Pavlovits Tamás

Mathesis universalis és végtelen

A matematika mint a megismerés normája a kora újkorban*

A 17. században a matematika forradalmi változásokon ment keresztül, és robbanásszerű fejlődésnek indult. Ez a század fedezi fel a valószínűség-számítást, a projektív geometriát, a koordináta-, azaz analitikus geometriát, az integrál- és differenciálszámítást, majd ezek összevonásával az infinitezimális kalkulust; valamint ugyanebben a században kerül sor a geometria, az aritmetika és az algebra egyesítésére. Ezzel párhuzamosan a matematikának a filozófiához való viszonya is gyökeresen átalakul. Galilei és Descartes meghirdetik a fizika matematizálásának a programját, melynek során a matematika a természetben lejátszódó folyamatok értelmezésének kulcsává válik. A matematika ugyanakkor fontos szerepre tesz szert a megismerés elméletében is. A 17. század gondolkodói mély csodálattal tekintenek a görög matematika teljesítményeire. Ám nemcsak a görög matematikai módszerek továbbfejlesztésén dolgoznak, hanem komolyan elgondolkodtatja őket e módszerek hatékonysága is. A kora újkor a görög matematikai műveken keresztül felfedez egy olyan tudományos módszert, amelyet szigora, koherenciája, evidenciája és verifikálhatósága alkalmassá tesz arra, hogy az igazság kutatásának ideális módjává váljék. A matematikában így sokan az egzakt tudomány modelljét ismerik fel. Jól mutatja ezt Descartes arra irányuló törekvése, hogy a matematikai módszert általánosítsa, és kidolgozza az egyetemes tudomány módszertanát, amelyet *mathesis universalis*nak nevez. Ennek segítségével a tudás legkülönbözőbb területeire igyekszik kiterjeszteni a matematikában feltárt megismerési eljárások érvényességét. E törekvések folytán a matematika, vagy legalábbis a matematikai módszer, a megismerés normájává válik. Ez a folyamat elválaszthatatlanul hozzátartozik a tudomány modern fogalmának kialakulásához, hiszen ennek köszönhetően jelentek meg az evidencia, a verifikálhatóság, az egzaktság kritériumai a tudományos megismerésben.

* A tanulmány a K 125012 számú OTKA-pályázat támogatásával készült. Köszönetet szeretnék mondani Nagy Gábor Péternek, az SZTE és a BME matematikaprofesszorának, aki szakmai tanácsaival sokat segített e tanulmány matematikai vonatkozásainak pontosításában.

Ez a folyamat a 17. században nem volt feszültségmentes, és problémákhoz vezetett a matematikán belül. A *mathesis universalis* karteziánus eszméje ugyanis a görög matematikai gondolkodásban gyökerezett, amelyet Eukleidész *Elemek* című műve foglalt össze. Tudománytörténeti tény, hogy a görög matematikának csodálatos teljesítményei mellett voltak gyengéi és hiányosságai is. Egyik ilyen a végtelennel való számolás: a görög matematikából hiányoztak azok a módszerek, amelyek a végtelennel kapcsolatos mennyiségek kalkulációját tették volna lehetővé.[1] Nem túlzás azt állítani, hogy a görög matematika, és főként az euklideszi geometria, nem vett tudomást a végtelenről, és határozottan finalista szemléletmód jellemezte. Ez a végességet előtérbe helyező szemléletmód ugyanakkor átszivárgott azokba a kora újkori megismerési modellekbe, amelyek a görög matematikai módszereket tekintették mintának. A problémát az okozta, hogy nehéz volt összeegyeztetni egymással a görög matematikából megörökölt finalista szemléletmódot azokkal a végtelennel kapcsolatos matematikai eljárásokkal, amelyeket a kora újkori matematikusok dolgoztak ki. A 17. század folyamán felfedezett matematikai eljárásokban ugyanis egyre nagyobb szerepet játszottak a végtelennel végzett matematikai műveletek és számolások. A század végére ez oda vezetett, hogy bizonyos esetekben éppen a matematika nem felelt meg annak a normának, ami belőle eredt. Jelen tanulmányban arra a feszültségre szeretnék rámutatni, amely a megismerés matematikai modellje és a végtelennel kapcsolatos matematikai eljárások között feszült a 17. század végén. Először azt kell szemügyre vennünk, milyen módon vált a matematikai módszer a megismerés modelljévé, majd a végtelennel kapcsolatos matematikai eljárásokat mutatom be, hogy világossá tegyem a matematikai megismerés és a végtelen matematikája közötti feszültséget a korban.

I. A *MATHESIS UNIVERSALIS*

A kora újkorban a matematika jelentősége messze meghaladta a geometriai, aritmetikai és algebrai eljárások, technikák és módszerek kereteit. A kor egyik fontos törekvése arra irányult, hogy a matematikai tudományokat a szigorúan megalapozott, egzakt tudomány modelljeként értelmezzék. Mivel a 17. századi gondolkodók úgy tekintettek a matematikára, mint arra a tudományra, amely a leginkább alkalmazkodik az ész helyes használatához, ezért joggal várták, hogy a matematikai gondolkodás vizsgálata elvezet az elme kognitív képességeinek

[1] Természetesen Arkhimédész kivétel, hiszen ő már a Kr. e. 3. században kidolgozott olyan módszereket görbe oldalú alakzatok (pl. kör vagy a parabola egy része) területének kiszámítására, amelyek az infinitezimális kalkulus előfutárának tekinthetőek.

megismeréséhez. Ily módon a matematika általános szerepre tett szert a tudományelméletben, az ismeretelméletben és a logikában egyaránt.[2]

A kora újkori filozófia számos meghatározó alakja nagy matematikus is volt egyben, és jelentős hatást gyakorolt a matematika fejlődésére. Galilei, Descartes, Pascal, Leibniz, Newton nevéhez jelentős matematikai felfedezések kötődnek, ezért nem csoda, ha filozófiájukat is mélyen áthatja a matematikai gondolkodás. Ez a hatás legfőképpen annak a módszernek a meghatározásában nyilvánult meg, amelyet szerintük a tudománynak követnie kell ahhoz, hogy bizonyossággal ismerje meg az igazságot. Lássunk erre néhány példát!

Descartes a *Szabályok az értelem vezetésére* című művének második szabályában kimondja, hogy „Csak azokkal a tárgyakkal szabad foglalkozni, amelyeknek bizonyos és kétségtelen megismeréséhez elménk elégségesnek látszik" (AT X, 362; mk. 98). Ez az elv Descartes szerint a következő konklúzióhoz vezet: „ha helyes a számításunk, akkor a már feltalált tudományok közül az aritmetika és a geometria az egyedüliek, amelyekhez e szabály követése visszavezet bennünket" (AT X, 363; mk. 99). Egyedül tehát az aritmetika és a geometria tudománya eredményez olyan bizonyos és kétségbevonhatatlan ismereteket, amelyek az emberi megismerés hatókörébe esnek. Ennek az az oka, hogy egyedül az aritmetika és a geometria „foglalkoznak olyan tiszta és egyszerű tárggyal, hogy egyáltalán semmi olyant nem tételeznek fel, amit a tapasztalat bizonytalanná tehetne, hanem teljesen az ésszerűen levezethető következtetésekben állnak" (AT X, 365; mk. 100–101). Ez a karteziánus szemléletmód erős hatást gyakorolt Pascalra, aki a geometriát a legkiválóbb tudománynak tekinti, mert szerinte „egyedül ez a tudomány ismeri az érvelés valódi szabályait", és mert „csak ez követi az igazi módszert, míg az összes többire természetes szükségszerűséggel telepszik rá egyfajta homály, amelyet teljességgel eloszlatni egyedül a geometriához értők tudnak" (*A geometriai gondolkodásról*, OC III, 391–392; mk. 39–40). Leibniz véleménye nagyon hasonlít Pascaléhoz: „A tudomány a bizonyítástól, a bizonyítások feltalálása pedig egy olyan Módszertől függ, amelyet nem mindenki ismer […]. Az igazi módszer teljes terjedelmében szerintem mindeddig teljesen ismeretlen maradt, és csak a matematikában gyakorolták." (Couturat 1966. 153.) Leibniz szerint a matematika kiválósága annak köszönhető, hogy „a matematika magában hordja saját próbáját [*les Mathématiques portent leur épreuve avec elles*]" (Couturat 1966. 154).

