A speciális relativitáselméletről

About the special theory of relativity

Gábos Zoltán

Babeş-Bolyai Tudományegyetem, Fizika Kar, Kogălniceanu u. 1 sz., Kolozsvár

Abstract

By the beginning of the 20th century the physics have accumulated enough knowledge to incorporate this new theory. The theory is based on the works of H. A. Lorentz and H. Poincaré, but the final steps have been made in 1905 by A. Einstein. In this work we present some of the results obtained between 1905 and 1907 by Einstein. In the introduction we recall those facts, which made necessary the appearance of this theory. Further, we present its main results, and at the end we discuss the consequences, applications and experimental evidences of this new theory.

Összefoglaló

A XX. század elején a fizika készen állt az új elmélet befogadására. Útját H. A. Lorentz és H. Poincaré egyengették, de a döntő lépést A. Einstein tette meg 1905-ben. A dolgozatban Einstein 1905-1907. között közölt eredményeiből válogatunk. A bevezetőben azokat a tényeket ismertetjük, amelyek szükségessé tették az új elmélet megjelenését. Ezt követően az elmélet legfontosabb eredményeit ismertetjük. Végül az elmélet következményeivel, alkalmazásaival és a kísérleti bizonyítékokkal foglalkozunk.

A speciális relativitáselmélet megjelenése egy hosszú fejlődési folyamat eredménye. Gyökerei a 17. századba nyúlnak vissza. A tudomány terebélyesedése során elméletek váltják egymást. A régieket újak váltják fel. A váltás nem akadálymentes. A csírában jelentkező új elmélet a régi keretben tör utat magának. Eközben el kell távolítania a régi elméletnek továbblépést gátló merevítőelemeit. Ha ez megtörténik az új elmélet polgárjogot nyer a tudomány világában.

A fizika a 20. század elején készen állt a speciális relativitáselmélet befogadására. Útját H. A. Lorentz és H. Poincaré egyengették, a döntő lépést 1905-ben Einstein tette meg. Neki volt bátorsága ahhoz, hogy eltávolítsa a klasszikus elmélet három merevítőelemét: az abszolút tér és az abszolút idő fogalmakat, valamint az elektromágneses jelenségek hordozójának tekintett hipotetikus anyagot, az „étert”. A következőkben elsőként az elmélet kialakulásával foglalkozunk. Ezt követően Einstein 1905-07. között közölt eredményeiből válogatunk. Végül az elmélet helyességét igazoló kísérleti tényeket ismertetjük.

1. Az elmélet gyökerei

A 17. században jelentős eredmények születtek a mechanika és az optika terén. A gyökereket keresve ezekből kell kiindulnunk.

Elsőként vegyük számba az ún. klasszikus mechanika egyes eredményeit.

Az 1637-ben bevezetett Descartes-féle derékszögű koordinátarendszer lehetőséget nyújtott az euklideszi geometria eredményeinek hasznosítására. A koordinátarendszer a vonatkoztatási rendszer szerepét tölti be. Azok a vonatkoztatási rendszerek, amelyekben a külső hatásoktól mentes „szabad” anyagi pont megtartja mozgásállapotát (sebességét) a tehetetlenségi rendszer nevet kapták.

A klasszikus newtoni mechanikában feltételezték, hogy az idő „abszolút”, tehát bármely vonatkoztatási rendszerben a megfigyelő azonos időskálát használhat. I. Newton a teret anyagtól független, végtelen kiterjedésű tartálynak tekintette, amelyik mindenkor változatlan marad. Az „abszolút” térhez kötött K_0 rendszert a tehetetlenségi rendszerek körébe sorolta.

Tekintsük a kezdeti időpillanatban egybeeső K és K' derékszögű vonatkoztatási rendszereket. Amennyiben K' $\vec{v}$ sebességgel távolodik K-tól, a newtoni felfogás alapján az időre

$$t' = t, \tag{1}$$

a helyzetvektorokra

$$\vec{x}' = \vec{x} - \vec{v}t, \; \vec{x} = \vec{x}' + \vec{v}t \tag{2}$$

írható. Ezek a képletek, a Galilei-féle transzformációs képletek nevet kapták.

A (2) alatti képletek alapján állították, hogy végtelen sok tehetetlenségi rendszer van, hiszen a K_0-hoz képest egyenletes sebességgel távolodó rendszereket is megilleti a tehetetlenségi jelző.

Választ kerestek arra a kérdésre, hogy milyen lehetőség van a K_0 rendszer kijelölésére. Felismerték, hogy erre nincs lehetőség, mivel a tehetetlenségi rendszereket a bennük végzett mechanikai kísérletekkel nem lehet egymástól megkülönböztetni. Ezt a kijelentést a Galilei-féle relativitási elv néven ismerjük.

A relativitáselmélethez vezető úton egy másik kiindulópontot az optika eredményei szolgáltattak. A 17. század közepéig a fénysugarak a fizikusok fontos eszköztárához tartoztak, jóllehet nem tudtak felelni arra a kérdésre, hogy mi a fény. A század második felében két elképzelés jelentkezett. Általában az egyiket Huygens, a másikat Newton nevéhez fűzzük.

