

A centrikusan nyomott nyitott és zárt keresztmetszetű egyenes rúd stabilitása

Petru Moga¹, Köllő Gábor¹, Ștefan Guțiu², Cătălin Moga³

¹professzor, ²adjunktus, ³tanársegéd
Kolozsvári Műszaki Egyetem

Abstract

This paper presents the basis of the analysis regarding the compression members, combined flexural and torsional buckling and the checking methodology according to technical references and Romanian norms as well as to the EUROCODE 3 norm.

Összefoglalás

Ebben a tanulmányban bemutatjuk egy központosan nyomott rúd stabilitásvesztését hajlítás és csavarás együttes fellépése mellett.

A román és az EC3 szabvány előírásait használjuk.

1. Bevezető

A centrikusan nyomott egyenes rúd kihajlása bekövetkezhet hajlítással vagy hajlítással és csavarással, amely főleg vékony falú nyitott keresztmetszetekre (BPS) jellemző.

A maximális nyomóerő:

$$N_{cap} = \varphi_{min} A_{br} \sigma_a \quad (1)$$

φ_{min} – kihajlási együttható, amelyet a karcsúsági tényező függvényében határozzunk meg

$$\lambda_{max} = \max \left[\lambda_x = \frac{l_{fx}}{i_x}; \lambda_y = \frac{l_{fy}}{i_y} \right]$$

2. Kivetődési számítások alapjai – figyelembe véve a hajlítást és a csavarást

2.1. Vékony falú nyitott keresztmetszetek (BPS)

Egyszerűsítő feltételezések:

- a keresztmetszet nem változtatja az alakját
- a BPS keresztmetszet állandó a tartó teljes hosszában
- a nyomóerő központosan hat és statikus jellegű
- elhanyagolhatóak a rúd hosszanti alakváltozásai
- a rúd anyaga izotróp, homogén és érvényes a Hooke törvénye
- a keresztmetszet alakváltozásai elhanyagolhatóak
- a rúdnek nincsenek fekvéshibái

A kritikus kivetődési erőt (P_{cr}) hajlítás és csavarás esetén a következő differenciálegyenletek segítségével lehet meghatározni:

$$\left\{ \begin{array}{l} EI_y \frac{d^2 u}{dz^2} + P \cdot u + P \cdot y_c \cdot \varphi = 0 \end{array} \right. \quad (2.a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} EI_x \frac{d^2 v}{dz^2} + P \cdot v - P \cdot x_c \cdot \varphi = 0 \end{array} \right. \quad (2.b)$$

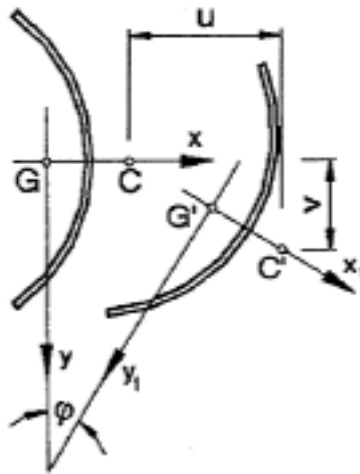
$$\left\{ \begin{array}{l} EI_\omega \frac{d^4 \varphi}{dz^4} - \left(GI_t - \frac{I_c}{A} P \right) \frac{d^2 \varphi}{dz^2} - P \left(x_c \frac{d^2 v}{dz^2} - y_c \frac{d^2 u}{dz^2} \right) = 0 \end{array} \right. \quad (2.c)$$

ahol:

u, v – a hajlítási központ elmozdulásai az 1. ábra szerint.