[2] A 17. században a matematika más jellegű filozófiai alkalmazása a természetfilozófia területén a legnyilvánvalóbb, ahol a fizika matematizálásának vagyunk a tanúi. A középkori arisztoteliánus-skolasztikus hagyomány nem törekedett a matematika integrálására a filozófiába. Ez főként a platonikus gondolkodás újrafelfedezésével és egyes hermetista tanok elterjedésével kapott erőre a késő reneszánszban. Fehér Márta *The 17th Century Crossroads of the Mathematization of Nature* című tanulmánya nagyszerű összefoglalását adja ennek a folyamatnak (Fehér 1995. 1–26).

Nemcsak a matematikai tudományokhoz kreatívan hozzájáruló gondolkodók értelmezték a matematikát az igaz tudomány modelljeként, hanem azok is, akik nem alkottak eredetit a matematikában, mint például Malebranche vagy Spinoza. Malebranche *Az igazság kereséséről* című műve hatodik könyvében azt írja, hogy a geometria „egyfajta egyetemes tudomány, amely megnyitja, figyelmessé teszi az elmét, és amely megmutatja, miként szabályozzuk a képzeletünket" (Malebranche 1979. 619), majd az örök és változhatatlan igazságokról szólva kijelenti, hogy „az aritmetikában, az algebrában és a geometriában azért csak ilyen igazságokat veszünk szemügyre, mert ezek az általános tudományok magukba zárnak és szabályoznak minden partikuláris tudományt" (Malebranche 1979. 626). Ludovicus Mayer Spinoza egy korai művéhez[3] írt előszavában a következőképpen jellemzi a matematikai módszer jelentőségét a filozófiában: „Mindazok véleménye, akik tudásban felette akarnak állni a nagy tömegnek, megegyezik abban, hogy a matematikai módszer, amellyel tudniillik meghatározásokból, posztulátumokból és sarktételekből következtetéseket vonnak le, a tudományok kutatásában és előadásában a legjobb és legbiztosabb útja az igazság keresésének és tanításának. Mégpedig teljes joggal." (Spinoza 1981. 137.)[4] Az angolszász hagyományban a matematikát nem értékelték oly nagyra, mint a kontinentális gondolkodásban. Bacon a matematikának csak igen lefokozott szerepet szánt a tudományok rendszerében, hiszen a filozófiát az érzéki tapasztalatokra és a kísérletekre szándékozott alapozni.[5] Hobbes azonban a matematika egyetemességét hangsúlyozza mondván, hogy minden tudománynak „matematikainak kellene lennie, ha szerzőik csak annyit állítanának, amennyit bizonyítani is tudnak […]. A fizika és az etika szerzőinek tudatlansága miatt van az, hogy a geometria és az aritmetika számítanak az egyedüli matematikai tudományoknak" (Hobbes: *Anti-White*, I. fejezet, 1. §. Idézi Medina 1985. 177). Ezek a példák jól mutatják, hogy a matematika milyen kitüntetett szerepet játszott a kora újkori tudományelmélet kontextusában.

Az értelmezésekben mutatkozó különbségek ellenére a gondolkodók többnyire egyetértenek abban, mi az oka a matematika kitüntetett státuszának a többi tudományhoz viszonyítva. A megismerésnek az a területe, ahol a matematikai kutatások folynak, tisztán intelligibilis, és nem vet rá árnyékot az érzéki megismerés. A matematika tárgyai, a számok, a geometriai elemek és alakzatok egyszerűek és egyetemesek. A bizonyításokat példamutató szigor jellemzi, az igazságukat könnyű ellenőrizni, és apodiktikus jellegük folytán a bizonyított

[3] *Renati Descartes Principia Philosophiae*, magyarul: Spinoza 1981.

[4] Spinoza ezen művét még életében, 1663-ban, kiadták, ezért Ludovicus Mayer véleménye nagy valószínűséggel összhangban áll Spinozáéval.

[5] Lásd azonban Gontier 2006, ahol a szerző amellett érvel, hogy a matematikával szembeni kritikája ellenére Bacon maga is felhasználja a matematikai módszer bizonyos elemeit egy egyetemes logika kidolgozásához, és ezért Descartes és Bacon viszonya a matematikához nem áll oly mértékben szemben egymással, mint ahogyan azt általában feltételezik.

tételek igazsága nem hagy helyet sem a kételynek, sem az cáfolatnak. A matematikai diskurzus alapvető jellemzői a világosság, az evidencia és a kétségbevonhatatlan bizonyosság. A matematika látványos fejlődése a reneszánsz végén és a kora újkor elején ahhoz a felismeréshez vezetett tehát, hogy a matematika egy olyan módszert zár magába, amely alkalmas az igazság evidens megismerésére és másokkal való megismertetésére. E felfedezés legfőbb következményeként a gondolkodók megpróbálták ezt a módszert általánosítani és kidolgozni egy egyetemes módszert, egy *mathesis universalis*t, amely az igazi tudomány eszméjével azonos (lásd Rabouin 2009 és Boros 1989. 79 skk.). E kísérletek során megpróbálták a matematikai módszer alkalmazási körét kiszélesítve alkalmazhatóvá tenni a filozófiában, annak érdekében, hogy az igazság megismerése más területeken is a matematikához hasonló evidenciával párosuljon. Ily módon a matematikai gondolkodás felváltja a logikát, avagy, pontosabban szólva, a matematika logikai funkciókat is betölt a 17. században.

Noha a matematika egy olyan módszert működtet, amely minden egzakt tudomány mintájául szolgálhat, ez nem jelenti azt, hogy e módszer kifejtett módon volt jelen a geometriában, az aritmetikában vagy az algebrában. Az imént idézett szerzőknél nemcsak a matematika dicséretével találkozunk, hanem annak kritikájával is. A matematikusoknak gyakran a szemére vetik, hogy nem elég módszeresek és hogy műveikben nem követik a megfelelő rendet. Descartes azzal vádolja az antik matematikusokat, hogy féltékenyen titokban tartották az igaz módszert, amit használtak.[6] Az, hogy a matematikusok nem tették nyilvánvalóvá a módszerüket és csupán gyakorlati eljárásaikból lehetett azt kikövetkeztetni, szükségessé tette a módszer működésének vizsgálatát a matematikán belül, hogy ezáltal általánosíthatóvá és a filozófiában is alkalmazhatóvá tegyék, és egyúttal a matematikai módszert logikai funkcióval ruházzák fel.

A régi matematikusok műveiben ez a módszer két formában fejeződik ki: az analízisben és a szintézisben. Az analízis és a szintézis meghatározása Descartes megfogalmazásában így hangzik:

> A bizonyítás elve pedig kétféle; az egyik tudniillik az analízis, a másik a szintézis útján történő bizonyítás. Az analízis azt az igaz utat mutatja meg, amely által módszeresen és mintegy a korábban ismertből kiindulva jutunk el a dologhoz. […] A szintézis ezzel szemben az ellentétes, mintegy a későbbi alapján nyert úton bizonyítja […] igen világosan azt, amit következtetésként levontak, mégpedig úgy, hogy a definíciók, posztulátumok, axiómák, teorémák és problémák hosszú sorát alkalmazza. (*Válasz a második ellenvetésre*, AT VII, 155–156; mk. 120–121).[7]

[6] „Nem nehéz észrevenni ugyanis, hogy a régi geométerek valamilyen analízist használtak, amelyet kiterjesztettek minden probléma megoldására, noha az utódoktól irigyelték annak ismeretét" (IV. szabály, AT X, 373; mk. 105).

[7] Az analízis és a szintézis közötti különbségtétel bevett volt a korban. François Viète, a modern algebra atyja így definiálja ezen eljárásokat: az analízis „annak feltételezése, amit ke-

Az analízis és a szintézis kiegészítik egymást: az analízis a felfedezés művészetét jelenti *(ars inveniendi)*, amely az elrejtett igazságok megtalálására szolgál, a szintézis pedig ezen igazságok meggyőző bizonyításának az eszköze. E két módszer sokkal jobban megfelelt a modern tudományos kutatásoknak, mint a skolasztikusok formális logikája. Nemcsak azért, mert egyszerűbb és világosabb volt, hanem mert képesnek tartották arra (elsősorban az analízist), hogy ismeretlen igazságokhoz elvezessen. A skolasztikus logikát, amely a 17. század elején bevett és elterjedt volt, formális jellege megakadályozta abban, hogy olyan igazságok megtalálásának eszköze legyen, amelyek nincsenek előzetesen adva a következtetések premisszáiban.[8] A matematikai módszer kitüntetettségét tehát az adta, hogy, úgy tűnt, közvetlen kapcsolatban áll az igazsággal és képes az elmét szigorú módon, korábban ismeretlen igazságok felismeréséhez vezetni. Az az igény, hogy e módszert a filozófiában is alkalmazhatóvá tegyék, szükségessé tette annak megértését, hogy milyen viszonyban áll a matematikai módszer használata az elme kognitív működésével.