A Huygens nevével fémjelzett hullámelmélet hívei egy, a világűrt kitöltő hipotetikus anyagra, az „éterre” alapoztak. Állították, hogy a végtelen finom éterben a fény úgy terjed, mint a hang a levegőben, és a fényhullámot a fénylő test által rezgésbe hozott éterrészecskék indítják el. E mechanikai modellre alapozva longitudinális hullámokról beszéltek.

Newton arra a következtetésre jutott, hogy a fénysugarak a fénylő testek által kilövellt apró testecskékből állnak. A fényt és az étert elválasztotta, és azokat kölcsönható partnereknek tekintette. A vízbedobott kő a vízben hullámokat vált ki. Newton a fényrészecskéknek a kő, az éternek a víz szerepet szánta.

Mindkét fénymodell számára elfogadható volt az az állítás, hogy a fény az éterben véges sebességgel terjed. Erre 1675-ben elsőként O. Römer adott elfogadható értéket. Az igen ritka közegben mért fénysebesség, amelyet ma c-vel jelölünk, fontos szerephez jutott a speciális relativitáselméletben.

A 18. és 19. században a fény hullámelméletével kapcsolatban sok új eredmény született. Ezek közül csak azokat emeljük ki, amelyek a relativitáselmélet megjelenésében szerepet játszottak.

T. Young 1817-ben arra a következtetésre jutott, hogy a fényhullámok transzverzálisak (az éterrészecskék a terjedés irányára merőlegesen végzik rezgésüket).

A 19. század második felében egy új hullámelmélet jelentkezett. J. C. Maxwell 1873-ban a nevét viselő egyenletek alapján az elektromágneses hullámok létezését állította. A hullámok terjedési sebességére számításai a fény esetében nyert $c=3\cdot10^8 ms^{-1}$ értéket adták. H. Hertz 1887-ben kimutatta a transzverzális elektromágneses hullámok létezését. Kiderült, hogy a fényhullámok láthatóba eső elektromágneses hullámok.

A nyugvó világéter hívei a K_0 abszolút vonatkoztatási rendszert az éterhez rögzítették. Maxwell állította, hogy ebben a kitüntetett rendszerben a fény minden irányban ugyanazon c sebességgel terjed. De mit állíthatunk a többi tehetetlenségi rendszerekkel kapcsolatban? A feleletet keresve Maxwell 1880-ban egy kísérletet javasolt.

A kísérletet elsőként A. A. Michelson végezte el 1881-ben, majd a kísérletet E. W. Morley-el 1887-ben megismételte. Tekintsük a napközéppontú, állócsillagokhoz rögzített, Newton által tehetetlenséginek tekintett K vonatkoztatási rendszert. A földi megfigyelő egy, a Földhöz rögzített K' vonatkoztatási rendszert használ. A mérések rövid időtartama alatt a Föld sebessége gyakorlatilag nem módosul, így a K' rendszer is tehetetlenséginek tekinthető. K'-ben kijelölhető a K-hoz viszonyított pillanatnyi eltolódási sebesség, a $\vec{v}_F$ iránya. A kísérlet meglepő eredményhez vezetett: a $\vec{v}_F$ irányában és az arra merőleges irányban mért fénysebességekre ugyanazon érték adódott. Ez arra utalt, hogy két tehetetlenségi rendszer relatív eltolódási sebességét optikai úton nem lehet megállapítani, és így a K_0 abszolút rendszer kijelölésére a Maxwell-féle elektrodinamika sem ad lehetőséget.

A fénnyel kapcsolatos más tények is magyarázatot igényeltek. Ezek közül kettőt említünk. J. Bradley 1728-ban jelezte, hogy az állócsillagok az égbolton egy év alatt kis ellipsziseket írnak le, tehát a kiszemelt állócsillagot követő megfigyelő a távcső tengelyét folyamatosan kell változtassa. Az aberráció néven emlegetett jelenséget a Föld Nap körüli mozgásával magyarázzuk.

H. Fizeau 1851-ben az áramló folyadékban az áramlás irányában kibocsátott fény v_f sebességét mérte és azt találta, hogy

$$\frac{c}{n} < v_f < \frac{c}{n} + v \; , \tag{3}$$

ahol v az áramlási sebesség és n a folyadék törésmutatója.

A felsorolt tények kétségeket támasztottak mind az éterrel, mind a Galilei-féle transzformációs képletekkel szemben.

Transzverzális hullámok nem alakulhatnak ki igen kis sűrűségű közegben. A Michelson-kísérlet arra utalt, hogy a Föld az éter egy részét magával ragadja. Az aberrációt a nyugvó étermodellel lehetett magyarázni. A Fizeau-kísérlet viszont arra utalt, hogy az áramló folyadék csak részben ragadja magával az étert.