φ – elfordulási szög

I_c – poláris tehetetlenségi nyomaték a C csavarási központhoz viszonyítva



1. ábra

Kivetődés hajlítás és csavarással

A két szimmetriatengellyel rendelkező keresztmetszet esetén ($G=C, x_c = y_c=0$) a 2(a, b, c) egyenletek egyszerűbb alakban írhatók:

$$\left\{ \begin{array}{l} EI_y \frac{d^2 u}{dz^2} + P \cdot u = 0 \end{array} \right. \quad (3.a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} EI_x \frac{d^2 v}{dz^2} + P \cdot v = 0 \end{array} \right. \quad (3.b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} EI_\omega \frac{d^4 \varphi}{dz^4} - \left(GI_t - \frac{I_c}{A} P \right) \frac{d^2 \varphi}{dz^2} = 0 \end{array} \right. \quad (3.c)$$

A 3a és 3b-ből meghatározható az Euler-féle kritikus erő:

$$P_{x.cr} = \frac{\pi^2 EI_x}{l_{fx}^2}; P_{y.cr} = \frac{\pi^2 EI_y}{l_{fy}^2} \quad (4.a, b)$$

A következő helyettesítéssel $I_C = i_c^2 A$ a 3c egyenlet a következőképpen alakul:

$$\frac{d^4 \varphi}{dz^4} - \frac{1}{EI_\omega} (GI_t - P \cdot i_c^2) \frac{d^2 \varphi}{dz^2} = 0 \quad (5)$$

Ennek az egyenletnek a megoldása:

$$\varphi = C \cdot \sin \frac{\pi \cdot z}{l_{f\omega}} \quad (6)$$

ahol $l_{f\omega}$ – csavarási kivetődési hossz.

A (6). megoldást az (5). egyenletbe helyettesítve megkapjuk a P_ω -t.

$$P_\omega = \frac{1}{i_c^2} \left(\frac{\pi^2 EI_\omega}{l_{f\omega}^2} + GI_t \right) \quad (7)$$

A kihajlási hossz:

$$l_{f\omega} = \mu_\omega \cdot l \quad (8)$$

μ_ω - együttható, amely a rúd kapcsolatától függ.

1. táblázat

Ssz.	Végponti kapcsolatok	μ_ω
1	csuklós kapcsolat	1
2	befogott rúd	0,5

A rúd kivetődik csavarással.

$$P_\omega < P_{xcr} \text{ és } P_\omega < P_{y cr}$$

A (7)-es összefüggésben:

$\frac{\pi^2 EI_\omega}{l_{f\omega}^2}$ – a BPS keresztmetszet merevsége gátolt csavarásra

GI_t – merevség szabad csavarásra

Visszatérve az általános egyenletekhez, ha $l_{fx} = l_{fy} = l_{f\omega} = l$ és ha $z = 0$ és $z = l$, fennállnak a következő feltételek:

$$u = v = \varphi = 0$$

$$\frac{d^2 u}{dz^2} = \frac{d^2 v}{dz^2} = \frac{d^2 \varphi}{dz^2} = 0$$

A 2(a, b, c) egyenletek megoldásai:

$$u = C_1 \cdot \sin \frac{\pi \cdot z}{l}; v = C_2 \cdot \sin \frac{\pi \cdot z}{l}; \varphi = C_3 \cdot \sin \frac{\pi \cdot z}{l}; \quad (9)$$

Behelyettesítve a (2) egyenletrendszerbe, az egyenletek így alakulnak:

$$\begin{cases} (P - P_{y.cr}) \cdot C_1 & + & P \cdot y_c \cdot C_3 = 0 \\ (P - P_{x.cr}) C_2 & - & P \cdot x_c \cdot C_3 = 0 \\ P \cdot y_c \cdot C_1 & - & P \cdot x_c \cdot C_2 + i_c^2 (P - P_\omega) \cdot C_3 = 0 \end{cases} \quad (10)$$

Azért, hogy ennek az egyenletrendszernek C_1, C_2, C_3 zérótól különböző megoldása legyen, szükséges:

$$\begin{vmatrix} (P - P_{y.cr}) & 0 & P \cdot y_c \\ 0 & (P - P_{x.cr}) & -P \cdot x_c \\ P \cdot y_c & -P \cdot x_c & i_c^2 (P - P_\omega) \end{vmatrix} = 0 \quad (11)$$

