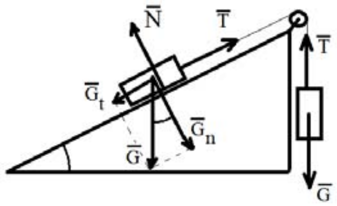
Fizika feladatok megoldása – többféleképpen

A feladat: *Egy ideális fonalat 30°-os lejtő csúcsán lévő állócsigán vetünk keresztül, amelynek a végein két egyforma m tömeg található. Az egyik tömeg a lejtőn van, a másik függőlegesen lóg. Eltekintve a csiga tömegétől és a súrlódástól, számítsuk ki a rendszer gyorsulását és a fonalban fellépő feszültséget!*

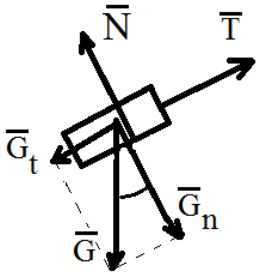
A feladat rajza

A függőlegesen mozgó test G = mg súlya nagyobb a lejtőn található, ugyanakkora súlyú test súlyának a lejtővel párhuzamos $G_t = mg \cdot \sin\alpha = mg/2$ összetevőjénél (egy háromszög befogója mindig kisebb az átfogónál). A lejtőn található test a lejtőn felfelé, a másik pedig lefelé mozog ugyanazzal az ***a*** gyorsulással. A súrlódástól eltekintünk (μ=0).



I. megoldás

A két testet különálló rendszernek tekintjük.



A lejtőn található test felfelé gyorsul, a lejtővel párhuzamos irányban. A gyorsulását két erő hozza létre:

$$a = (T - G_t)/m = (T - mg \cdot \sin\alpha)/m = (T - mg/2)/m$$

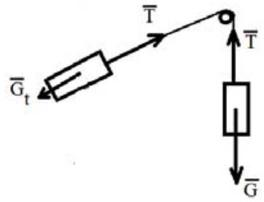
A $G_n = N$, az összegük nulla, ezért a test mozgásában nem játszanak szerepet. G helyett a két összetevője működik, ezért vele nem foglalkozunk.

A másik test ugyanezzel az *a* gyorsulással mozog lefelé:

$$a = (G - T)/m = (mg - T)/m$$

A két egyenletet felhasználva kiejtjük a T feszültséget, a gyorsulásra a következő értéket kapjuk: a = g/4, a T értékére pedig: T = 3mg/4.

II. megoldás:



A két testet egy rendszernek tekintjük. Így a 2m tömegű, összekapcsolt két test együttes gyorsulása:

$$a = (G - G_t)/2m = (mg - mg/2)/2m = g/4.$$

Ebben a rendszerben a T feszültség nem határozható meg, mert a belső erők, a feszültségek eredője nulla. Ezért előnyösebb az előző módszer.

III. A feladat általánosítása

Ha a testek tömege nem egyenlő ($m_1 \neq m_2$), és amikor a lejtőn az m_1 tömegű test van, a fonal végén pedig az m_2 tömegű test, a rendszer csak akkor jön mozgásba, ha:

a) $m_2 > m_1\sin\alpha$, és akkor az m_1 felfelé mozog gyorsulással,
b) $m_2 < m_1\sin\alpha$, akkor meg lefelé.
c) Ha $m_2 = m_1\sin\alpha$, akkor vagy nyugalomban van a két test, vagy pedig valamilyen irányban egyenletesen mozog.

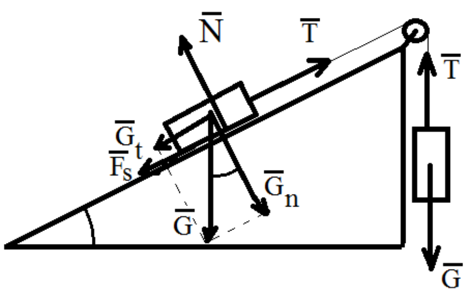
Ha az a) eset áll fenn, azaz $m_2 > m_1\sin\alpha$, akkor a mozgásegyenletek:

$$m_1a = T - m_1g\cdot\sin\alpha, \text{ illetve } m_2a = m_2g - T.$$

Innen a gyorsulás: $a = (m_2 - m_1\sin\alpha)g/(m_1 + m_2)$,
illetve a feszültség: $T = m_1m_2(1 + \sin\alpha)g/(m_1 + m_2)$.