A 19. század végén és a 20. század elején egyre nyilvánvalóbbá vált, hogy a klasszikus mechanika egyes eredményei is felülvizsgálatra szorulnak.

Az (l) és (2) alattiak elfogadása azt jelentené, hogy amennyiben a fény a K rendszerben minden irányban ugyanazzal a sebességgel terjed, nem állítható ugyanez a K' rendszerrel kapcsolatban. A Michelson-kísérlet azt is tanúsította, hogy a Galilei-féle transzformációs képletek a fény esetében nem használhatók.

A Maxwell-féle elektrodinamika megtörte a newtoni mechanika egyeduralmát. A fizikusok meggyőződtek arról, hogy nem lehet az egész fizikát Newton mechanikájára alapozni. Ugyanakkor ellenhatásként egy másik irányzat is jelentkezett. Például a Maxwell-elméletet kiegészítő Lorentz-féle elektronelméletben a mechanikai tömeget ún. elektromágneses tömeggel helyettesítették. 1900. után M. Abraham és mások kimutatták, hogy a gömbalakú töltéscsomónak tekintett elektron gyorsítása esetében gyorsítást gátló hatás jelentkezik. Tehát tehetetlenséggel, vagyis tömeggel kell számolni. A számítások azt mutatták, hogy az elektromágneses tömeg a sebesség növelésekor növekszik. Jóllehet ez az út zsákutcának bizonyult, az előrelépést segítette. W. Kaufmann 1901-től a radioaktív anyagok által szolgáltatott nagysebességű elektronok eltérítését vizsgálva, tömegnövekedést tapasztalt. Ez is azt sugallta, hogy a newtoni mechanika a nagy sebességű mozgások esetében módosításra szorul.

2. A speciális relativitáselmélet megalapozása

Az étermodellel kapcsolatos nehézségekből kiutat kellett keresni.

W.Voigt 1887-ben elsőként figyelmeztetett arra, hogy amennyiben megköveteljük azt, hogy a fény terjedési sebessége az összes tehetetlenségi rendszerben minden irányban ugyanakkora legyen, az időt is transzformálni kell. Eredményéről megfeledkeztek.

H. A. Lorentz 1904-ben azokat a transzformációs képleteket kereste, amelyek alkalmazásakor a ritka közegre érvényes Maxwell egyenletek alakja nem módosul. Arra az esetre, amikor a kezdeti időpillanatban a K és K' tehetetlenségi rendszerek egybeesnek, és K' az l-es tengely irányában v sebességgel távolodik K-tól, a ma nevét viselő

$$x'_1 = \gamma(x_1 - \mathrm{v}t),\ x'_2 = x_2,\ x'_3 = x_3,\ t' = \gamma\left(t - \frac{\mathrm{v}}{c^2}x_1\right) \tag{4}$$

képleteket nyerte, ahol

$$\gamma = \left(1 - \frac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Az inverz képletekre

$$x_1 = \gamma(x'_1 + \mathrm{v}t'),\ x_2 = x'_2,\ x_3 = x'_3,\ t = \gamma\left(t' + \frac{\mathrm{v}}{c^2}x'_1\right) \tag{5}$$

írható.

A nyugvó éter-modell megmentésével fáradozó Lorentz nem tudta hasznosítani a transzformációs képletei által nyújtott lehetőségeket. Elfogadta G. F. Fitzgerald 1892-ben megfogalmazott állítását, mely szerint a tárgyak mérete az éter hatására, a mozgás irányában megrövidül. A Fizeau-kísérlet esetében nyugvó étert mentő ötletet nem tudott ajánlani.

A vizsgálatokba bekapcsolódott H. Poincaré is, aki a transzformációval kapcsolatos néhány fontos tényre hívta fel a figyelmet. Einsteinnal egyidőben, de tőle függetlenül megállapította, hogy a v paramétert tartalmazó (4) alatti transzformáció esetében csoporttulajdonságok állapíthatók meg.

Rámutatott arra, hogy az

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - c^2 t^2 \tag{6}$$

kifejezés Lorentz-invariáns. Értéke nem módosul, ha a kifejezésbe vesszős mennyiségeket írunk. Az x_4=ict képzetes negyedik koordináta használatát is javasolta. Poincaré azzal is tisztában volt, hogy a Galilei-féle relativitási elvet egy új, a Lorentz-transzformációra alapozó elvvel kell helyettesíteni.

Poincaré az éter kérdésével nem foglalkozott, figyelmét a transzformációval kapcsolatos matematikai vonatkozások kötötték le. A „Tudomány és föltevés" című könyvében a következőket írta: „tulajdonképpen ez nem más mint egy kényelmes feltevés, mely azonban mindig kényelmes marad, míg előbb-utóbb be fog következni az az idő, amikor az étert mint hasznavehetetlen fogalmat végképpen elvetik." E lépés megtételére azonban nem vállalkozott.

