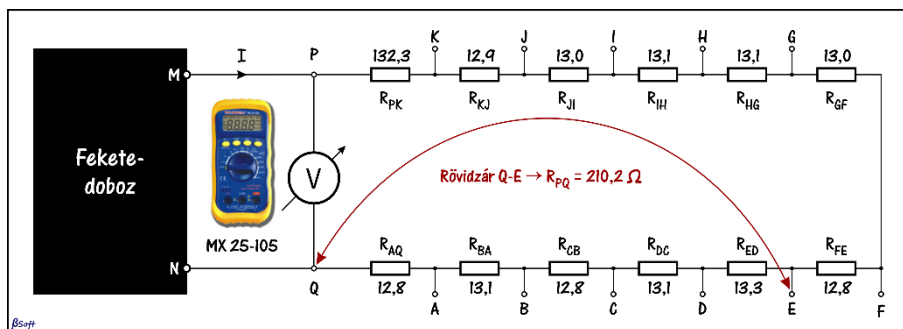




Feketedobozos laborgyakorlat a nagyváradi Ady Endre Líceum fizikumában

A kísérlet rövid bemutatása

Mivel mérőműszert is kaptunk a kísérlethez, feltételezzük, hogy a feketedobozban valamilyen áramforrás van. A letakart doboz két vezetékét egy „ellenálláslétrára” kötjük, és egy közepkategóriájú digitális mérőműszerrel állandóan mérjük az U_{PQ} feszültséget (1. ábra). Az ellenálláslétra elemei $12\ \Omega$ -os ellenállásokból állnak, de mindegyiket külön-külön bemértük, és az értékeket felírtuk az elvi kapcsolási rajzra. A két végén csipesszel ellátott rövid vezetékkel (Rövidzár) rendre rövidre zárhatunk ellenállásokat, ellenálláscsoportokat. Amennyiben ügyesen kezeljük a csipesz drótot, akkor a P és Q mérőpontok közötti R_{PQ} ellenállás $12,8\ \Omega$ és $262,5\ \Omega$ közötti értékeket vehet fel, lényegében $12\ \Omega$ -os lépésekben. Az MX 25-105 mérőműszer $3,999\ V$ -ig négy digités kijelzésű, és $\pm 1,2\ \%$ -os pontossággal méri az U_{PQ} feszültséget. A voltmérő $R_V = 10\ M\Omega$ belső ellenállása állandóan párhuzamosan van kötve az R_{PQ} ellenállással, de az értéke alig befolyásolja az U_{PQ} értékét – maximum $0,445\ ppm$ (Parts Per Million) –, vagyis elhanyagolható, mivel az U_{PQ} feszültségnek csak a hetedik, úgysem látható számjegytől ($3,1162228963\ V \rightarrow 3,1162215086\ V$) befolyásolja az értéket. Mi van a feketedobozban?



1. ábra

A mérőberendezés elvi kapcsolási rajza

A mérési eredmények feldolgozása

A mérési eredményeket az 1. táblázatban foglaltuk össze. Az elsődlegesen feldolgozandó adataink az első két adatsorban vannak. A mérései befejeztével a fizikus mindig ábrázolja a méréseket, mert egy grafikon sokszorosan többet mond a számsornál.

1. táblázat. A mérési eredmények és a terhelési grafikon megrajzolásához szükséges adatok összefoglalója

Index	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Rövidzár	Q-A	Q-B	Q-C	Q-D	Q-E	Q-F	Q-G	Q-H	Q-I	Q-J	Q-K	P-K	P-J	P-I	P-H	P-G	P-F	P-E	P-D	P-C
$R_{PQ}[\Omega]$	262.5	249.4	236.6	223.5	210.2	197.4	184.4	171.3	158.2	145.2	132.3	143.0	130.1	117.1	104.0	90.9	77.9	65.1	51.8	38.7
$U_{PQ}[V]$	3.109	3.107	3.105	3.103	3.101	3.098	3.095	3.091	3.087	3.082	3.076	3.077	3.070	3.052	3.037	3.021	2.997	2.963	2.910	2.903
$I[mA]$	11.84	12.46	13.12	13.88	14.75	15.69	16.78	18.04	19.51	21.23	23.25	21.52	23.60	26.06	29.20	33.23	38.47	45.51	56.18	75.01