A matematikai módszer kognitív feltételeinek elemzése egy olyan eredendő észleléshez vezet el, amely közvetlen kapcsolatban áll az evidenciával, és amely a műveletek bizonyosságát garantálja. Ez a percepció a matematikai módszer kognitív alapját képezi és biztosítja az észleléselmélet és a matematika kapcsolatát. A kora újkori szerzők különféle módokon nevezik ezt az észlelési aktust: *intuitus*nak, *lumen naturalé*nek (természetes világosságnak) vagy *visio clara et distinctá*nak (tiszta és elkülönült látásnak). Egy olyan mentális látásról van szó, amely a mentális tárgyak és viszonyaik közvetlen észlelését jelenti. Ha ezek a tárgyak és viszonyaik eléggé egyszerűek, akkor e közvetlen észleléssel evidencia jár együtt, amely lehetővé teszi az ítéletet a tárgy igaz vagy hamis voltáról. Ily módon a tárgyak és viszonyaik közvetlen észlelése garantálja az axiómák igaz-

---

resünk, mintha megelőlegeznénk annak érdekében, hogy eljussunk egy keresett igazsághoz, mégpedig a következmények által; a szintézis, ezzel szemben, egy megelőlegezett dolog feltételezése, annak érdekében, hogy a következmények útján eljussunk annak megismeréséhez, amit keresünk” (Viète 1630. 1–2). Lásd még a *Port-Royal logika* (Antoine Arnauld – Pierre Nicole: *La logique ou l'art de penser*) 4. könyvének 2. fejezetét, amelynek címe: *Deux sortes de méthodes: analyse et synthèse. Exemple de l'analyse* (Arnauld–Nicole 2014. 519–533).

[8] A *Szabályok*ban Descartes kritikával illeti a skolasztikus logika formalizmusát: „a dialektikusok minden művészete nem képes olyan szillogizmust formálni, amely következtetéssel találja meg az igazat, ha előbb nem rendelkeznek ennek anyagával, azaz ha már előbb nem ismerték azt az igazságot, amelyet ez a szillogizmus levezet. Nyilvánvaló ebből, hogy ők maguk az ilyen formulából semmi újat nem tanulnak, s ezért a közönséges dialektika teljesen haszon nélkül való azok szempontjából, akik a dolgok igazságát akarják kutatni” (X. szabály, AT X, 406; mk. 125). E kritika kontextusában Arnauld és Nicole műve, a *Port-Royal logika* sajátos pozíciót foglal el. Ez a mű nem gyakorol explicit kritikát a logikával szemben. Épp ellenkezőleg, Arnauld a matematikusokat kritizálja mondván, hogy nem követik a megfelelő rendet a bizonyításaikban, és megpróbálja Euklidész hibáit kijavítani. Mindazonáltal a *Port-Royal logika* egy olyan logikatankönyv, amely Descartes és Pascal művei alapján akarja megreformálni a skolasztikus logikát (Arnauld–Nicole 2014. 69). Descartes-nál és Pascalnál pedig egyértelmű a matematikai módszer dominanciája a logikával szemben.

ságát éppúgy, mint a bizonyítások bizonyosságát. Ez a garancia az axiómáktól egészen a tételekig terjed, feltéve, hogy a bizonyítás minden egyes lépése egyszerű és evidens módon belátható. Ahhoz, hogy a matematikai módszer mentális feltételei világossá váljanak, ennek az elemi percepciónak a természetét kell megérteni, hiszen ez garantálja a kapcsolatot az igazság és a megismerés között. Íme így fest a matematikai módszer kognitív sémája.

Ez a módszer az euklidészi geometrián alapult. Az euklidészi geometriában a természetes intuíció nagyon fontos szerepet játszik. Az euklidészi axiómák egyenlőségi és különbözőségi viszonyokat rögzítenek („amik ugyanazzal egyenlők, egymással is egyenlők"), a rész és az egész közötti viszonyokra vonatkoznak („az egész nagyobb a résznél"), valamint geometriai alakzatok viszonyait írják le („két egyenes vonal nem fog közre területet"). Ezen axiómák evidens jellege – éppúgy, mint a definícióké és a posztulátumoké – egy olyan természetes intuícióból ered, amely a tér végességén alapuló szemléletéhez kötött. Ez a módszer éppen a természetes intuíció miatt nem ad helyet a végtelennel kapcsolatos matematikai eljárásoknak. A görög matematikusok feltehetően azért zárták ki a végtelent a matematikai gondolkodás területéről, mert a görög geometriai szemléletmód a tér végességén alapult. Ez nem azt jelenti, hogy a végtelen semmilyen módon nem jelenik meg Eukleidész *Elemek* című művében,[9] hanem csak azt, hogy semmilyen pozitív szerepet nem játszik a bizonyításokban, és hogy a matematikai műveletek nem lépik túl a végesség kereteit. Köztudott, hogy a görög matematikusok számára komoly gondot okozott a folytonos mennyiségeknek, azaz a kontinuumnak a matematikai értelmezése. A kontinuum közvetlen kapcsolatban áll a végtelennel, hiszen a folytonos mennyiségek a végtelenig oszthatóak anélkül, hogy valaha elérnénk egy oszthatatlan mennyiséghez. A folytonos mennyiségek összetételének matematikai leírása éppúgy gondot okozott, mint a görbe oldalú geometriai alakzatok területének kiszámítása. A kontinuummal kapcsolatos legfőbb problémát a görögök számára az okozta, hogy nem tudtak összefüggést létesíteni a természetes számok diszkrét sorozata és a kontinuum között. Éppen ezért Eukleidész *Elemek* című műve két, egymástól független arányelméletet tartalmaz; az egyik (az ötödik könyvben) a folytonos mennyiségekre, a másik (a hetedik könyvben) a diszkrét mennyiségekre vonatkozik. Az euklidészi geometriára jellemző természetes intuíció és a 17. századi matematikai módszer mélyén feltárt elemi percepció összefüggenek egymással. Amikor Descartes a matematikai módszer mélyén egy olyan mentális műveletet fedez fel, amely szerinte kapcsolatot létesít az evidens belátás és az igazság között, akkor egyúttal abszolutizálja az evidens módon belátott axiomatikus igazságokat. Descartes értelmezésében az axiómák (vagy, ahogy ő nevezi, a közös fogalmak:

[9] Az első könyv második posztulátuma megköveteli, hogy minden egyenes vonal tetszés szerint meghosszabbítható legyen, a 9. könyv híres 20. tétele azt bizonyítja, hogy prímszámból prímszámok bármely adott sokaságánál több van, stb.

communes notiones) szükségszerűen igazak. Ebből a szempontból meglepő folyamatnak lehetünk tanúi a matematika 17. századi fejlődése során. Azok az eljárások ugyanis, amelyek a végtelent integrálták a matematikába, gyakran olyan eredményekhez vezettek, amelyek megkérdőjelezték az euklidészi matematikák egyetemes érvényességét és szükségszerűségét.