A továbblépés feladata Einsteinra hárult, aki 1905-ben „A mozgó testek elektrodinamikájáról" című dolgozatában ki merte mondani, hogy éter nincs. E bátor lépés megtételében az ugyanezen évben közzétett új fényelmélete is segítette.

M. Planck 1900-ban arra a következtetésre jutott, hogy a ν frekvenciájú fény (elektromágneses sugárzás) energiája, csak az

$$\varepsilon = \mathrm{h}\nu \tag{7}$$

energiaadag egészszámú többszöröse lehet. Einstein 1905-ben továbblépett. Állította, hogy a $\mathrm{h}\nu$ energiaadag hordozója egy sajátos tárgy, amelyik hullám és korpuszkuláris tulajdonsággal rendelkezik (az elektromágneses sugárzás kvantuma 1926-ban a foton nevet kapta). Einstein a newtoni úton haladt tovább. Newton a fényrészecskéket elválasztotta az étertől. Einstein az étert kiiktatva a hullámtulajdonságot is a fotonra ruházta. Új fényelméletével Einstein elsőként tudta magyarázni a fényelektromos hatás törvényeit. Einstein eredményeiből hármat emelünk ki:

a. Új megvilágításba helyezte a tér és idő fogalmakat;

b. Teljesítette a Poincaré által is megfogalmazott feladatot, lerakta a klasszikus mechanikát felváltó új mechanika alapjait;

c. Állította, hogy a speciális relativitáselmélet eredményei két alapelvből származtathatók:

1. A tehetetlenségi rendszerek minden fizikai folyamat szempontjából egyenértékűek. Tehát a természettörvények minden tehetetlenségi rendszerben ugyanolyan alakban írhatók.
2. A vákuumbeli fénysebesség valamennyi tehetetlenségi rendszerben, minden irányban ugyanolyan értékű.

A következőkben példaként mutassuk meg, hogy a két alapelv hogyan vezet az ún. speciális Lorentz-transzformáció (4) alatti képleteihez. Keressük a képleteket az

$$x'_1 = b_1 x_1 + b_2 t,\ x'_2 = x_2,\ x'_3 = x_3,\ t' = b_3 x_1 + b_4 t \tag{8}$$

alakban, ahol az együtthatók v függvényei. (8)-ból az

$$x_1 = \frac{1}{D}\left(b_4 x'_1 - b_2 t'\right),\ \ x_2 = x'_2,\ x_3 = x'_3,\ t = \frac{1}{D}\left(-b_3 x'_1 + b_1 t'\right) \tag{9}$$

inverz képletekhez jutunk, ahol

$$D = b_1 b_4 - b_2 b_3. \tag{10}$$

A K' rendszer origójára $\mathrm{x}_1 = \mathrm{v}t$, $\mathrm{x}'_1 = 0$ írható és így

$$b_2 = -\mathrm{v} b_1. \tag{11}$$

A K rendszer origójára $\mathrm{x}_1 = 0$, $\mathrm{x}'_1 = -\mathrm{vt}'$ érvényes, következésképpen

$$b_2 = -\mathrm{v} b_4. \tag{12}$$

A kezdeti időpillanatban a közös origóból az l-es tengely irányában kibocsátott fényjelre a K és K'-beli megfigyelők egyaránt a c értéket adják, tehát $x_1 = ct$, $x'_1 = ct'$ és így

$$c = \frac{cb_1 + b_2}{cb_3 + b_4} \tag{13}$$

írható.

(11),(12),(13) felhasználásával az ismeretlen együtthatók száma egyre csökken és

$$x'_1 = b_1(x_1 - \mathrm{v}t)\ ,\ t' = b_1\left(t - \frac{\mathrm{v}}{c^2}x_1\right) \tag{14}$$

$$x_1 = \frac{\gamma^2}{b_1}(x'_1 + \mathrm{v}t')\ ,\ t = \frac{\gamma^2}{b_1}\left(t' + \frac{\mathrm{v}}{c^2}x'_1\right) \tag{15}$$

adódik.

A második alapelvből

$$x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3 - c^2t'^2 = 0\ ,\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - c^2t^2 = 0 \tag{16}$$

következik. Az első kapcsolat, (14), majd a második kapcsolat felhasználásával

$$b_1 = \gamma$$

nyerhető. Ezzel a (4) és (5) alatti transzformációs képletekhez jutottunk.

3. A tér és idő relativitása

Miután Einstein megfosztotta az abszolút teret utolsó támaszától, az étertől, a fogalom hitelét vesztette. Az abszolút időfogalomhoz ragaszkodó Lorentz-el szemben azt is állította, hogy egységes világidőről nem beszélhetünk. De ennél is többet adott. Felismerte, hogy a Lorentz-féle transzformációs képletek arra utalnak, hogy a tér és idő között elválaszthatatlan kapcsolat van. Ezért a térbeli kapcsolatok megadása az időbeliek pontosítását, az időbeli kapcsolatok megadása a térbeli viszonyok figyelembevételét igényli. Ezért állította, hogy az időtartamok és távolságok mérésekor szigorú utasításokat kell betartani.