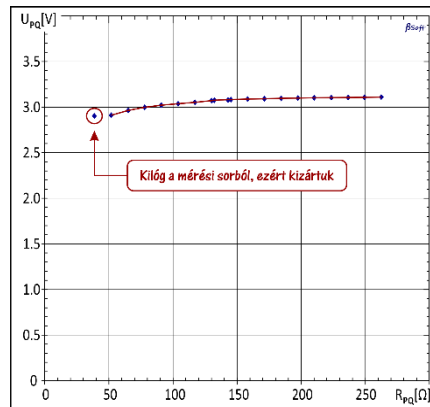
A nyers grafikon a 2. ábrán látható. A kísérleti eredmények értelmezéséhez szokott fizikus rögtön észreveszi, hogy az utolsó mérés bizonyára hibás, mert kilóg a sorból, ezért be is karikázza. Nem javítja ki, hanem majd megmagyarázza a hiba okát, csak azután hagyja ki a feldolgozásból.

Egy komplex, eddig szavakban nem meghatározott feladat van kialakulóban. A középiskolai fizikában sok feladat van az áramkörökkel kapcsolatban, ezeket – amennyiben elégséges adat áll rendelkezésünkre –, a Kirchhoff-törvényekkel meg is oldhatjuk. A helyes megoldás után csakis egy eredményt kapunk, a feladat mindig egy több ismeretlenes egyenletrendszer megoldásához vezet. Ez az egész nem több egy matematikai feladatnál, hiányzik belőle az áramkör működésének megértése, de a kiszámított eredmény leírja az áramkör viselkedését. Ezt **áramkör-analízisnek** nevezzük.

Most az áramkör-analízisnek a fordítottja fogalmazódik meg: ismerjük egy elrejtett áramkör viselkedését, határozzuk meg annak teljes szerkezetét. Ezt a feladatot **áramkör-szintézisnek** nevezzük.

Áramkör-szintézis

Ez egy jellegzetes kísérleti feladat! Meghatározzuk az áramkör viselkedését, majd az ábrázolt numerikus adatokra megpróbálunk valamilyen görbét illeszteni. A lineáris elemeket tartalmazó kapcsolások mérési pontjai egy egyenes, vagy valamilyen jellegzetes görbe mentén helyezkednek el. Ha nem „látjuk” az egyszerű görbénk kialakulását, akkor addig „gyötörjük” az adatokat (*más-más koordináta-rendszerben ábrázoljuk*), ameddig kialakulni látszik az elképzelt görbe, vagy a legjobb szintéziseredményt adó egyenes. A legkisebb négyzetek¹ módszere segítségével meghatározzuk annak az illesztőgörbének az analitikai



2. ábra

A mérési eredmények közvetlen ábrázolása. Remény sincs az áramkört leíró illesztőgörbe megrajzolására.

¹ Legkisebb négyzetek módszere: Azt az $f(x)$ függvényt keressük, amely legjobban közelíti a mérési pontjainkat, vagyis a függvényértéktől a mérési pontig kiszámított távolságok összege a legkisebb. Mivel irányított szakaszokról van szó, az abszolút értékeket kellene vennünk, de a minimum-

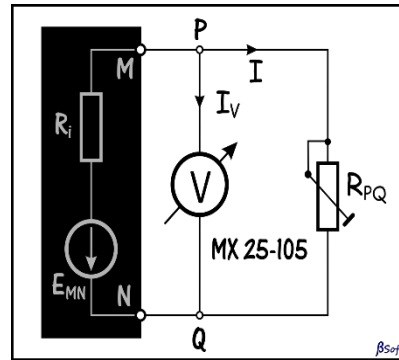
együletét, amely a legjobban közelíti a mérési pontjainkat. A függvény analitikai formája birtokában megpróbáljuk elképzelni azt az áramkört, amelynek viselkedését ezzel a függvényvel írhatjuk le. A függvény numerikus együtthatóit összevetjük az analitikus függvény alkotórészelemeket tartalmazó együtthatóival, és ezzel meg is oldottuk a feladatot. Az eredmény elvileg sem lehet egyértelmű, mert a különböző módokon elképzelt kapcsolásokat leíró analitikus függvények nem egyformák. A legjobb szintézist az a változat adja, amely közvetlenül a mérési adatokból jött létre. Minden más forma – a többszöri számítási kerekítések miatt – növeli a hibákat.