Sajátos esetben, amikor $\sin 30° = ½$, megkapjuk az eredeti feladatunkat. Ekkor a gyorsulás $a = g/4$,. a $T = 3mg/4$, ami a már kiszámított értékekhez vezet.

IV. A feladat bővítése a lejtő és a test között fellépő súrlódással ($\mu \neq 0$)

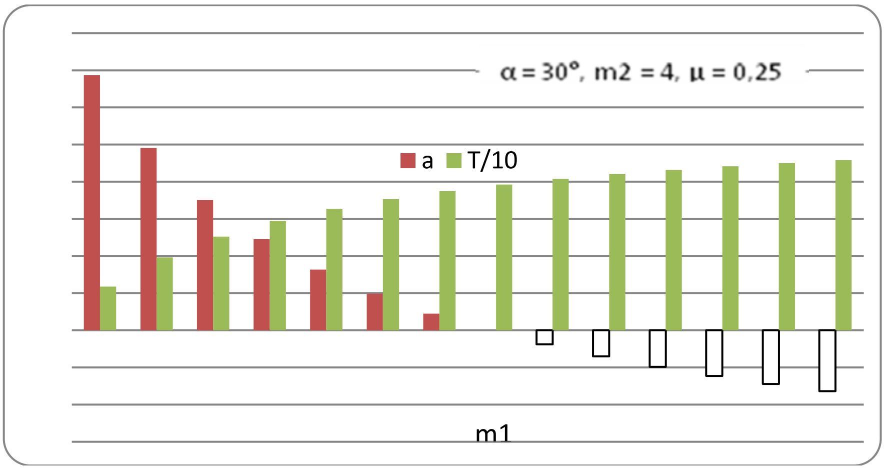


$a = (G - G_t - F_s)/2m = (mg - mg\cdot\sin\alpha - \mu mg\cdot\cos\alpha)/2m = (1 - \sin\alpha - \mu\cdot\cos\alpha)g/2$

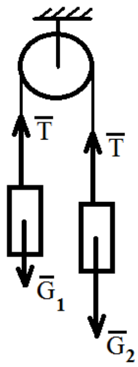
$T = m\,a + G_t + F_s = m(1 - \sin\alpha - \mu\cdot\cos\alpha)g/2 + mg\cdot\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha = m(1 + \sin\alpha + \mu\cdot\cos\alpha)g/2$

Ha $\mu = 0$, akkor $a = (1 - \sin\alpha)g/2$, ami $\sin 30° = ½$ értékre $a = g/4$-et ad. Ebben az esetben $T = 3mg/4$ lesz.

Ha $\alpha = 30°$, $m_2 = 4$, $\mu = 0{,}25$, és m_1-nek 1-14 közötti értékeire a gyorsulás és a feszültség az alábbiak szerint változik:



Látható, ha $m_1 = 8$, akkor $a = 0$, a feszültség pedig $T = G_2$.



V. Átmenet újabb feladatokhoz

1. Ha a lejtő szöge $\alpha = 90°$, vagyis a két test egy állócsigán függőlegesen lóg, és $m_1 \neq m_2$, akkor a gyorsulásnak a következő értéket kellene felvennie:

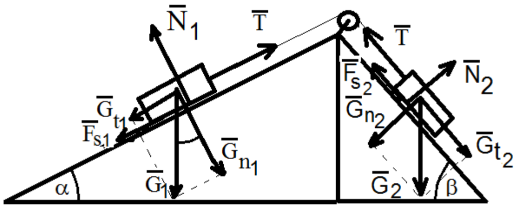
$$a = (m_2 - m_1)g/(m_1 + m_2),$$

amit a gyorsulásnak az előző képletéből a $\sin 90° = 1$ értékkel meg is kapunk.

$$T = 2m_1m_2g/(m_1 + m_2).$$

Ha $m_1 = m_2 = m$, akkor $a = 0$, és $T = mg = G$.

2. Ha kettős lejtőt használunk:



(ennek a megoldását az olvasóra bízzuk)

Kovács Zoltán