Kifejtve kapjuk:

$$f(P) = i_c^2 (P - P_{x.cr})(P - P_{y.cr})(P - P_\omega) - P^2 \cdot y_c^2 (P - P_{x.cr}) - P^2 \cdot x_c^2 (P - P_{y.cr}) = 0 \quad (12)$$

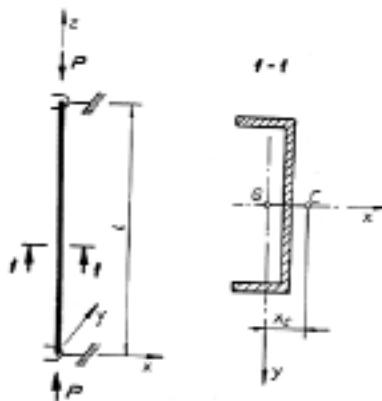
Az $f(P) = 0$ függvény előjele, elfogadva $P_{x.cr} < P_{y.cr}$, a 2. táblázatban van megadva.

2. táblázat

P	0	$P_{x.cr}$	$P_{y.cr}$	$P > P_{y.cr}$
$f(P)$	-	+	-	+

Az $f(P) = 0$ egyenletnek három valós pozitív gyöke van és be lehet bizonyítani, hogy az egyik kisebb, mint $\min(P_{x.cr}, P_{y.cr}, P_\omega)$ és a másik nagyobb, mint $\max(P_{x.cr}, P_{y.cr}, P_\omega)$.

Azoknál a keresztmetszeteknél, ahol egy szimmetriatengely létezik (2. ábra):



2. ábra
BPS vékonyfalú nyitott keresztmetszet
egy szimmetriatengellyel

a (11) egyenletrendszer a következőképpen módosul:

$$\begin{vmatrix} P - P_{x.cr} & -P \cdot x_c \\ -P \cdot x_c & i_c^2 (P - P_\omega) \end{vmatrix} = 0 \quad (13)$$

Kifejtve:

$$i_c^2 (P - P_{x.cr})(P - P_\omega) - P^2 \cdot x_c^2 = 0 \quad (14)$$

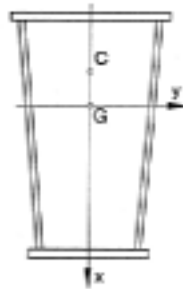
Elosztva az egyenletet A^2 -el:

$$\sigma^2 \left(1 - \frac{x_c^2}{i_c^2} \right) - \sigma (\sigma_{x.cr} + \sigma_\omega) + \sigma_{x.cr} \cdot \sigma_\omega = 0 \quad (15)$$

ahol

$$i_c^2 = \frac{I_c}{A} = (i_x^2 + i_y^2) + (x_c^2 + y_c^2) = i_0^2 + (x_c^2 + y_c^2) = i_0^2 + x_c^2$$

2.2. Zárt profilú keresztmetszet (BPS)



3. ábra
BPS vékonyfalú zárt keresztmetszet
egy szimmetriatengellyel

A 3. ábrán látható egy szimmetria tengelyű keresztmetszet. Ebben az esetben a kritikus erő a következő egyenletrendszerből határozható meg:

$$\begin{cases} (P - P_{x.cr})C_1 + P \cdot x_c \cdot C_2 = 0 \\ P \cdot x_c \cdot C_1 + i_d^2 (P - P_\omega) C_2 = 0 \end{cases} \quad (16)$$

ahol P_ω – a kritikus kihajlási erő csavarásra (zárt keresztmetszet)

$$P_\omega = \frac{\frac{\pi^2 EI_\omega^-}{l^2} + G I_r \cdot \nu}{i_d^2 \left(\nu + \frac{E I_\omega^- \cdot \pi^2}{G I_d \cdot l^2} \right)} \quad (17)$$