A 2. ábra és a mérések azt mutatják, hogy a feketedobozban egy elem van, amelynek belső ellenállása eléggé nagy lehet, ha az $U_{MN} = U_{PQ}$ feszültség ilyen mértékben csökken az 50 mA nagyságrendű áram leadása során. Egy elképzelt kapcsolási változat a 3. ábrán látható.

Az [1] egyenlet külső áramhurokra felírt Kirchhoff-törvényből ($E_{MN} = I \cdot R_i + I \cdot R_{PQ}$) következik:

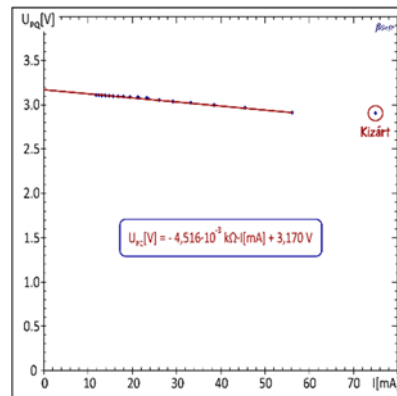
$$U_{PQ} = -I \cdot R_i + E_{MN} \quad [1]$$

Az áramot nem mértük, de könnyen kiszámíthatjuk az $U_{PQ} = I \cdot R_{PQ}$ összefüggésből, az értékeket már be is írtuk az 1. táblázatba. Az [1] egyenlet a keresett analitikus függvény, vagyis a 4. ábrán látható mérések illesztőgörbéjének egyenletéből kiolvashatjuk az E_{MN} elektromotoros feszültséget és az elem R_i belső ellenállását. A 20. mérési pontot továbbra is kizárjuk, mert a 75,1 mA áram miatt melegek az ellenállások, megnőtt az ellenállásuk, vagyis a kiszámított áram értéke hibás volt.



3. ábra

Az elképzelt kapcsolás vázlatja



4. ábra

Adatfeldolgozási szempontból nem a legjobb megoldás

számítással nehezen boldogulnánk az abszolút értékek deriválásával, ezért a távolságok négyzetének összegét tanulmányozzuk. Az Excel és más adatfeldolgozási programok néhány alapfüggvényre automatikusan megadják a trendvonal egyenletét. Még jóval az Excel elterjedése előtt, Pascalban saját statisztikai feldolgozást készítettem, ennek az a fő előnye, hogy bármikor bevezethetek egy új függvényt, ráadásul **18 számjegyes pontossággal** végzi a műveleteket a $\pm 10^{\pm 4932}$ nagyságrendű számokkal is.

Kijelölt és elvégzett számítások

Az 1. táblázatot kényelmi szempontból állítottuk össze, már előre kiszámoltuk a grafikon megrajzolásához szükséges adatokat is. A számítógépes feldolgozásnak az a különleges előnye, hogy egy változónak átadhatjuk a kiszámítandó értékeket a számítási kapcsolataikkal együtt, a számítógép minden alkalommal a rendszer által megengedett legtöbb számjeggyel (*Excel: 15, Pascal, C++: 18*) számítja ki a köztes értékeket. A köztes számítások (*a legkisebb négyzetek módszer algebrai számításai rendkívülien bonyolultak*) így sokkal pontosabbak, mert az egyszeri kerekítés hibáját nem vesszük tovább, mindig sok számjeggyel dolgozunk. Ennél a kísérletnél nem nagyon fontos ez a nagy pontosság, inkább csak a hiba lehetőségére hívtuk fel a figyelmet. A sok számjegyes pontosságú számítások végeredményét mindenütt a bevitt adatok pontossági osztálya alapján határozzuk meg, **csak a végén kerekítünk.**

Nem a legjobb adatfeldolgozási módszert választottuk!

A kizárással megoldottunk egy mérési hibát, de a precíziós adatfeldolgozásnál mindig az eredeti mért értékekkel kell dolgoznunk, mert a számológépes műveletek során – a kerekítések miatt – komoly adatvesztés történhet. A kijelölt osztás eredménye pontosabb az elvégzett osztás eredményénél! Olyan függvényt kell találnunk, amelynek a jobboldalán csak a közvetlenül mért mennyiségek szerepelnek, így csökkenthetjük a kerekítések miatt megjelent hibákat.