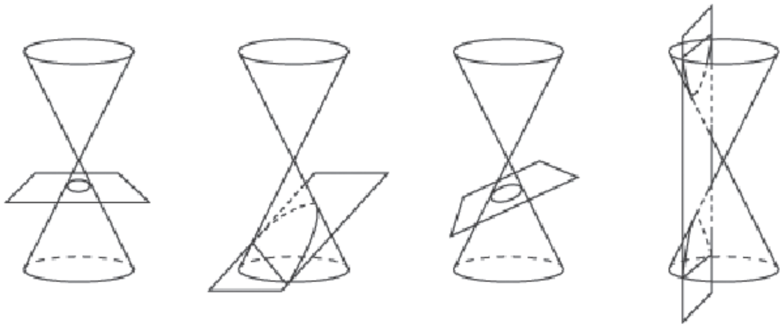
II. A VÉGTELEN A KORA ÚJKORI MATEMATIKÁBAN (PROJEKTÍV GEOMETRIA ÉS INFINITEZIMÁLIS KALKULUS)

A matematika azon új ágaiban, amelyeket a 17. században dolgoztak ki vagy találtak fel, a végtelen gyakran paradoxonokhoz vezetett. Ezek a paradoxonok ellentmondtak azoknak a jegyeknek (a világosságnak, az evidenciának, az egzaktságnak stb.), amelyek a matematikai módszert kitüntetetté tették, és amelyek fokozatosan a tudományos megismerés normájává váltak. Azt kell megértenünk, hogy a végtelen matematizálására irányuló törekvések milyen viszonyban állnak azokkal a természetes intuíciókkal, amelyek az euklidészi axiómák érvényességét garantálják, és amelyek, bizonyos értelemben, a *mathesis universalis* eszméje révén normatívvá váltak. Két új matematikai eljárást hozunk fel példaként: a projektív geometriát és az infinitezimális kalkulust.

A projektív geometriát Girard Desargues és Blaise Pascal dolgozta ki az 1630-as és 1640-es években.[10] A szintetikus geometria ezen ága azt vizsgálja, miként viselkednek geometriai alakzatok centrális vetítések során, és azokat a tulajdonságokat igyekszik meghatározni, amelyek változatlanok maradnak a perspektivikus transzformációk esetében. Ez a módszer lehetővé teszi, hogy a kúpszeletek között közvetlen megfeleltetéseket hozzanak létre. A kúpszeletek problémája a görög matematikára, egészen pontosan Apollónioszra megy vissza, aki észrevette, hogy ha egy kúpot egy síkkal elvágunk, akkor attól függően, hogy a sík milyen szöget zár be a kúp tengelyével, valamint az alkotóival, a kúpszelet kör, ellipszis, parabola vagy hiperbola lesz.

A görög matematikusok nem alkalmaztak projektív módszert ezen alakzatok egymáshoz való viszonyainak vizsgálatakor. A projektív transzformációk következtében a kúpszeletek mindegyike a kúp alapkörének a képeként értelmezhető, és a perspektivikus transzformáció lehetővé teszi e különböző alakzatok közös tulajdonságainak a meghatározását. E transzformációk azonban egy fontos változtatás bevezetését feltételezik, amelynek az a lényege, hogy ne tegyünk különbséget egymással párhuzamos és egymást metsző egyenesek között. A pro-

[10] Girard Desargues : *Brouillon project d'une Atteinte aux événements des rencontres du cone avec un plan*. Paris, 1638. Pascalnak a kúpszeletekről szóló nagy értekezése elveszett. Csak két rövid írása maradt fenn a témával kapcsolatban *Essais pour les coniques* (1640, magyarul: *Esszé a kúpszeletekről*, Pascal 2013a) és *Generatio conisectionum* (*Kúpszeletek származtatása*, Pascal 2013b) címmel.



A kúpszeletek: kör, parabola, ellipszis, hiperbola

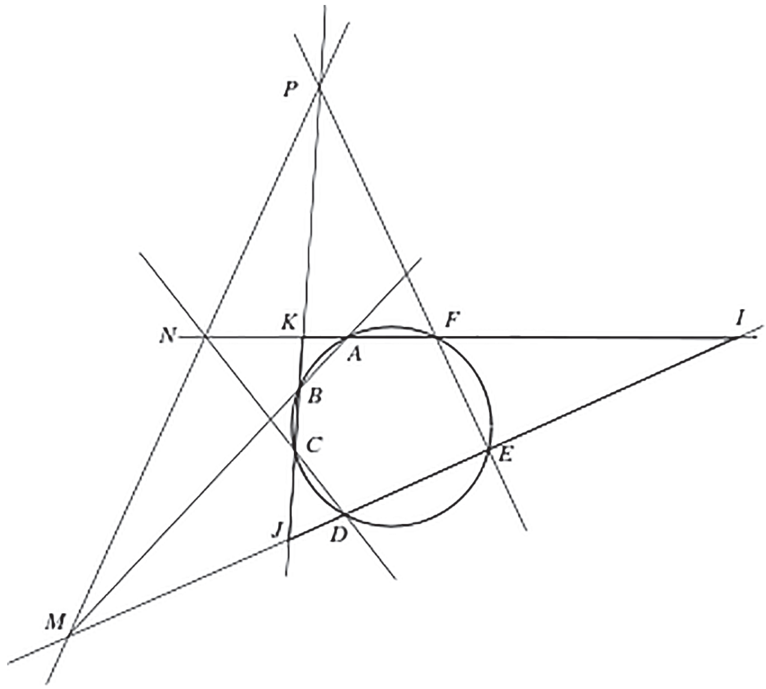
jektív geometria egyik legfontosabb jellemzője, hogy az egymással párhuzamos egyeneseket is egymást metsző egyeneseknek tekinti. Hogy ez lehetővé váljon, Desargues bevezeti a „végtelenben lévő pont" fogalmát: ez az a pont, amelyben a párhuzamos egyenesek metszik egymást.[11] A végtelen e ponton keresztül lép be a geometriába, és pontos meghatározása lehetővé teszi a végtelen módszeres kezelését.[12] A párhuzamos és metsző egyenesek különbségének kiiktatása azért lényeges, mert ez biztosítja a perspektivikus transzformációk kivitelezését, és ez teszi nyilvánvalóvá a vetített alakzatok változatlan tulajdonságait.

A végtelen távoli pont bevezetésének és a párhuzamosság átértelmezésének fontos következményei vannak. Ennek szemléltetésére idézzük fel a projektív geometria egyik legfontosabb tételét, az ún. Pascal-tételt. Ez a tétel, Desargues involúciós tételéhez hasonlóan, a kúpszeletek egy olyan tulajdonságát határozza meg, amely a projektív transzformációk során változatlan marad. Pascal tétele azt mondja ki, hogy egy kúpszeletbe rajzolt hatszög szemközti oldalegyeneseinek metszéspontja mindig egy egyenesre esik.

Másként megfogalmazva: ha egy hatszög szemközti oldalegyeneseinek metszéspontja egy egyenesre esik, akkor a hatszög beleírható egy kúpszeletbe. A hatszög e tulajdonsága változatlan marad a centrális vetítés során: igaz tehát a kör, az ellipszis, a parabola és a hiperbola esetén is. Vegyünk egy speciális ese-

[11] Az azonos rendbéli egyenesek *(ordonnance de droites)* meghatározása a legelső definíció a *Brouillon projet*-ban. Az ugyanazon a síkon fekvő egyenesek azonos rendbéliek, amikor „mindegyik egyfelé tart". Desargues definíciója szerint a párhuzamos egyenesek éppúgy azonos rendbéliek, mint az egymást metszők: „Két azonos síkon fekvő egyenes azonos rendbéli, függetlenül attól, hogy a [közös] céljuk véges vagy végtelen távolságban van" (Desargues 1950. 100). Pascal ugyanezt a definíciót világosabban fogalmazza meg: „Egy egyenest akkor mondunk egy pont felé tartónak, ha szükséges mértékben meghosszabbítva eléri ezt a pontot. Egy egyenest akkor mondunk egy másik egyenesen végtelen távolságban lévő pont felé tartónak, ha párhuzamos ezzel a másik egyenessel" (*Kúpszeletek származtatása,* Pascal 2013b. 20).

[12] J. V. Field megállapítja, hogy „Desargues az első matematikus, aki a végtelen fogalmát megfelelő kontroll alá helyezte" (Field 1997. 196). E vélemény jól mutatja Desargues eljárásának jelentőségét a végtelen matematizálásának a folyamatában.