Az idővel kapcsolatban előírta, hogy a mérések elvégzése előtt a tehetetlenségi vonatkoztatási rendszeren belül az órákat egyeztetni kell. Tekintsük például a K rendszert. Az origóban elhelyezett órát állítsuk be a t=0 időpillanatra. Ebben az időpillanatban az origóból indítsunk el egy fényjelet. AZ origótól r távolságra lévő P pontbeli órát a jel megérkezésekor a t_P= r/c időre kell beállítani. Ugyanígy járunk el a K' rendszerbeli órák esetében is. Különböző tehetetlenségi rendszerek esetében az egyeztetést csak egy alkalommal végezhetjük el. Ezt tesszük akkor, amikor a K és K' rendszerek origóban lévő óráit, az egybeesés pillanatában a t=t'=0 időre állítjuk be.

Tekintsük a K' rendszerben nyugvó (a rendszerrel együttmozgó) órát. Ekkor $\Delta x'_1 = 0$. Legyen $\Delta t'$ a rendszerben mért ún. nyugalmi időtartam. A K-ban mért ún. mozgási mérőszámra az (5) alatti utolsó képlet alapján

$$\Delta t = \gamma \Delta t' \tag{17}$$

írható. Amennyiben az óra a K rendszerben nyugszik ($\Delta x_1 = 0$), a K és K' rendszerekben mért időtartamok kapcsolatára (4) alapján

$$\Delta t' = \gamma \Delta t \tag{18}$$

adódik. (17) és (18) között nincs ellentmondás, mivel a kapcsolatokat különböző térbeli viszonyokra adtuk meg és mindkét esetben a mozgási mérőszám nagyobb a nyugalminál. A mozgó rendszer órái lassabban járnak, mint a nyugvó rendszer órái.

A hosszúságok mérésére Einstein pontos utasításokat adott. A K'-ben nyugvó 1'-es tengelyre fektetett merev rúd hosszát a szokásos módon állapítjuk meg. A rúdhoz mérőrudat rögzítve leolvassuk a végpontokhoz tartozó beosztásokat. Tehát az ún. nyugalmi mérőszámra

$$L'_1 = \Delta x'_1 \tag{19}$$

írható. A K-beli megfigyelő a hozzá képest mozgó rúd hosszát kell megadja. Mérőrúdját az 1-es tengely mentén rögzíti. A mozgási mérőszám megállapításakor megköveteljük, hogy a végpontok helyzetét K-ban, ugyanabban az időpillanatban kell leolvasni. Mivel Δt=0 , (4) alapján

$$\Delta x'_1 = \gamma \Delta x_1 \text{, vagy } L'_1 = \gamma L_1 \tag{20}$$

adódik.

Amennyiben a merev rúd a K rendszerben nyugszik, a K'-ben állapítunk meg mozgási mérőszámot, a vesszős és vessző nélküli mennyiségek szerepet cserélnek:

$$L_1 = \gamma L'_1 . \tag{21}$$

(20) és (21) között nincs ellentmondás. Mindkét esetben a mozgási mérőszám kisebb a nyugalmi mérőszámnál. A látszólagos ellentmondás egy aszimmetriát is tükröz. A nyugalmi mérőszám megadásakor csak a mérőrúdra és egyetlen megfigyelőre van szükség. A mozgási mérőszám megadása egy mérőrudat, legalább két órát és két megfigyelőt követel. A mozgás irányára merőlegesen elhelyezett rúdra K-ban és K'-ben ugyanazt a hosszértéket kapjuk:

$$L'_2 = L_2 \ , \ L'_3 = L_3 . \tag{22}$$

A Lorentz-féle transzformációs képletek az események egyidejűségével kapcsolatban is fontos eredményekhez vezettek. Tekintsük a K' rendszerben két különböző helyen bekövetkező egyidejű eseményt. Ekkor $\Delta t' = 0$, $\Delta x'_1 \neq 0$, következésképpen (5) alapján

$$\Delta t = \gamma \frac{v}{c^2} \Delta x'_1 \tag{23}$$

adódik, tehát a K-beli megfigyelő számára a két esemény nem egyidejű.

A K-ban különböző helyeken észlelt egyidejű eseményre (4) alapján

$$\Delta t' = -\gamma \frac{v}{c^2} \Delta x_1 \tag{24}$$

írható. Tehát valahányszor két esemény egyidejűségéről beszélünk, meg kell nevezni azt a vonatkoztatási rendszert amelyben azt megállapítottuk.

A fentiek alapján a következőket állapíthatjuk meg.

A térrel és idővel kapcsolatos adatok megadásánál mindig meg kell nevezni azt a vonatkoztatási rendszert, amelyben ezek az adatok érvényesek. A K-beli adatok csak a K rendszerben használhatók. Abban az esetben, amikor a K-beli információkat egy másik rendszerben kívánjuk hasznosítani, fel kell használni a Lorentz-féle transzformációs képletek által nyújtott átszámítási lehetőségeket.

