	[0.650]

Autocorrelation function for SIF2_eqGINNOV

LAG	ACF	PACF	Q-stat.	[p-value]
1	0.0142	0.0142	0.5588	[0.455]
2	-0.0124	-0.0124	0.9834	[0.612]
3	-0.0162	-0.0158	1.7103	[0.635]
4	-0.0102	-0.0099	1.9986	[0.736]
5	-0.0285	-0.0286	4.2485	[0.514]
6	-0.0251	-0.0259	6.0269	[0.420]
7	-0.0052	-0.0056	6.1029	[0.528]
8	-0.0064	-0.0048	6.2151	[0.623]
9	-0.0086	-0.0108	6.4189	[0.697]
10	-0.0069	-0.0058	6.5922	[0.767]
11	-0.0058	-0.0058	6.8485	[0.890]
12	0.0055	0.0055	6.9395	[0.905]
13	0.0010	0.0101	6.9395	[0.905]
14	-0.0023	-0.0026	6.9538	[0.956]
15	-0.0148	-0.0144	7.5626	[0.940]
16	-0.0112	-0.0104	7.9148	[0.951]
17	-0.0063	-0.0059	8.0239	[0.966]
18	-0.0175	-0.0175	8.8759	[0.963]
19	0.0230	0.0232	10.3466	[0.944]
20	0.0153	0.0129	10.9961	[0.946]

Autocorrelation function for SIF3_eqGINNOV

LAG	ACF	PACF	Q-stat.	[p-value]
1	-0.0024	-0.0024	0.0160	[0.899]
2	-0.0029	-0.0029	0.0390	[0.981]
3	-0.0030	-0.0030	0.0630	[0.996]
4	-0.0032	-0.0032	0.0930	[0.996]
5	-0.0031	-0.0031	0.1179	[1.000]
6	-0.0024	-0.0024	0.1393	[1.000]
7	-0.0035	-0.0036	0.1674	[1.000]
8	-0.0029	-0.0029	0.1990	[1.000]
9	-0.0022	-0.0022	0.2265	[1.000]
10	0.0032	0.0032	0.2581	[0.995]
11	0.0032	0.0032	0.2924	[0.978]
12	-0.0036	-0.0034	0.3246	[0.986]
13	-0.0016	-0.0014	0.3540	[0.985]
14	-0.0020	-0.0014	0.3820	[0.954]
15	-0.0020	-0.0014	0.4094	[0.937]
16	-0.0023	-0.0018	0.4364	[0.929]
17	-0.0037	-0.0032	0.4634	[0.952]
18	-0.0024	-0.0024	0.4904	[0.966]
19	-0.0027	-0.0027	0.5174	[0.980]
20	-0.0016	-0.0014	0.5444	[0.987]
20	-0.0005	-0.0004	0.5714	[0.992]