A Pascal-tétel: az ABCDEF hatszög esetén az AF és CD metszéspontja: N, BA és DE metszéspontja: M, BC és EF metszéspontja: P. MNP egy egyenesre esnek

tet: egy szabályos hatszöget, amelyet egy körbe írunk. Mivel minden kör kúpszelet, ezért a bele írt szabályos hatszög kúpszeletbe írt hatszög. E hatszögnek a szemközti oldalegyenesei nyilvánvalóan párhuzamosak. A párhuzamosokra vonatkozó definícióval összhangban ezeket az egyeneseket olyanoknak kell tekintenünk, mint amelyek egymást metszik a végtelenben. A Pascal-tétel szerint ezen egyenesek metszéspontjai egy egyenesre esnek. Mivel a metszéspontok a végtelenben vannak, az őket összekötő egyenes is a végtelenben van. Ezt az egyenest azonban, amelyet ma ideális egyenesnek vagy Pascal-egyenesnek neveznek, lehetetlen elképzelni. A Pascal-tétel feltételezi tehát, hogy a párhuzamos egyeneseket egymást metsző egyenesekként definiáljuk, ez azonban olyan következményhez vezet, amely ellentmond a természetes intuíciónak, vagy legalábbis messze meghaladja annak hatókörét.[13] Jóllehet a végtelen bevezetése a

[13] Hangsúlyozni kell, hogy ebben az esetben valójában két természetes intuíció szembenállásáról van szó. A tisztán értelmi intuíció, amely összhangban áll a párhuzamosok euklidészi meghatározásával, egyértelművé teszi, hogy a párhuzamosok soha nem találkoznak. Ezzel szemben az érzéki intuíció számára a távolodó párhuzamosok azt a benyomást keltik, mintha egymás felé tartanának, és valahol metszenék egymást. Ez utóbbi egy érzéki illúzió, amely azonban a centrális perspektíva alapját képezi: a távolodó párhuzamosok az enyészpontban metszik egymást. A projektív geometria ezt az intuíciót integrálja a geometriába.

projektív geometriába elkerülhetetlen, olyan belátásokhoz vezet, amelyek meghaladják a geometria szokványos kereteit.

A projektív geometriában a végtelen a kontinuum jellemzőjeként is megjelenik. Mivel minden kúpszelet az alapkör képe, ezért a centrális vetítés képes az ún. korlátos (véges) alakzatokat, mint amilyen az alapkör vagy az ellipszis, nem korlátos (végtelen) alakzatokká, mint amilyen a parabola, vagy a hiperbola, formálni és viszont, mégpedig szigorúan módszeres eljárások segítségével. Magától értetődik, hogy azok a tulajdonságok, amelyeket a projektív geometria alapvető tételei, vagyis Desargues involúciós tétele és a Pascal-tétel, meghatároznak, változatlanok maradnak a vetítések során, attól függetlenül, hogy az eredmény véges (korlátos) vagy végtelen (nem korlátos) alakzat lesz. Pascal a parabolát a következőképpen definiálja: „ha a vászon síkja egy vertikálissal, azaz egy sugárral párhuzamos, tehát parabolát határoz meg, nyilvánvaló, hogy az alapkör kerületének minden pontja rávetíti képét véges távolságban a kúpszelet vásznának síkjára, kivéve egy pontot, amelynek nem lesz képe, hacsak végtelen távolságban nem” (*Kúpszeletek származtatása*, Pascal 2013b. 21). Az alapkör, amely folytonos mennyiség, végtelen pontból áll, amelyek a kúpszelet síkjára vetítik képüket, egy pontot kivéve, amelynek képe nem található a síkon. Ez a végtelen távoli pont, amely a metsző sík és az adott pontnak megfelelő alkotó metszéspontja, amelyek egymással párhuzamosak. E meghatározást követően Pascal e megjegyzést teszi: „Ebből következik, hogy a parabola a végtelenbe tart és végtelen teret határoz meg *(infinitum spatium suscipiat)*, noha az alapkör kerületének a képe, amely véges, és amely véges teret fog körbe” (uo.). E megjegyzésnek nincsen közvetlen szerepe az argumentációban. Inkább csak Pascal meglepődését fejezi ki afölött, hogy a centrális vetítés átjárást hoz létre a véges és a végtelen között oly módon, hogy véges alakzatokat végtelen alakzatokba alakítja át, miközben egyértelmű megfeleltetést létesít közöttük.[14]

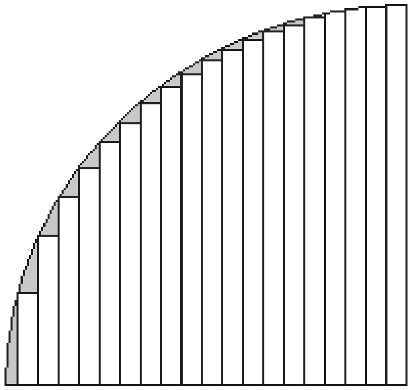
A projektív geometriában két dolgot tapasztalunk tehát: egyrészt azt, hogy a végtelen bevezetése elkerülhetetlen annak érdekében, hogy szigorúan meghatározhatóvá váljanak azok a tulajdonságok, amelyek a centrális vetítések során változatlanok maradnak, másrészt azt, hogy a végtelen bevezetése, módszeres kezelése ellenére, olyan eredményekhez vezet, amelyek a természetes intuíció számára elérhetetlenek. Ezek az eredmények vagy azért mondanak ellent a természetes intuíciónak, mert elképzelhetetlenek, vagy azért, mert paradoxonokat zárnak magukba. A végtelen megjelenése a geometria reflexió-terében

[14] A mai matematikai nyelvben „véges” és „végtelen” alakzatok helyett korlátos és nem korlátos alakzatokról beszélünk (a kör vagy az ellipszis korlátos, a parabola vagy a hiperbola nem korlátos alakzat). Ez a szóhasználat kiküszöböli azt a problémát, amelynek a projektív megoldása Pascalt csodálkozásra késztette, hiszen a korlátosság nem zárja ki azt, hogy az alakzatot végtelen számú pont halmazaként értelmezzük. Ez azonban a 17. században még nem volt annyira magától értetődő, mint ma. Ezt mutatja Pascal fogalomhasználata is (véges/végtelen).

megingatja egyes euklidészi axiómák érvényességét. Köztudott, hogy a párhuzamosság, amelynek Desargues és Pascal új meghatározását adja, már az euklidészi axiómarendszerben is problémákat okozott. A projektív geometriában alkalmazott párhuzamosság-definíciók nyilvánvalóan ellentmondanak az *Elemek* I. könyvének párhuzamos egyenesekre vonatkozó meghatározásának, amely így szól: „Párhuzamosak azok az egyenesek, amelyek ugyanabban a síkban vannak, és amelyek végtelenül meghosszabbítva egyiken sem találkoznak" (23. definíció, Eukleidész 1983. 46). A projektív geometriai definíciók, mint láttuk, ezzel szemben úgy határozzák meg a párhuzamos egyeneseket, mint amelyek a végtelenben metszik egymást. E definíció módosítása azonban még nem jelenti közvetlenül egy axióma módosítását. A parallelizmus axiomatikus státusza azért okozott problémát Euklidész *Elemei*ben, mert nem volt egyértelmű, vajon a híres ötödik posztulátum, amely szintén a párhuzamos egyenesek meghatározását tartalmazza, vajon axióma-e vagy pedig egy bizonyítást igénylő tétel.[15] Desargues és Pascal nem beszélnek új axiómáról ezzel kapcsolatban, hanem megkerülik a problémát egy olyan definíció segítségével, amely szerint a párhuzamosok a végtelenben találkoznak. Ezzel azonban egy olyan új térszemléletet határoznak meg, amely különbözik az euklidészi térfelfogástól.

Az infinitezimális kalkulus esetében hasonló problémákkal találkozunk, mégpedig a kontinuum matematizálásával összefüggésben. Az infinitezimális kalkulus kialakulása hosszú folyamat volt, amelyet Arkhimédész műveinek 16. századi újrakiadása motivált, majd Cavalieri munkássága indított el. Az integrál és a differenciálszámítás különböző lépésekben fejlődött, majd Leibniz és Newton körülbelül egy időben, a 17. század második felében egyesítették ezeket (Lásd Cléro – Le Rest 1980; Broyer 1949). Az integrálszámítás során ahhoz, hogy kiszámíthatóvá tegyék a görbe oldalú alakzatok felszínét vagy területét, „oszthatatlanjaikból" vagy „differenciálisaikból" kellett létrehozni őket. Azonban egy folytonos nagyság létrehozása végtelenül kicsi mennyiségekből nem magától értetődő művelet. Ez az eljárás ugyanis nem áll maradéktalanul összhangban Eukleidész első axiómájával, amely különböző mennyiségek egyenlőségét határozza meg kijelentvén, hogy „amik ugyanazzal egyenlők, egymással is egyenlők" (I. könyv, 1. axióma, Euklidész 1983, 47). Amikor például egy negyedkör területét akarjuk kiszámolni úgy, hogy végtelenül kicsi alapú téglalapokra bontjuk fel, akkor ezen téglalapok területének összege és a negyedkör területe soha nem lesz tökéletesen egyenlő egymással. A kettő különbsége egy olyan mennyiség, amely a nullához konvergál, és amelyet Leibniz „elhaló mennyiségnek" *(quantité évanouissante)* nevezett.