Einstein, eredményeinek megadásakor, a valós háromdimenziós $\vec{x}$-teret használta. H. Poincaré egy negyedik koordináta bevezetését és egy négydimenziós absztrakt tér használatát javasolta. Elképzelésit 1908-ban H. Minkowski valósította meg. Minkowski tanúsította, hogy a tér és idő kapcsolatát legtermészetesebb módon az ún. téridő kontinuumban lehet leírni. E négydimenziós térre kidolgozta a vektor- és tenzorszámítás apparátusát.

A téridő egy pontjához az

$$x_1, x_2, x_3, x_4 = ict \tag{25}$$

komponensekkel rendelkező négyes helyzetvektort rendelte. Az ívelemnégyzetre a háromdimenziós euklideszi térre használt kifejezés általánosításának tekinthető

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 \tag{26}$$

kifejezést használta. A (4)és (5) alatti transzformációs képletek helyett

$$x'_1 = \gamma\left(x_1 + i\frac{\mathrm{v}}{c}x_4\right),\ x'_2 = x_2\ ,\ x'_3 = x_3\ ,\ x'_4 = \gamma\left(-i\frac{\mathrm{v}}{c}x_1 + x_4\right), \tag{27}$$

$$x_1 = \gamma\left(x'_1 - i\frac{\mathrm{v}}{c}x'_4\right),\ x_2 = x'_2\ ,\ x_3 = x'_3\ ,\ x_4 = \gamma\left(i\frac{\mathrm{v}}{c}x'_1 + x'_4\right) \tag{28}$$

írható. Ezek segítségével azonnal belátható, hogy ds^2 invariáns skalár (a K és K'-beli értéke egyezik).

A következőkben Einstein egyes eredményeinek ismertetésekor az egyszerűbb, Minkowski által nyújtott formalizmust használjuk.

4. Alkalmazások és kísérleti bizonyítékok

Einstein 1905-07. között közölt munkáiban az elmélet több olyan következményével foglalkozik, amelyek az elmélet létjogát is tanúsítják. A következőkben ezekből válogatunk.

4.1.. A sebességek összeadása

Egy tehetetlenségi rendszeren belül mért sebességeket a szokásos módon adjuk össze. De hogyan kell eljárnunk, amikor két különböző rendszerben mért sebességet akarunk összegezni?

Tekintsük a közös l-es tengely mentén haladó anyagi pontot, amelyre a K'-beli megfigyelő a v' sebességértéket adja. Ugyanerre a mozgásra a K-beli megfigyelő (5) alapján a

$$V = \frac{dx_1}{dt} = \frac{\mathrm{v} + \mathrm{v}'}{1 + \frac{\mathrm{v}\mathrm{v}'}{c^2}} \tag{29}$$

sebességértéket adja. E képlet segítségével Einstein feleletet tudott adni arra a kérdésre, amelyik 16 éves korától foglalkoztatta. Milyennek látnánk a fényt, ha utol tudnánk érni? Legyen v'=c, ekkor V=c. Sőt a v=v'=c esetben is V=c adódik. A felelet: a fényt nem lehet utolérni.

A (29) képletet a Fizeau-kísérlet magyarázatára is fel tudjuk használni. A K'-ben mért c/n és a K-ban mért v sebességet összeadva

$$V = \frac{\mathrm{v} + \frac{c}{n}}{1 + \frac{\mathrm{v}}{cn}} = \frac{c}{n} + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\mathrm{v} + \dots$$

adódik. A közelítés során figyelembe vettük, hogy $\mathrm{v} << \frac{c}{n}$.

4.2. Pontmechanikai alkalmazások

Tekintsük a K' rendszer origójában rögzített anyagi pontot, amelyre a K rendszerben $dx_1 = \mathrm{v} \cdot dt$ írható. Ekkor (25), (26) és $ds^2 = ds'^2$ alapján

$$\left(\mathrm{v}^2 - c^2\right)dt^2 = -c^2 dt'^2$$

írható. A dt' nyugalmi időtartamra a sajátidő megnevezést és a $d\tau$ jelölést is használjuk. Ekkor a (17)-el egyező

$$dt = \gamma d\tau \qquad (30)$$

kapcsolathoz jutunk. (30) helyességét több kísérleti tény igazolja.

E kísérletek két csoportba sorolhatók: a) instabil, nagysebességű elemi részek bomlására vonatkoznak; b) nagysebességű járművek (például repülőgépek) által hordozott atomórákat használnak. Az instabil részek bomlásával kapcsolatban az

$$N = N_0 \exp\left(-\frac{t}{T}\right)$$

képletet használjuk, amelyben T az átlagos élettartamot jelöli. A Földön is észlelhető müonok az atmoszféra felsőbb rétegeiben (16-20 km magasságban) keletkeznek. A müonok élettartamára a táblázatokban a τ =2,2·10^{-6}s értéket találjuk. Tehát még a c sebességgel mozgó müon is elbomlásáig csak mintegy 0,66 km utat futna be. Azt a tényt, hogy a müonok nagy számban a Földre is eljutnak, B. Rossi 1941-ben azzal magyarázta, hogy τ nyugalmi időtartamot jelöl és a földi megfigyelő *a* $T = \gamma\tau$ mozgási élettartammal kell számoljon. Ezt a tényt 1963-ban földi körülmények között is igazolták.