Autocorrelation function for SIF4_eqGINNOV

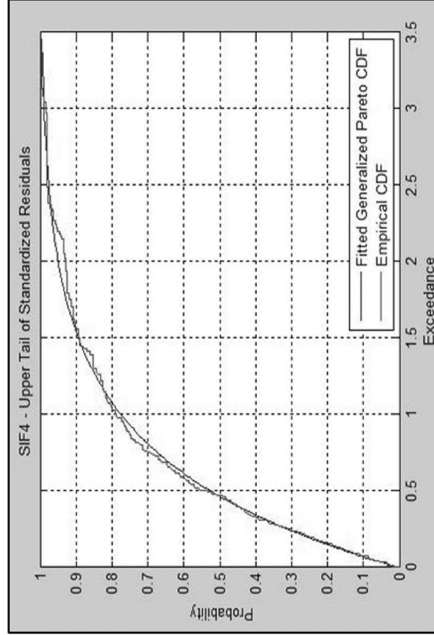
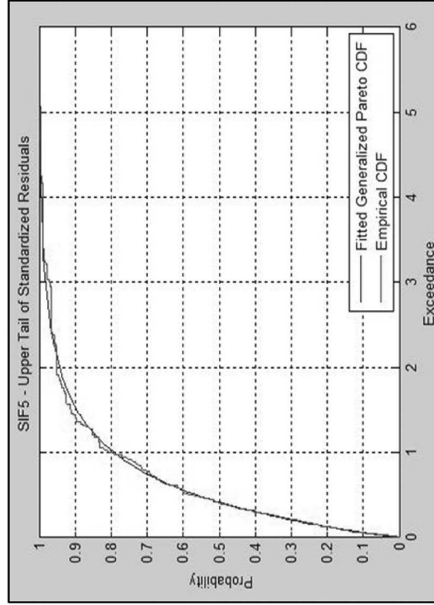
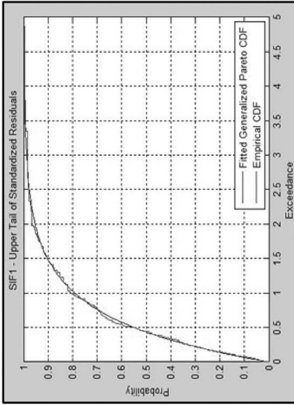
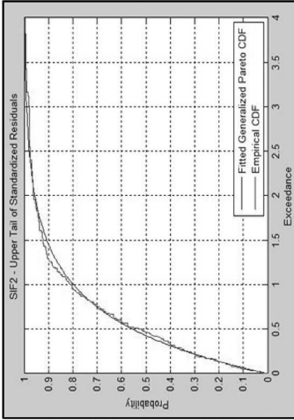
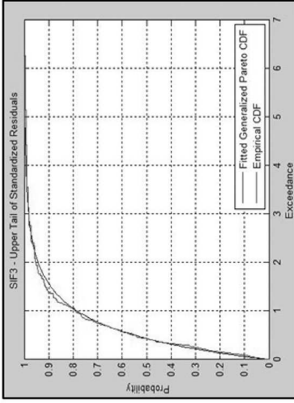
LAG	ACF	PACF	Q-stat.	[p-value]
1	0.0065	0.0065	0.1482	[0.733]
2	-0.0025	-0.0025	0.2472	[0.624]
3	-0.0285	-0.0285	2.4994	[0.473]
4	-0.0282	-0.0278	4.6562	[0.320]
5	-0.0306	-0.0300	7.3010	[0.199]
6	-0.0059	-0.0060	7.3970	[0.286]
7	-0.0055	-0.0066	7.4796	[0.383]
8	0.0184	0.0161	8.4181	[0.394]
9	-0.0262	-0.0262	9.4566	[0.312]
10	0.0245	0.0245	10.3522	[0.412]
11	-0.0272	-0.0272	12.3774	[0.336]
12	-0.0176	-0.0172	13.2367	[0.352]
13	-0.0060	-0.0033	13.3367	[0.422]
14	0.0137	0.0140	13.8614	[0.460]
15	-0.0043	-0.0052	13.9440	[0.523]
16	-0.0125	-0.0126	14.8228	[0.541]
17	0.0125	0.0125	15.7016	[0.591]
18	-0.0069	-0.0069	15.5849	[0.594]
19	-0.0122	-0.0124	16.4030	[0.630]
20	-0.0079	-0.0087	16.5752	[0.680]

Autocorrelation function for SIF5_eqGINNOV

LAG	ACF	PACF	Q-stat.	[p-value]
1	0.0074	0.0074	0.1528	[0.696]
2	-0.0254	-0.0254	1.9329	[0.380]
3	-0.0116	-0.0116	2.3067	[0.511]
4	-0.0104	-0.0109	2.6080	[0.625]
5	-0.0149	-0.0153	3.2235	[0.666]
6	-0.0253	-0.0258	5.0059	[0.543]
7	-0.0059	-0.0106	5.2786	[0.626]
8	-0.0076	-0.0092	5.4629	[0.695]
9	-0.0176	-0.0176	6.2485	[0.626]
10	-0.0038	-0.0041	6.4871	[0.773]
11	-0.0197	-0.0214	7.5626	[0.752]
12	0.0068	0.0057	7.6914	[0.809]
13	-0.0031	-0.0050	7.7131	[0.861]
14	0.0156	0.0153	8.3952	[0.868]
15	-0.0237	-0.0254	9.9542	[0.823]
16	-0.0123	-0.0123	10.8425	[0.864]
17	-0.0123	-0.0123	11.7308	[0.864]
18	-0.0087	-0.0100	11.0551	[0.892]
19	0.0321 *	0.0314	13.9184	[0.878]
20	-0.0148	-0.0174	14.5221	[0.803]