[15] Ismeretes, hogy a nem-euklideszi geometriák felfedezői, Bólyai és Lobacsevszkij e posztulátum tagadásából indultak ki és jutottak el egy új axiómarendszer kidolgozásához.



A sötéttel jelölt részek területe soha nem lesz nulla, bármilyen kicsire vegyük is a negyedkör területét lefedő téglalapok alapját

Ez a mennyiség a differenciális amely kisebb, mint bármely véges mennyiség, és amely a számolás végén, jelentéktelensége folytán elhanyagolhatóvá válik. A két mennyiség soha nem lesz tökéletesen egyenlő, jóllehet a számítás eredménye helyes lesz. E probléma kiküszöbölésére Leibniz követője, Guillaume de L'Hospital az *Analyse des infiniment petits* (1696) című művében a következő posztulátumot vezeti be: „Engedtessék meg, hogy két mennyiség, amely egymástól csak végtelenül kis mennyiséggel különbözik, tetszés szerint felcserélhető legyen, avagy (ami ugyanaz) hogy egy mennyiséget, amelyet csak egy másik végtelenül kicsi mennyiséggel csökkentünk vagy növelünk, úgy tekintsünk, mint ami ugyanaz marad" (L'Hospital 1969. 2–3). Itt, Leibniz gondolkodásával összhangban, az egyenlőség újradefiniálásának vagyunk a tanúi, mégpedig oly módon, hogy az „elhaló" különbség ne sértse meg az egyenlőség-elvet, jóllehet a természetes evidencia ennek ellenkezőjét sugallja. Valami hasonlót látunk itt is, mint a projektív geometriában. A végtelennel végzett műveltek ellentmondanak a természetes intuíción alapuló axiómáknak, és ez az ellentmondás nem áll összhangban a matematikára jellemző szigorral. A végtelen megbontja a matematikai racionalitás zártságát, miközben nyilvánvaló, hogy bizonyos műveleteknél nem lehet eltekinteni a végtelen matematizálásától.

Ha tehát a matematika és a megismerés viszonyát elemezzük a kora újkorban, akkor két dolgot figyelhetünk meg. Egyrészt az igazság feltárása során tanúsított szigora és evidens jellege folytán a matematika az egyetemes tudomány modelljévé válik, és a matematikára jellemző szemléletmód, amellyel az egyszerű összefüggéseket belátja, a tudományos megismerés kognitív alapját képezi. Másrészt olyan új eljárások jelennek meg a matematikában, amelyeknek az értelmezése nem problémamentes az euklideszi geometria biztosította kereteken belül. A végtelennel kapcsolatos transzformációs és kalkulatív módszerek nem felelnek meg maradéktalanul az evidencia és az ellentmondás-mentesség igényeinek, hiszen visszavezethetetlenek egy olyan elemi észlelésre, amely a lépések vagy eredmények evidens jellegét biztosítaná. A 17. század második felében a matematika nem áll összhangban minden esetben ama episztemológiai norma előírásaival, amely a matematikából eredt. Ezt a diszharmóniát sokan felismerték a korban, és hangot is adtak az új módszerekkel kapcsolatos ellenérzéseiknek.

III. *MATHESIS UNIVERSALIS* VS. MATEMATIKAI ELJÁRÁSOK

A végtelen matematikai alkalmazásával kapcsolatos viták éppen azért érdekesek, mert rávilágítanak arra a feszültségre, amely a *mathesis universalis* normatív jellege és az alkalmazott matematikai eljárások között jött létre. A kritikák főként az infinitezimális kalkulussal szemben fogalmazódtak meg, mivel a projektív geometria nem annyira a matematikában, mint inkább az ismeretelméletben gyakorolt komolyabb hatást. A projektív geometria a korban egyre elterjedtebb perspektivikus szemléletmód matematikai hátterét rögzítette, és a Desargues által kialakított perspektivikus térszemlélet fontos alkalmazásai jelentek meg Pascal és Leibniz filozófiájában.[16] A végtelen integrálása náluk azért nem okozott közvetlenül problémát, mert e szerzők egész gondolkodásmódjában a végtelen konstitutív szerepet játszott.

Az infinitezimális kalkulus viszont mindvégig az érdeklődés középpontjában állt. Nem sokkal az után, hogy Leibniz és Newton kidolgozták, bírálóik szemükre vetették a matematikai szigor hiányát, és ellenvetéseikben éppen a matematikai módszer normatív jellegére hivatkoztak. Az új leibnizi kalkulust Franciaországban Jacques és Jean Bernoulli, Guillaume de L'Hospital és Pierre Varignon kezdték népszerűsíteni az 1690-es években,[17] ám nagyon hamar komoly védekezésre kényszerültek. Egy neves korabeli matematikus, Michel Rolle ugyanis a Királyi Tudományos Akadémián súlyos kritikákat fogalmazott meg Leibniz módszerével szemben. Rolle azt kifogásolta, hogy a kalkulus fogalmi szempontból nem jól megalapozott, nélkülözi a szigort és hibás eredményekhez

[16] Lásd erről Judith V. Field elemzéseit (Field 1997) és Michel Serres *Le système de Leibniz et ses modèles mathématiques* (Serres 1968) című könyvét, amelyben önálló fejezet foglalkozik Pascal gondolkodásának matematikai hátterével (Serres 1968, 647–713). Lásd még Schmal Dániel és Pavlovits Tamás: „A perspektíva filozófiai értelmezései a 17. században" (Schmal–Pavlovits 2015. 11–39). Ám ha szigorúan a matematika történetét nézzük, akkor ott a projektív geometria más hatást mutat. Desargues művei, főleg nehézkes nyelvezetük miatt, nem váltak népszerűvé, Pascal kúpszeletekről írt művei pedig nem is jelentek meg nyomtatásban. Leibniz még végigtanulmányozta őket, ám hiába sürgette kiadásukat, a kéziratok a 17. század második felében elvesztek. A projektív geometriát a 18. század végéig nem művelték, egységes rendszerét csak Jean-Victor Poncelet alkotta meg a 19. században. A projektív geometria fejlődéséről lásd Sain 1986. 541–559.

[17] A leibnizi differenciálissal kapcsolatos ismeretelméleti és metafizikai problémákkal kapcsolatosan lásd Schmal 2013.

vezet.[18] Az alapelvek és az alapvető fogalmak kapcsán rámutatott az egyenlőség-elv megsértésére, valamint kifogásolta az „elhaló mennyiségek" fogalmi homályosságát. Ezeket szerinte a kalkulus alkalmazói hol végtelenül kicsinek, hol nullának tekintik. Hasonló kritikával találkozunk harminc évvel később Angliában George Berkeley részéről, aki *The Analyst* (1734) című művében elsősorban Newton módszerét ostorozza, de Leibniz is támadásai kereszttüzébe kerül. Rolle-hoz hasonlóan az egyenlőség-elv megsértését és az infinitezimálisok fogalmi tisztázatlanságát kifogásolja: „Bevallom, meghaladja képességeimet a végtelenül kis mennyiség felfogása, amely végtelenül kisebb bármely érzékelhető vagy elképzelhető mennyiségnél, vagy maga az utolsó nagyság. Gyanítom, hogy bárki számára végtelen nehézséget jelent felfogni egy ilyen végtelenül kis mennyiség egy részét, amelynek még ennél is végtelenül kisebbnek kell lennie" (*The Analyst*, V.§).