R. P. Durbin, H. H. Loar és W. W. Havens 1952-ben a batáviai Fermi-laboratóriumban a töltéssel rendelkező pi-mezonokkal kapcsolatban is ugyanerre a következtetésre jutott. A π^+, π^- részecskék átlagos nyugalmi élettartama τ=(2.60±0.05)·10^{-8} s. A v=0,75 c sebességű pi-mezonok esetében a várakozásnak megfelelően a T=(3,9±0,3)·10^{-8} s mozgási élettartamot mérték.

1971-ben J. C. Hafele és R. Keating b. típusú igazolást valósított meg. Repülőgépen 15 órán keresztül atomórát (Cs-órát) utaztattak, átlagosan 1200 km/h sebességgel. A repülés befejeztekor a sugárhajtóműves repülőgép órája kisebb időt mutatott, mint a repülőtéren maradt másodpéldánya (az atomóra lassabban rezgett). Az atomóra 4,7·10^{-8} s késése tökéletesen megfelelt az elvárt értéknek.

4.3. Az energia és tömeg kapcsolata

Einstein 1905-ben közölte a „Függ-e egy test tehetetlensége az energia tartalmától" című cikkét, amelyben kimutatta, hogy ha egy test energiát sugároz ki, akkor tömege csökken. A nevét viselő híres képletet 1907-ben közölte. A következőkben e képletet a Minkowski-féle formalizmus segítségével adjuk meg.

Mivel dτ invariáns skalár segítségével négyes sebességvektort értelmezhetünk:

$$u_1 = \frac{dx_1}{d\tau} = \gamma \mathrm{v}_1 \;,\; u_2 = \frac{dx_2}{d\tau} = \gamma \mathrm{v}_2 \;,\; u_3 = \frac{dx_3}{d\tau} = \gamma \mathrm{v}_3 \;,\; u_4 = ic\frac{dt}{d\tau} = ic\gamma\,. \qquad (31)$$

A klasszikus mechanikában a sebességet tömeggel szorozva az impulzushoz jutunk. Állítva, hogy létezik egy tömegjellegű invariáns skalár, amelyet jelöljünk m_0-val, négyes impulzus értelmezhető:

$$p_1 = \gamma m_0 \mathrm{v}_1 \;,\; p_2 = \gamma m_0 \mathrm{v}_2 \;,\; p_3 = \gamma m_0 \mathrm{v}_3 \;,\; p_4 = i\gamma m_0 c \qquad (32)$$

Foglalkozzunk a p_4 komponenssel. Ha sorbafejtünk v^2/c^2 szerint a

$$p_4 = im_0 c + i\frac{m_0}{2c}\mathrm{v}^2 + \ldots$$

közelítő kifejezéshez jutunk, amelynek második tagjában megjelenik a c-vel osztott mozgási energia kifejezés. Ezért állíthatjuk, hogy a

$$p_4 = \frac{i}{c}E \qquad (33)$$

kifejezésben E energiát jelöl:

$$E = \gamma m_0 c^2\,. \qquad (34)$$

Az

$$m = \gamma m_0 \qquad (35)$$

kapcsolatot is gyakran használjuk, amelyben szereplő m_0-át nyugalmi, m-et pedig mozgási tömegnek nevezzük. A fentiek alapján az energia és tömeg kapcsolatát adó Einstein-képlethez jutunk:

$$E = mc^2 \ . \tag{36}$$

Az energia és hármas impulzus kapcsolatát az

$$E = c\sqrt{\vec{p}^2 + m_0^2 c^2} \tag{37}$$

összefüggés adja.

A (35) alatti tömegképlet érvényességét elsőként nagy pontossággal A. H. Bucherer igazolta 1909-ben.

A relativitáselmélet egyik szimbólumává vált (36) képlet a magfizika és az elemirészfizika nélkülözhetetlen alapösszefüggése.

4.4. A Doppler-effektus

A négyes impulzusra (27) és (28) analógiájára a

$$p'_1 = \gamma\left(p_1 + i\frac{\mathrm{v}}{c}p_4\right),\ p'_2 = p_2\ ,\ p'_3 = p_3\ ,\ p'_4 = \gamma\left(-i\frac{\mathrm{v}}{c}p_1 + p_4\right), \tag{38}$$

$$p_1 = \gamma\left(p'_1 - i\frac{\mathrm{v}}{c}p'_4\right),\ p_2 = p'_2\ ,\ p_3 = p'_3\ ,\ p_4 = \gamma\left(i\frac{\mathrm{v}}{c}p'_1 + p'_4\right) \tag{39}$$

transzformációs képletek írhatók.