A szerző által helyesnek tartott megoldás

Megragadjuk, és betartjuk az előbbi ötletet: a képletünk jobboldalán csak a közvetlenül mért mennyiségek szerepeljenek. Ha egy jelenség valójában a változó mennyiség reciprokjával arányos, akkor amennyiben lehet, úgy kell felírunk a jelenségre jellemző függvényt, hogy ez megvalósuljon. A 3. ábra alapján felírható a következő összefüggés:

$$I \cdot R_i + I \cdot R_{PQ} = E_{MN}. \quad [2]$$

Amint fentebb bizonyítottuk, a voltmérőn átfolyó áram elhanyagolható az R_{PQ} ellenálláson átfolyó áramhoz képest, tehát $U_{PQ} = I \cdot R_{PQ}$. Az áram értékét behelyettesítjük a [2] képletbe, ezután ezt kapjuk:

$$E_{MN} = U_{PQ} \left(1 + \frac{R_i}{R_{PQ}} \right) \quad [3]$$

A [3] képletet a célnak megfelelő formára alakítjuk:

$$\frac{1}{U_{PQ}} = \frac{R_i}{E_{MN}} \cdot \frac{1}{R_{PQ}} + \frac{1}{E_{MN}} \quad [4]$$

Bevezetjük a következő jelöléseket:

$$\begin{aligned} y &= 1/U_{PQ}; & n &= 1/E_{MN}; & m &= R_i/E_{MN}; \\ m &= R_i \cdot n; & x &= 1/R_{PQ}; & f(x) &= m \cdot x + n \end{aligned}$$

A [4] képlet egy elsőfokú függvény $1/R_{PQ}$ -ban ($1/R_{PQ}$ – vezetés a P és Q mérőpontok között). Az 5. ábrán méréstechnikailag helyesen ábrázoltuk az U_{PQ} reciprokjának függését az $1/R_{PQ}$ függvényében. Az ábrázoláshoz felhasznált mennyiségeket megmértük, és

hagytuk, hogy az Excel a 15 számjegyes pontosságával dolgozza fel, majd a végén az elérhető pontosságnak megfelelően kerekítünk. Az n szabadtag tartalmazza az elem E_{MN} üresjárási feszültségét: $n = 1/E_{MN}$, ahonnan az

$$E_{MN} = 1/0,315412575 \text{ V} = 3,17045 \text{ V}, \text{ ezt az értéket kerekítjük}$$

$$E_{MN} = 3,170 \text{ V-ra}, \quad [5]$$

mivel a feszültségek négy számjegyűek voltak. Az iránytényező a belső ellenállás és az elektromotoros feszültség hányadosa, vagyis $m = R_i \cdot n$.

$$R_i = 1,42845521 \cdot 10^{-03} / 0,315412575 \text{ [k}\Omega\text{]}$$

$$R_i = 4,52885 \Omega = 4,529 \Omega \quad [6]$$

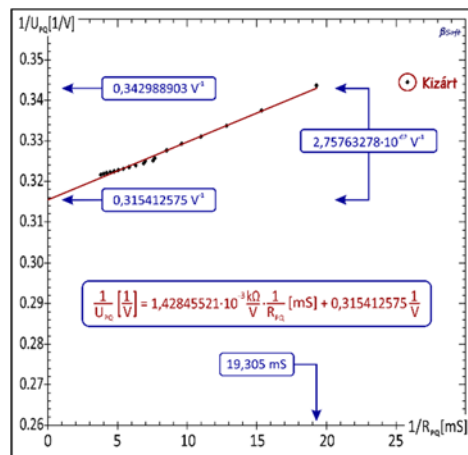
Újból az eredeti szabadtaghoz nyúlunk, különben a már elvégzett műveltek kerekítései elrontanák a pontosságot. A saját fejlesztésű számítógépes statisztikai feldolgozásban nagyobb pontossággal dolgozunk, bármelyik köztes adat 18 számjegyes pontosságú, csak a legvégső eredménynél kerekítünk.

A méréseink végeredményének pontossága

Senkit se tévesszen meg, hogy a köztes számításoknál sok számjegyet használtunk, az csak a meghirdetett módszer pontosságának kihasználása érdekében történt. Ennek ellenőrzésére az 5. ábrán látható adatok alapján érdemes kiszámítani az illesztőegyenest,