Rolle és Berkeley a *mathesis universalis* megismerési elveit kérik számon az infinitezimális kalkulus kidolgozóin, amelyek a matematikából erednek, és amelyek szerintük, kitüntetetté teszik a matematika tudományát a többi tudomány között. Rolle a *Démonstration d'une méthode pour résoudre les égalités de tous les degrés* (1691) című művében így fogalmaz:

> Ahhoz, hogy megismerjünk egy tárgyat oly evidenciával, amelyre csak képesek vagyunk, szükséges, hogy arányban álljon elménk hatóerejével. Minél kevésbé arányos vele, a megszerzett ismeret annál tökéletlenebb; van pedig egy határ, amelyen túl vagy a kétely, vagy a tévedés áldozataivá válunk. A matematikai módszerek abban állnak, hogy szabályozzák az elme műveleteit, és a kijelentéseket oly egyszerűvé teszik, hogy az a kevés nehézség, amelyeket magukba zárnak, megoldható legyen egyedül a természetes világosság révén [*puissent être résolues par les seules lumières naturelles*] […]. Van mindazonáltal számos olyan matematikus, akik nem veszik figyelembe ezt a viszonyt; és ma is vannak olyanok, akiknél ennek gyakori elhanyagolása azt a benyomást kelti, mintha a végtelen ideájával kapcsolatos tévedés szokássá vált volna bennük. (Rolle 1691. i–ii.)

Berkeley ellenvetése nagymértékben hasonlít Rolle-ééra:

> Régi bölcsesség, hogy a geometria kiváló logika. És el kell ismerni, hogy amikor a definíciók világosak, a posztulátumok visszautasíthatatlanok, és az axiómákat sem lehetséges tagadni, amikor az alakzatok megkülönböztetett szemléléséből és egymással való összehasonlításából tulajdonságaikat a következmények jól illeszkedő és folytonos láncolata által vezetjük le, és amikor a tárgyakat szemmel tartjuk és a figyel-

[18] Blay 1986 részletesen elemzi ezt a vitát. Lásd még ezzel kapcsolatban Blay 1993. 145–175, valamint Broyer könyvének „The Period of Indecision" című fejezetét (Broyer 1949. 224–266).

> met mindvégig rájuk irányítjuk, akkor egy olyan gondolkodási szokásra teszünk szert, amely zárt, pontos és módszeres: ez a szokás megerősíti és élesíti az elmét, és miután ezt más tárgyakra is átvisszük, általánosságban használhatjuk az igazság kutatásában. De hogy mily messzire esik ettől a mi geometriai analízisünk esete [*the case of our Geometrical Analyst*], érdemes közelebbről is szemügyre venni. (*The Analyst,* 2. §.)

E két gondolkodó a descartes-i *mathesis universalis*szal összhangban a matematikában nem csak egy egzakt tudományt lát, hanem egy olyan módszer hordozóját is, amely rögzíti a helyes gondolkodás alapelveit. Mindketten kiemelik az egyszerűség és átláthatóság fontosságát a matematikai tárgyak és viszonyaik között, ami egy tiszta észlelési aktus számára nyit utat, és ami az evidens megismerést biztosítja. Ez az evidencia kizárja a kétely és tévedés lehetőségét a megismerés köréből, és megalapozza a matematikai ismeretek igazságtartalmát. Ennek köszönhetően a matematika alkalmas arra, hogy „szabályozza az elme műveleteit", és hogy „megerősítse és élesítse az elmét". Az infinitezimális kalkulusban alkalmazott fogalmak és eljárások viszont ennek a kritériumnak nem felelnek meg. Az elhaló mennyiség, vagy végtelenül sok, végtelenül kis rész összege nem ragadhatóak meg egy egyszerű szemléleti evidencia révén. Az elme elemi észlelési aktusai nem biztosítják tehát a kalkulus evidenciáját. Úgy tűnik, a végtelen matematikai alkalmazása lehetetlen anélkül, hogy a matematikára jellemző módszertani szigort és szemléleti evidenciát fel ne függesztenénk. A módszertan és a matematikai logika szintjén az okozza a problémát, hogy a végességen alapuló természetes intuíció ellentétbe kerül a végtelen módszertani alkalmazásával, amennyiben a végtelen kívül marad a természetes evidencia hatókörén.[19]

A végtelen matematizálása a kontinuum esetén szükségessé tette a matematikára jellemző fogalmi szigor felfüggesztését. Ez a veszteséget pótolja azonban a számítás hatékonysága. Matematikatörténészek megjegyzik, hogy az infinitezimális kalkulus kidolgozását éppen az tette lehetővé, hogy feltalálói lemondtak a matematikára jellemző szigorról: „az út akkor nyílik meg a modern analízis előtt, amikor Newton és Leibniz, hátat fordítva a múltnak, megelégszenek azzal, hogy az új módszerek igazolását ne a szigorú bizonyításokban, hanem az eredmények koherenciájában és gyümölcsöző voltában keressék" (Bourbaki 1960. 188). A végtelennel kapcsolatos matematikai eljárások elfogadásának nehézségei arra

[19] Vannak más példák is a végtelennel végzett matematikai műveletek korabeli kritikájára. Lásd ennek kapcsán Pierre Bayle megjegyzését a *Dictionnaire historique et critique* (1697) „szidóni Zénón" *(Zénon de Sidon)* szócikkében: „[Gassendi] felhoz egy példát az ő [ti. a matematikusok] állítólagos bizonyításaik hívságos voltára: két kifinomult matematikus bebizonyította, hogy egy véges és egy végtelen mennyiség egyenlő egymással. […] Mások bebizonyítják, hogy vannak olyan végtelen mennyiségek, amelyek minden oldalról határoltak. Ha ők evidensnek is találnak effajta bizonyításokat, nem kellene-e mégis gyanút fogniuk, hiszen mindent egybevetve nem haladja meg az evidenciát, amivel a józan ész világossá teszi a számunkra, hogy a véges soha nem lehet egyenlő a végtelennel, és hogy a végtelen mint végtelen soha nem lehet határolt?" (rem. „D", p. 917).

az ellentmondásra vezethetőek vissza, amely a természetes intuíció és az új matematikai eljárások hipotézisei vagy eredményei között feszül. Ezek a módszerek ily módon meghaladni látszanak azokat az elméleti kereteket, amelyeket az euklidészi axiómarendszer jelölt ki a matematika területén. A kora újkori matematikusok még nem vették észre, hogy az általuk kidolgozott módszerek olykor új axiómák bevezetését igénylik. Jean-Louis Gardies hangsúlyozza, hogy a projektív geometria felfedezői, Desargues és Pascal, „nem tudták megítélni, hogy egy ilyen geometria milyen axiómákat feltételez, így tehát az általános geometria axiómarendszere a kora újkorban csak alig-alig fejlődött Eukleidészhez képest" (Gardies 1984. 60). Ugyanakkor meghaladni az euklidészi axiómákat a 17. században egyet jelentett a logikai keretek meghaladásával. Jean-Toussaint Desanti rámutat, milyen komoly feszültség alakult ki a korban az infinitezimális kalkulus fogalmai és a bevett logika között: „Innen ered a logikai alapelvek újragondolásának követelménye: különösképpen fontossá vált a kizárt harmadik elve érvényességi körének meghatározása, amennyiben racionális státusszal akarták felruházni az »elhaló« mennyiség fogalmát" (Desanti 1990. 287). A végtelennel való számolás azonban nem csak a matematika területén volt érdekes. A fizikai mozgások, a nyugalom és a mozgás viszonya, a gyorsulás számítása szintén szükségessé tettek infinitezimális módszerek alkalmazását. Úgy tűnt tehát, hogy hiába nem feleltek meg a matematikai módszerek a *mathesis universalis*ban rögzített normáknak, maga a természet sem támogatta a véges szemléletmód uralmát.

Ez a probléma nem maradt meg tehát a matematika keretei között, sőt valójában nem a matematikában, hanem a természetfilozófiában és a filozófia más ágaiban éreztette inkább a hatását. A matematikát ugyanis jobban érdekelte saját fejlődése, mint a belőle levont ismeretelméleti elvek problematikussága. Azokban a 17. századi filozófiákban azonban, amelyek szoros kapcsolatban álltak a matematikával, a matematikai módszer és a modern matematikai eljárások közötti összhang hiánya komolyabb következményekkel járt. A végtelenhez való kognitív viszony különböző módozatait figyelhetjük meg annak alapján, hogy egy-egy szerző melyik alternatívát részesítette előnyben: az evidens megmerés kritériumát, vagy a végtelennel kapcsolatos matematikai eljárások hatékonyságát.[20] A karteziánus gondolkodók, mint Descartes, Malebranche, Arnauld, Spinoza az előzőhöz, Pascal és Leibniz, akiknek komoly érdemeik voltak az infinitezimális kalkulus kidolgozásában, a másodikhoz ragaszkodtak inkább.[21]

***

[20] Lásd erről korábbi tanulmányainkat, amelyek a végtelen 17. századi észlelésével foglalkoznak ismeretelméleti kontextusban: Pavlovits 2013, 2015a, 2015b, 2015c.