ν – a rúd tengelyének görbületi együtthatója

$$\nu = 1 - \frac{I_r}{I_d}; \quad i_d^2 = \frac{I_d}{A}$$

A C_1 és C_2 zérótól különböző kell legyen

$$\begin{vmatrix} P - P_{x.cr} & P \cdot x_c \\ P \cdot x_c & i_d^2 (P - P_\omega) \end{vmatrix} = 0 \quad (18)$$

vagy

$$i_d^2 (P - P_{x.cr})(P - P_\omega) - P^2 \cdot x_c^2 = 0 \quad (19)$$

Ebből az egyenletből határozzuk meg a P_1 és P_2 -t.

3. A romániai szabványok szerinti ellenőrzés kihajlásra hajlítás és csavarás esetén

Ismerve P_{cr} értékét, a (12) vagy (14) egyenlet megoldása nyitott keresztmetszet és (19) zárt keresztmetszet esetén:

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} \quad (20)$$

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda_{tr}^2}, \quad (21)$$

$$\lambda_{tr} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{cr}}}$$

A λ_{tr} függvényében határozzuk meg a kihajlási együtthatót.

$$\varphi_{tr} = \varphi_{tr}(\lambda_{tr}) \text{ - az SR 1911-98 -ből a „b” görbe.}$$

A rúd teherbíró képessége meghatározható:

$$N_{cap} = \varphi_{tr} \cdot A \cdot \sigma_a \quad (22)$$

A rugalmas – képlékeny tartományban ($\sigma_p < \sigma \leq \sigma_c$) elfogadva $\sigma_p \cong 0,5 \cdot \sigma_c$, kapjuk:

$$\sigma_{cr}^* = \sigma_c \left(1 - 0,25 \frac{\sigma_c}{\sigma_{cr}} \right) \quad (23)$$

4. A nyomott rudak teherbírása az EC3 szabvány szerint

4.1. Kivetődési ellenállás

A rúd teherbíró képessége:

$$N_{b,Rd} = \chi \cdot \beta_A \cdot A \cdot f_y \cdot \frac{1}{\gamma_{M1}} \quad (24)$$

$$\beta_A = \begin{cases} 1 & \text{1,2,3 osztályú keresztmetszetek} \\ A_{eff} / A & \text{4 osztályú keresztmetszet} \end{cases}$$

$$\chi = \frac{1}{\phi + \sqrt{\phi^2 - \bar{\lambda}^2}}; \chi \leq 1 \quad (25)$$

redukáló tényezők, melyeket a karcsúsági tényező függvényében ($\bar{\lambda}$) határozhatunk meg.

$$\phi = 0,5 \left[1 + \alpha (\bar{\lambda} - 0,2) + \bar{\lambda}^2 \right]$$

α – hiba tényező (3. táblázat)

Kivetődési görbe	a	b	c	d
Hiba tényező α	0,21	0,34	0,49	0,76

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{\beta_A \cdot A \cdot f_y}{N_{cr}}} \text{ - karcsúsági tényező.}$$

4.2. Kivetődés hajlítással

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{\beta_A \cdot A \cdot f_y}{N_{cr}}} = \sqrt{\frac{A \cdot f_y}{N_{cr}}} \cdot \sqrt{\beta_A}$$

ahol

$$N_{cr} = \min \left[P_{x.cr} = P_{Ex} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_x}{l_{fx}^2}; P_{y.cr} = P_{Ey} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_y}{l_{fy}^2} \right]$$

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{\beta_A \cdot A \cdot f_y}{N_{cr}}} = \sqrt{\frac{f_y}{\sigma_k}} \cdot \sqrt{\beta_A}$$

ahol

$$\sigma_k = \sigma_{cr} = \min \left[\sigma_{Ex} = \frac{P_{Ex}}{A}; \sigma_{Ey} = \frac{P_{Ey}}{A} \right]$$

redukált karcsúsági tényező.