és összevetni azt a legkisebb négyzetek módszere alapján kiszámított értékkel (a bekeretezett $1/U_{PQ}$ tapasztalati egyenletből). Ha megvizsgáljuk a mérési pontok elhelyezkedését az illesztőegyenest körül, jól látható, hogy nem statisztikai szórásról van szó (a beépített, és az elkerülhetetlen mérési pontatlanság miatt), hanem valamilyen tendencia vehető észre a pontok „kigyózásában”. Ez egyértelműen az ellenállások melegedésének tulajdonítható. Az se tévesszen meg senkit, hogy a kigyózás során a mérési pontok és az illesztőegyenest távolságai igen nagyok látszanak, ugyanis a grafikont a függőleges irányban jól széthúztuk. A 2. táblázatban látható, hogy a legnagyobb távolság a 11. mérési ponthoz tartozik, annak viszonylagos eltérése $3,409 \cdot 10^{-3}$. A táblázat összeállításánál betartottuk a kijelölt műveletekkel kapcsolatos elvet, ugyanis egyetlen adatot sem írtunk be kézzel, mindegyik adat egy-egy kijelölt művelet tizenöt számjegyes pontosságú eredménye, de ebből csak néhány számjegyet mutattunk meg. Másként szólva, a táblázatban nincs kézzel írt adat, így az elírási hibalehetőség is lényegesen lecsökkent.

Bár nem statisztikai szórásról van szó, mégis szeretnénk kiszámítani a méréseink pontosságát. Egyenként kiszámítjuk a mérési pontok $\Delta = 1/U_{PQ} - f(1/R_{PQ})$ távolságait az



5. ábra

Adatfeldolgozási szempontból is helyes ábrázolás

illesztőegyenestől, kiszámítjuk a függvényértékhez mért $\delta = \Delta/f(1/R_{pQ})$ viszonylagos hibát, és meghatározzuk ezek négyzetes szórását². *Az eredeti, igen színvonalas könyvben³ sokkal több információt kapunk a módszerről.* Ha nem készítünk saját számítógépes programot, akkor használhatjuk az Excel program standard négyzetes eltérésre (σ) kifejlesztett STDEV.P függvényét, amely a $\sigma = 1,587 \cdot 10^{-3}$ -t adja. A σ_k kvadratikus szórás (*variancia*) megmutatja azt az átlagérték körüli $\sigma_k = \sigma/\sqrt{n} = \pm 3,640 \cdot 10^{-4}$ értéksávot, amelyben az n számú mérés 68,27 %-a bizonyossággal megtalálható. Ez a képlet csak legalább száz mérésre ad helyes értéket, ezért bevezettek egy korrekciós **t faktort** (3. táblázat, a 2. referenciából származó táblázat kibővített változata).

2. táblázat. A hibaszámításhoz szükséges mérési eredmények és adatok összefoglalója

Nr.	1/R _{pQ} [mS]	1/U _{pQ} [1/V]	m [kΩ/V]	n [1/V]	f(1/R _{pQ})	Δ = 1/U _{pQ} - f(1/R _{pQ})	δ = Δ/f(1/R _{pQ})
1	3.80952	0.321647	1.42846E-03	0.315413	0.32085	7.9252E-04	2.470E-03
2	4.00962	0.321854	1.42846E-03	0.315413	0.32114	7.1374E-04	2.223E-03
3	4.22654	0.322061	1.42846E-03	0.315413	0.32145	6.1119E-04	1.901E-03
4	4.47427	0.322269	1.42846E-03	0.315413	0.32180	4.6490E-04	1.445E-03
5	4.75737	0.322477	1.42846E-03	0.315413	0.32221	2.6835E-04	8.328E-04
6	5.06586	0.322789	1.42846E-03	0.315413	0.32265	1.3997E-04	4.338E-04
7	5.42299	0.323102	1.42846E-03	0.315413	0.32316	-5.7301E-05	-1.773E-04
8	5.83771	0.323520	1.42846E-03	0.315413	0.32375	-2.3159E-04	-7.153E-04
9	6.32111	0.323939	1.42846E-03	0.315413	0.32444	-5.0290E-04	-1.550E-03
10	6.88705	0.324465	1.42846E-03	0.315413	0.32525	-7.8579E-04	-2.416E-03
11	7.55858	0.325098	1.42846E-03	0.315413	0.32621	-1.1121E-03	-3.409E-03
12	6.99301	0.324992	1.42846E-03	0.315413	0.32540	-4.0990E-04	-1.260E-03
13	7.68640	0.325733	1.42846E-03	0.315413	0.32639	-6.5935E-04	-2.020E-03
14	8.53971	0.327654	1.42846E-03	0.315413	0.32761	4.2830E-05	1.307E-04
15	9.61538	0.329272	1.42846E-03	0.315413	0.32915	1.2459E-04	3.785E-04
16	11.00110	0.331016	1.42846E-03	0.315413	0.33113	-1.1093E-04	-3.350E-04
17	12.83697	0.333667	1.42846E-03	0.315413	0.33375	-8.2612E-05	-2.475E-04
18	15.36098	0.337496	1.42846E-03	0.315413	0.33736	1.4073E-04	4.172E-04
19	19.30502	0.343643	1.42846E-03	0.315413	0.34299	6.5368E-04	1.906E-03