[21] Ennek kapcsán csak két, mára már klasszikussá vált elemzésre utalunk, amelyek megmutatják, hogy a szerzők ismeretelméleti nézeteinek különbsége milyen jelentős mértékben függ a matematikájuktól: Brunschvicg 1912 és Belaval 1960.

A fenti elemzésekben arra a feszültségre szerettünk volna rámutatni, amely a kora újkori matematika fejlődését jellemezte. E feszültség oka egyrészt az volt, hogy a matematikai módszer ismeretelméleti funkciókra tett szert és episztemológiai értelemben normatívvá vált. Másrészt az, hogy a matematikában megjelentek olyan módszerek, amelyek a végtelent különböző kalkulatív vagy transzformatív eljárásokba integrálták. Mivel a matematikai módszer az elme elemi percepciója kapcsán szorosan kötődött az evidenciához, és mivel a végtelennel végzett műveletek ellenálltak az evidens észlelésnek, a matematika válaszút elé került: vagy ragaszkodik a racionális szigorhoz és evidenciához, vagy a végtelennel végzett műveleteket részesíti előnyben. Nem vitás, hogy a második választás volt az előremutató, és ez járult hozzá a matematika fejlődéséhez. Ez a fejlődés ugyanakkor nemcsak a projektív geometria, valamint a kontinuum matematikai megalapozását eredményezte két évszázaddal később, hanem elvezetett a nem-euklideszi geometriák kidolgozásához is. Ez utóbbi pedig nyilvánvalóvá tette, hogy nem érdemes az euklideszi axiómák megismerését biztosító kognitív aktusokat a tudományos megismerés normatív feltételévé tenni. Úgy tűnik tehát, hogy a matematika már a kora újkorban rácáfolt arra az igényre, amely belőle származott. Mindazonáltal a matematikából kivont ismeretelméleti elvek elengedhetetlenek voltak ahhoz, hogy megszülessen a tudomány egzakt fogalma abban a formában, ahogyan azt ma is értjük.

IRODALOM

Arnauld, Antoine – Nicole, Pierre 2014. *La logique ou l'art de penser*. Szerk. Dominique Descotes. Paris, Honoré Champion.

Belaval, Yvon 1960. *Leibniz critique de Descartes*. Paris, Gallimard.

Blay, Michel 1986. Deux moments de la critique du calcul infinitésimal: Michel Rolle et George Berkeley. *Revue d'histoire des sciences*. 39/3. 223–253.

Blay, Michel 1993. *Les raisons de l'infini. Du monde clos à l'univers mathématique*. Paris, Gallimard.

Boros Gábor 1998. *René Descartes*. Budapest, Áron Kiadó.

Bourbaki, Nicolas 1960. *Éléments d'histoire des mathématiques*. Paris, Hermann.

Broyer, Carl B. 1949. *The History of Calculus and Its Conceptual Development*. New York, Dover Publications.

Brunschvicg, Léon 1912. *Les étapes de la philosophie mathématique*. Paris, Félix Alcan.

Clero, Jean-Pierre – Le Rest, Elisabeth 1980. *La naissance du calcul infinitesimal au XVII*[e] *siècle*. Paris, CNRS.

Desanti, Jean-Toussaint 1990. Infini mathématique. *Encyclopaedia Universalis*. Szerk. P. F. Baumberger – S. A. France. *Corpus*. 12. 283–289.

Desargues, Girard 1951. *Brouillon project d'une atteinte aux evenemens des rencontres du Cone avec un plan*. In *L'œuvre mathématique*. Szerk. René Taton. Paris, PUF.

Descartes, René 1980. *Szabályok az értelem vezetésére*. Ford. Szemere Samu. In *Válogatott filozófiai művek*. Budapest, Akadémiai. 97–167.

Descartes, René 1994. *Elmélkedések az első filozófiáról*. Ford. Boros Gábor. Budapest, Atlantisz.

Descartes, René 1996. *Œuvres*. Szerk. Charles Adam – Paul Tannery. 11 kötet. Paris, Vrin [= AT].

Eukleidész 1983. *Elemek*. Ford. Mayer Gyula. Budapest, Gondolat.

Fehér Márta 1995. The 17th Century Crossroads of the Matematization of Nature. *Changing Tools. Case Studies in the History of Scientific Methodology*. Budapest, Akadémiai. 1–26.

Field, Judith V. 1997. *The Invention of Infinity. Mathematics and Art in the Renaissance*. Oxford, Oxford University Press.

Gardies, Jean-Louis 1984. *Pascal entre Eudoxe et Cantor*. Paris, Vrin.

Gontier, Thierry 2006. Mathématiques et science universelle chez Bacon et Descartes. *Revue d'histoire des sciences*. 59/2. 285–312.

Leibniz, G. W. 1966. *Opuscules et fragments inédits*. Szerk. Louis Couturat. Hildesheim, Olms.

L'Hospital, Guillaume de 1696. *L'analyse des infiniments petits pour l'intelligence des lignes courbes*. Paris, Imprimerie Royal.

Malebranche, Nicolas 1979. *Oeuvres*. 2 kötet. Szerk. Geneviève Rodis-Lewis. Bibliothèque de la Pléiade. Paris, Gallimard.

Medina, José 1985. Les mathématiques chez Hobbes et Spinoza. *Revue philosophique*. 1985/2. 177–188.

Pascal, Blaise 1991. *Oeuvres complètes*. Szerk. Jean Mesnard. 4. kötet. Paris, Desclée de Brouwer [= OC].

Pascal, Blaise 1999. *A geometriai gondolkodásról*. Ford. Pavlovits Tamás. In *Írások a szerelem szenvedélyéről, a geometriai gondolkodásról és a kegyelemről*. Budapest, Osiris. 35–78.

Pascal, Blaise 2013a. *Esszé a kúpszeletekről*. Ford. Pavlovits Tamás. *Különbség*. 13/1. 13–19.

Pascal, Blaise 2013b. *Kúpszeletek származtatása*. Ford. Pavlovits Tamás. *Különbség*. 13/1. 19–23.

Pavlovits Tamás 2013. Evidencia és végtelen Descartes-nál. *Magyar Filozófiai Szemle*. 57/3. 9–29.

Pavlovits Tamás 2015a. A végtelen észlelésének problémája az *Újabb értekezések*ben és a *Monadológiá*ban. *Magyar Filozófiai Szemle*. 59/1. 20–37.

Pavlovits Tamás 2015b. Perspektíva és végtelen Pascal és Leibniz gondolkodásában. In Schmal Dániel – Pavlovits Tamás (szerk.) *Perspektíva és érzékelés a kora újkorban*. Budapest, Gondolat. 138–153.

Pavlovits Tamás 2015c. La priorité de l'infini dans l'ordre de la perception chez Descartes. *Magyar Filozófiai Szemle*. 60/2. 66–75.

Rabouin, David 2009. *Mathesis Universalis. L'idée de mathématique universelle d'Aristote à Descartes*. Paris, PUF, coll. „Épithémée".

Rolle, Michel 1691. *Démonstration d'une méthode, pour résoudre les égalitez de tous les degrez*. Paris, J. Cusson.

Sain Márton 1989. *Nincs királyi út!* Budapest, Gondolat.

Schmal Dániel 2013. A leibnizi végtelen és a fikcionalizmus problémája. *Különbség*. 13/1. 83–102.

Schmal Dániel – Pavlovits Tamás 2015. A perspektíva filozófiai értelmezései a 17. században. In uők (szerk.) *Perspektíva és érzékelés a kora újkorban*. Budapest, Gondolat. 11–39.

Serres, Michel 1968. *Le système de Leibniz et ses modèles mathématiques*. Paris, PUF.

Spinoza, Benedictus 1981. *Descartes: A filozófia alapelvei geometriai módon bizonyítva*. Ford. Szemere Samu. Budapest, Akadémiai. 137–219.

Viète, François 1630. *Algèbre nouvelle*. Ford. A. Vasset. Paris, Pierre Rocolet.