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{\beta_A \cdot A \cdot f_y}{N_{cr}}} = \frac{\lambda}{\lambda_1} \cdot \sqrt{\beta_A}$$

λ – karcsúsági tényező

$$\lambda_1 = \pi \sqrt{\frac{E}{f_y}} = 93,9 \varepsilon; \varepsilon = \sqrt{\frac{235}{f_y}}$$

4.3. Kivetődés hajlítással és csavarással

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{\beta_A \cdot A \cdot f_y}{N_{cr}}} = \sqrt{\frac{f_y}{\sigma_k}} \cdot \sqrt{\beta_A}$$

ahol

$$\sigma_k = \sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A}$$

A P_{cr} –et a 2. pont szerint kell meghatározni.

Következtetések

A nyomott tartók kivetődése hajlítással és csavarással egy komplex folyamat, amelynek az ellenőrzése nagy volumenű számításokat igényel.

A számítások igénylik a keresztmetszet jellemzőinek, valamint a hajlítási és csavarási központok meghatározását.

A BPS nyitott keresztmetszetű tartók kivetődése hajlítással és csavarással történik. Ebben az esetben a kritikus nyomóerők kisebbek, mint az Euler-féle kritikus erők. Még akkor is, amikor a hajlítási és csavarási kivetődési nyomóerő kisebb, mint az Euler-féle kritikus nyomóerő, a kivetődés megtörténhet hajlítás-csavarással abban az esetben, ha a karcsúsági tényező (λ_{cr}) nagyobb, mint a λ_x és λ_y .

Az aszimmetrikus keresztmetszetek esetén a kritikus nyomóerő kisebb, mint P_{xcr} , P_{ycr} , P_{ω} ($P_{cr} < \min [P_{xcr}, P_{ycr}, P_{\omega}]$) így a kivetődés mindig hajlítással és csavarással együtt történik.

A BPS zárt keresztmetszetek esetében, mivel a kritikus nyomóerő P_{ω} nagy, a kivetődés kihajlítással történik, de ebben az esetben is ajánlatos a kivetődés ellenőrzése kihajlásra és csavarásra.

Irodalom

- [1] DALBAN, C., JUNCAN, N., ...: *Construcții metalice*. E.D.P.București, 1983.
- [2] MATEESCU, D., APPELTAUER, I., CUTEANU, E.: *Stabilitatea la compresiune a structurilor din bare de oțel*. Ed. Academiei, București, 1980.
- [3] MOGA, P.: Poduri metalice. Alcătuirea și calculul elementelor. U.T.C.-N., 2000.
- [4] MOGA, P., GUȚIU, Șt.: Poduri metalice. Probleme de stabilitate. U.T.C.-N. 2003.
- [5] *** SR 1911-98. Poduri metalice de cale ferată. Prescripții de proiectare.
- [6] *** STAS 10108 / 0 – 78 Calculul elementelor din oțel.
- [7] *** EUROCODE 1. Part. III. Basis of Design and Actions on Structures. 1993.
- [8] *** EUROCODE 3. Part 1. *Design of Steel Structures*. CNCMET, Doc. No. 91/03.
- [9] *** Seminar on EUROCODE 3. *Design of Steel Structures*. Tempus 4502-92, Timișoara, 1993.
- [10] *** Seminar on EUROCODE 3. Part 1.3. *Cold formed gauge members and sheeting*. Tempus 4502-94, Timișoara, 1995.
- [11] *** EUROCODE 3. *Exemple de calcul*. Tempus Phare Project 01198. 1997.
- [12] *** Normativ privind prescripțiile generale de proiectare. Verificarea prin calcul a elementelor de construcții metalice și a îmbinărilor acestora. Indicativ NP 042-2000. Buletinul construcțiilor vol. 19-20. 2001.