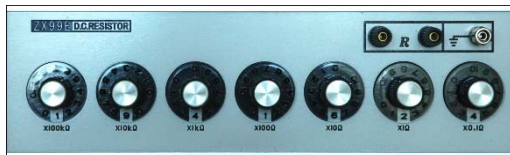
3. táblázat. A t-faktor értékei a mérések száma és a bizonyosság függvényében

Bizonyosság	n = 3	4	5	6	8	10	20	100	∞
68,27%	1,32	1,20	1,15	1,11	1,08	1,06	1,03	1,00	1,00
99,73%	19,2	9,2	6,6	5,5	4,5	4,1	3,4	1,00	1,00

² A fizikai mérések hibája (letölthető a 4 oldalas pdf): ftp://ftp.energia.bme.hu/pub/Energetikai_meresek_II/Hibaszamitas.pdf

³ Az 1262 oldalas könyv innen tölthető le: https://e-maxx.ru/bookz/files/numerical_recipes.pdf
 *** Numerical Recipes - The Art of Scientific Computing, Cambridge University Press, 2007, pp 780-785

A táblázatból kimaradt t értékeket lineáris interpolációval számítjuk ki. A 68,27 %-os bizonyosságra kiszámított t faktor, $n = 19$ -re $t = 1,033$, a 99,73 %-osra $t = 3,47$. Jelölje ϵ_M a mérési hiba értéksávját. A t faktor és a variancia alapján ennek értéke $\epsilon_M = t \cdot \sigma_k$. A 68,27 %-os bizonyosságnál ez a sáv $\pm 3,76 \cdot 10^{-4}$, a 99,73 %-os bizonyosságú értéksáv pedig $\pm 3,79 \cdot 10^{-3}$, ebben gyakorlatilag minden mérést megtalálunk (*még a 11. mérés is bőven belejér*). **Maradunk az $\epsilon_M = \pm 3,79 \cdot 10^{-3}$ viszonylagos mérési hibánál**, ami valójában az illesztőegyes irányítványzójének és tengelymetszetének a meghatározási hibája. Az m -ből és az n -ből származó fizikai mennyiség **mérési hibáját** azoknak középer-
 téke és az ϵ_M szorzatából kapjuk meg. Az F fizikai mennyiség kiszámított **E átlagértéke** alapján a mérési végeredményt $F_M = E \pm E \cdot \epsilon_M$ formában adjuk meg, az értékes számjegyek száma a mérőrendszerünk pontossági osztályától függ.



6. ábra
 ZX99E – precíziós ellenállászekrény

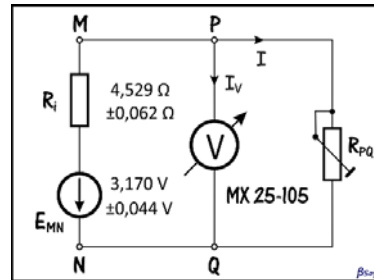
A nagyon jó eredmény láttán az egy kísérleten belüli nagyszámú mérésünkből származó pontosságot ne tévesszük össze a meghatározásunk pontosságával, ugyanis a hibába nem számítottuk be a mérőműszerünk gyártó szerinti feszültség-mérési ($\pm 1,2\%$) és ellenállás-mérési ($\pm 1,2\%$) hibáit. Ezek az elkerülhetetlen szisztematikus hibák összeadódva adják a meghatározás pontosságát. Valójában minden mérési kapcsolásra (*változó rövidzárak*) meg kellett volna határozni a műszerek által bevezetett szisztematikus hibát, de erről lemondunk, hiszen a feladat nem vár el ekkora körültekintést. Ha feltételezzük, hogy az elem „bírná” a sok mérést, és a hőmérséklet sem változik sokat, akkor **más-más műszerekkel megismételve ugyanazt a mérést**, csökkenthetnénk az egyetlen műszer hitelesítési és mérési hibáit. A módszert ellenőriztük: ugyanazt az ellenállást több műszerrel mérve (*az iskola műszerparkja azonos gyártmányú, de alacsonyabb kategóriájú műszerekből áll*) igazolódott a variancia csökkenése a műszerek számának négyzetgyökével, és tényleg nőtt a meghatározás pontossága. A kísérletben használt műszerünk ellenállásmérő funkcióját a 6. ábrán látható precíziós, $\pm 0,1\%$ -os pontosságú ellenállászekrényvel (ZX99E) ellenőriztük, és kiderült, hogy az egyezés átlaga $\pm 0,5\%$ alatt van. A feszültségmérést a 6 V-os méréshatáron a 7. ábrán látható, szintén $\pm 0,1\%$ -os pontosságú (UT61E) műszerrel ellenőriztük. Halomra mértünk 3 V-os gombelemeket, és kiderült, hogy az egyezés átlaga szintén $\pm 0,5\%$ alatt van.