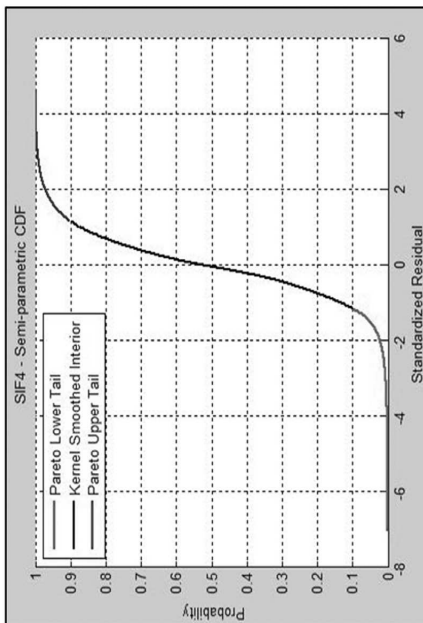
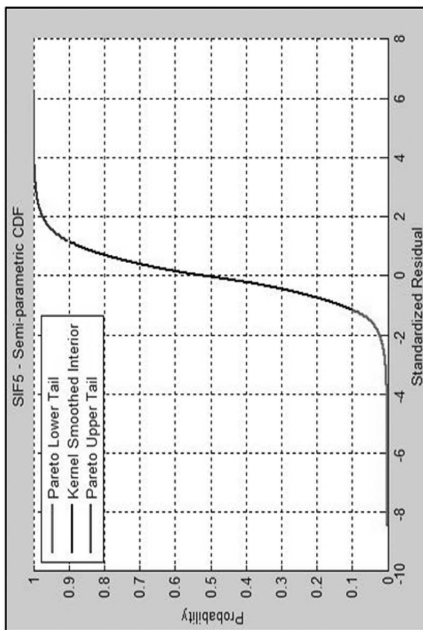
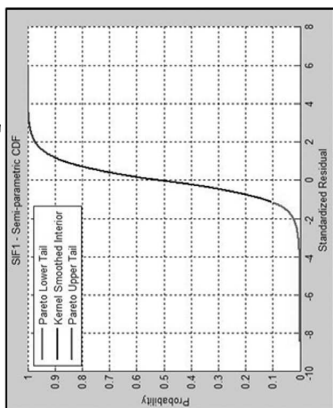
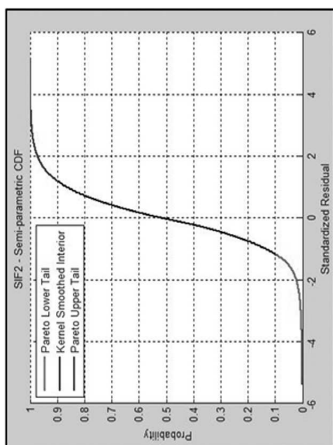
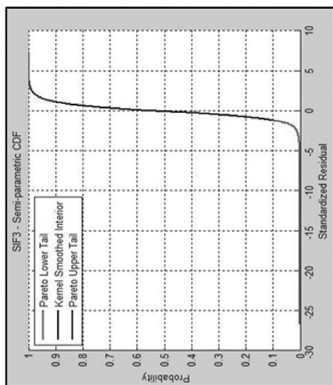
Forrás: Saját becslés, gretl.

7. melléklet. A standardizált reziduumok eloszlásának felső szélének CDF-e



Forrás: Saját becslés, gretl.

8. melléklet. Szemiparametrikus CDF-ek



Forrás: Saját becslés, gretl.