Az Einstein-féle fényelméletben (7), $m_0 = 0$ és (37) alapján a fotonra

$$\vec{p} = \frac{h\nu}{c}\vec{n}\ ,\ \ p_4 = i\frac{h\nu}{c} \tag{40}$$

írható, ahol $\vec{n}$ a foton mozgásirányába eső egységvektor. Amennyiben $n_3=0$ (38) és (40) alapján a

$$\nu' n'_1 = \gamma\nu\left(n_1 - \frac{\mathrm{v}}{c}\right),\ \nu' n'_2 = \nu n_2\ ,\quad \nu' = \gamma\nu\left(1 - \frac{\mathrm{v}}{c}n_1\right) \tag{41}$$

és (39), (40) alapján a

$$\nu n_1 = \gamma\nu'\left(n'_1 + \frac{\mathrm{v}}{\mathrm{c}}\right),\ \nu n_2 = \nu' n'_2\ ,\quad \nu = \gamma\nu'\left(1 + \frac{\mathrm{v}}{c}n'_1\right) \tag{42}$$

transzformációs képletek adódnak.

Alkalmazzuk e képleteket két speciális esetre.

Tekintsük a K' rendszer origójában rögzített fényforrást. A K-tól v sebességgel távolodó fényforrásból a K rendszer origója felé kibocsátott fotonra $n_1' = -1$ és (42)alapján

$$\nu_1 = \gamma\nu'\left(1 - \frac{\mathrm{v}}{c}\right)$$

adódik. Amennyiben K' –v sebességgel közeledik K-hoz, a K-beli megfigyelő a

$$\nu_2 = \gamma\nu'\left(1 + \frac{\mathrm{v}}{c}\right)$$

frekvenciát állapítja meg. A két frekvenciaérték számtani középértékére

$$\bar{\nu} = \gamma\nu' = \nu'\left(1 + \frac{\mathrm{v}^2}{2c^2} + \ldots\right) \tag{43}$$

írható. (43) helyességét H. I. Ives, G. R. Stilwell 1938-ban és G. Otting 1939-ben kísérletileg igazolta. Fényforrásként nagysebességű gerjesztett csősugár ionokat használtak.

Rögzítsük a fényforrást a K rendszer kezdőpontjában. Tekintsük a 2-es tengely irányában kibocsátott fotont. A foton mozgási irányára merőleges irányban haladó K'-beli megfigyelő frekvenciaváltozást észlel. A változást transzverzális Doppler-effektusnak nevezzük. A K rendszerbeli ν frekvencia és a K'-beli ν' frekvencia kapcsolatát a (41) alatti harmadik képlet adja:

$$\nu' = \gamma\nu \,. \tag{44}$$

(44) helyességét a Mössbauer-effektussal igazolták. A fotonforrást kristályos anyagban lévő gerjesztett atommagok képviselték.

4.5. Az aberráció

A (41) alatti képletekből a foton K és K'-beli mozgás irányának kapcsolatára

$$n'_1 = \frac{n_1 - \frac{\mathrm{v}}{c}}{1 - \frac{\mathrm{v}}{c} n_1} \,, \quad n'_2 = \frac{n_2}{\gamma\left(1 - \frac{\mathrm{v}}{c} n_1\right)} \tag{45}$$

adódik. Tehát az állócsillagból érkező fényt a K és K'-beli megfigyelők különböző irányúnak észlelik.

Abban a speciális esetben, amikor a csillagfény a K rendszerben a 2-es tengely mentén érkezik: (45)-ből $n_1 = 0$, $n_2 = -1$ figyelembevételével a K'-beli fénysugár irányára az

$$n'_1 = -\frac{\mathrm{v}}{c} \,, \; n'_2 = -\frac{1}{\gamma}$$

egységvektor-komponenseket nyerjük.

Zárjuk a fentieket két megjegyzéssel.

A Lorentz-féle transzformációs képletek olyan kis v/c értékékre, amelyek esetében a v^2/c^2 nagyságrendű tagok már elhanyagolhatók, a Galilei-féle transzformációs képletekkel helyettesíthetők. Ezzel magyarázható, hogy egyes ún. elsőrendű hatásokra (például az aberrációra) miért tudott a klasszikus elmélet kielégítő eredményt szolgáltatni.

A 20. század elején két új elmélet, a speciális relativitáselmélet és a kvantumelmélet alapjait rakták le. Einstein fényelméletével elsőként tudatosította azt, hogy kidolgozhatók olyan elméletek, amelyek mindkét elmélet követelményeit teljesítik. Azt is tudta, hogy a Maxwell-elmélet nem teljes, csak a hullámtulajdonságok leírására alkalmas. Einstein megtalálta a továbblépés útját és megtette az első lépést egy új elmélet, a kvantumelektrodinamika kidolgozása terén. Az új elmélet az elektromágneses mező korpuszkuláris sajátosságainak leírására is alkalmas.