7. ábra
 UT61E

A kísérlet mérési eredményei

Arra nincs lehetőségünk, hogy sok műszerrel megismételjük a méréseket, ezért elfogadjuk az ellenőrzött műszerünk szisztematikus hibalehetőségeinek összegét, és $\epsilon_s = \pm 1,0\%$ -kal számolunk. A teljes meghatározási hiba: $\epsilon = \epsilon_s + \epsilon_M = \pm 1,379\%$, ahol az ϵ_M a százalékban kifejezett viszonylagos mérési hiba. Kerekítéssel maradunk az $\epsilon = \pm 1,38\%$ -nál. Amennyiben megelégedtünk volna a szokásos egykét méréssel, az ϵ_M értéke akármelyik lehetett volna a 2. táblázat utolsó oszlopából, vagyis akár tízszeres hibát is kifoghattunk volna. Ha $n = 14$ műszerrel (*Ady – Fizikum, $\pm 2\%$ -os pontosságú műszerek*) megismételjük a húsz mérést, akkor az összeadódott és ellenőrizetlen



8. ábra

A fekete-doboz kapcsolási rajza

4 %-os szisztematikus hiba a már ismert módon $\pm 4\% / \sqrt{14} = \pm 1,07\%$ alá csökkent volna. Egyszóval, szisztematikus, tőlünk független hiba is lényegesen lecsökkenthető a több mérőműszer használata által, vagyis igaz a régi magyar szólás: *Több szem többet lát!*

Mi van a feketedobozban?

A fentiek alapján a fekete-dobozban egy $E_{MN} = 3,170\text{ V}$ elektromotoros feszültségű és $R_i = 4,529\ \Omega$ belső ellenállású galvánelem van, valójában két AA-s jelzésű elemet kötöttem sorba. A fenti magyarázat alapján megadhatjuk a 8. ábrán látható kapcsolási rajzot és a szabványos végeredményt is. A meghatározás végeredményét az $\mathbf{F} = \mathbf{E} \pm \mathbf{E} \cdot \mathbf{e}$ képlet szerint adjuk meg: $\mathbf{E}_{MN} = 3,170\text{ V} \pm 0,044\text{ V}$; $\mathbf{R}_i = 4,529\ \Omega \pm 0,062\ \Omega$.

Hibaforrások

A következőkben néhány felismert hiba felsorolására kerül sor, ezek egy részét elkerülhettük volna.

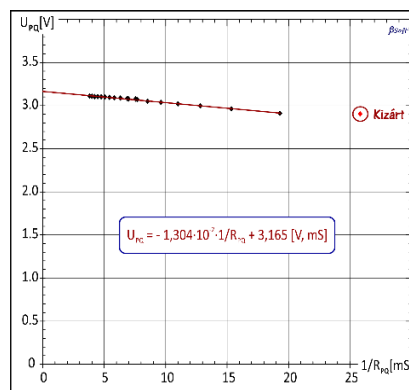
- A fő hibaforrás az áramjárta ellenállások kézzel is jól érezhető melegedése (*a nagyobb áramok esetében*), aminek a következtében az ellenállásuk eltérhet a statikus körülmények között mért értéktől. Egy későbbi, egyedi méréssorozatban egy kis ventilátor javított az ellenállások hűtésén.
- Nem elhanyagolható az általunk ideális feszültséggenerátornak elképzelt, de valójában vegyi folyamatokból energiát előállító elemek elektromotoros feszültségének és belső ellenállásának a terheléstől való függése sem. Mindezek ellenére csak lineáris viselkedésű alkatrészeket képzeltünk el.
- A kis ellenállások tartományában nem volt elégséges a 12 Ω -os léptetési lehetőség, ezért kevés mérőpont keletkezett (*20, de ezekből egyet kizártunk*). Egy pótlólagos, körülbelül 12 Ω -ot kitevő néhány ohmos ellenállássor megtöbbszörözhetné volna a mérési pontokat.
- Az MX 25-105 típusú mérőműszerünk 1,2 %-os pontossági osztálya megfelel a laborgyakorlat követelményeinek. A terhelő ellenállássor (*az alakja miatt a házi zsongonban csak ellenálláslétrának nevezjük*) elemeit előre megmértük, ez lehetővé tette az egyműszeres kísérletezést. Az ellenállások három digitális pontosságú mérése viszont nem volt eléggé pontos a kis ellenállások tartományában.

- A hibásnak vélt, és feldolgozásból kizárt kis ellenállású mérés tovább csökkentette a mérési pontok számát. A hibás mérés oka az ellenállás melege, ez elkerülhető lett volna, ha az ellenállásra alsó fokozatait legalább 1 W-os ellenállásokból építjük meg.

A laborgyakorlat eredményei, következtetések

- Egy nagyon egyszerű, nem eszközigényes laboratóriumi gyakorlattal sikerült bebizonyítani az elektromos áramkörszintézis lehetőségét a középiskolai fizikaoktatásban.
- Az ellenállásra alkalmazása az egyszerűsítés mellett egy sor érdekes pozitívummal is járt. Természetes módon tette nehezebbé és kreatívabbá az adatfeldolgozást, felvetette a matematikai műveletekkel „magnövelt” pontosságú mérések létrehozását.
- A természetesnek tűnő, a mérési eredményeket azonnal ábrázoló elképzelés (2. ábra) nem mindig vezet a helyes megoldáshoz. Egy fontos eredménye mégis volt: az R_{PQ} csökkenésével csökkent a feketedoboz U_{PQ} kimenőfeszültsége, vagyis a dobozban egy viszonylag nagy belső ellenállású áramforrás van. Azt is észrevettük, hogy az utolsó mérés kilóg a sorból, talán hibás.

- Ilyenkor a fizikus olyan grafikon megrajzolását készíti elő, amely bizonyára egy elsőfokú illesztőgörbét tesz lehetővé. Mivel az áramkört leíró Kirchhoff-egyenletben az R_{PQ} a nevezőben van, könnyen hajlamosak vagyunk a reciproka függvényében megrajzoltatni az $U_{PQ}=f(1/R_{PQ})$ függvényt (9. ábra), ez **látszólag egy gyönyörű egyenest ad**, csak az együttműködésben nem tudjuk szétválasztani a fekete-doboz jellemzőit. Mégis, a szabadtag (i_{sc} üresjárási feszültség) fizikailag is jobb eredményt ad, hiszen az $1/R_{PQ} = 0$ -ban az R_{PQ} nincs többé jelen, ez olyan, mintha a voltmérővel közvetlenül



9. ábra

Az R_i -t nem tudjuk elválasztani az R_{PQ} -tól
 Az $U_{PQ} = E_{MN}/(1 + R_i/R_{PQ})$ egyenletben az elem belső ellenállását nem tudjuk elválasztani az R_{PQ} -tól. Amit mi egyenesnek látunk, az az R_i/R_{PQ} -nak kizárólag a nagyon kis értékeire érvényes közelítésből származó egyenlet: $U_{PQ} = (1 - R_i/R_{PQ}) \cdot E_{MN}$, mert $1/(1 \pm x) \approx 1 \mp x$. Ez az elvileg hibás módszer csak a nagyon kis belső ellenállású elemekre alkalmazható. Ha az R_i/R_{PQ} arány kisebb 0,01-nél, a számolás akkor is 1 % körüli hibát visz be. Másként szólva az elsőfokú jól „simuló” illesztőgörbe még nem jelenti azt, hogy a mérőpontok egy matematikailag is lineáris függvénykapcsolatból jöttek létre. Ez a módszer zsákutca, maradjunk az 5. ábrán bemutatott elképzelésnél.

Bartos-Elekes István, nyugalmazott fizika-, informatika- és elektronikatanár, Ady Endre Líceum, Nagyvárad