Hibrid végeselem módszer vastag lemezek elemzéséhez

Cucu Liviu, Dr. Gobesz Zsongor,
Turda Dan, Popa Anca, Dr. Marțian Ironim

Kolozsvári Műszaki Egyetem, Románia

Abstract

In the year 2000 it has been started the development of a FEM based computing software package, in order to offer extended research capabilities by using advanced analysis methods and optimization The main targets were 3D grids, tubular structures consisting from concrete walls, shells and thick plates. In this paper the authors present a new hybrid finite element method which is already included in the software package. A new finite element was developed for the analysis of orthotropic plates (based on the theory of thick plates) and served as outline for the development of another threedimensional hybrid strain finite element (suited for the analysis of thick shells – breafly mentioned in this paper). The paper starts with the theory basis, in order to have a proper image of the development of the new hybrid strain finite element, folowed by several testing examples. At the end there are discussed some results for comparison, concluding with some notes about the advantages offered by the use of this new element, and concerning further research.

Keywords: Finite Element Method, Hu-Washizu principle, Hybrid approach, Orthotropic thick plates, Computing model.

1. Bevezető

A végeselemek alkalmazása már rég nem jelent újdonságot, viszont az ilyenszerű elemzések egyik alapvető követelményeként tartják számon a tanulmányozott testek megfelelő felosztását. Némely esetben ez nem lehetséges vagy legalábbis nem kézenfekvő, ilyenkor más eljárásokhoz kéne fordulnia a szakembernek, de ez szemléletváltás mellett bizonyos mértékig lemondásként is felfogható egy immár klasszikussá vált készlet-rendszer felhasználói hagyományáról. Mit tehetünk ilyenkor, hogy „a kecske is jól lakjon és a káposzta is megmaradjon”? Ahhoz, hogy mégis végeselemeket használjunk ilyen különleges esetekben, más jellegű, a szokványostól eltérő tulajdonságokkal felruházott elemi részekre lenne szükségünk. Itt jöhetnek szóba a hibrid végeselem eljárások. Ebben a cikkben elsősorban egy ilyen eljáráshoz szükséges új elem kialakítását és alkalmazását mutatjuk be, vastag lemezek esetében, majd említést teszünk egy új térbeli végeselemről is.

A végeselemek hibrid megfogalmazása alatt tulajdonképpen a Hu-Washizu elv egy sajátos alkalmazását értjük, mely során az elemi elmozdulások mellett a feszültségeket vagy az alakváltozásokat is független változókként kezeljük. Ezeket az értékeket egymástól függetlenül interpoláljuk, de a feszültségeket vagy a deformációkat elemi szinten kizárjuk, így csak az elmozdulások maradnak ismeretlenekként az általános egyenletrendszerben. Ez különbözteti meg a hibrid eljárást a vegyes eljárásoktól, hiszen egy vegyes eljárás esetében az általános egyenletrendszer az összes diszkretizált változót tartalmazná. Az egymástól független változók első csoportját tehát az elmozdulások, míg a második csoportját a feszültségek vagy az alakváltozások alkotják. Ennek megfelelően hibrid-feszültség illetve hibrid-alakváltozás végeselem eljárásról beszélhetünk.

A hibrid-feszültség módszer teljeskörű leírása már a 60-as évek végén megtörtént. A Pian és Tong által javasolt eljárás szerint az elemek belsejében létrejövő feszültségek jellemzéséhez egy függvényhalmaz szükségeltetik. A végeselemek szélein érzékelhető elmozdulások jellemzéséhez pedig egy másik független fügvényhalmazt kell kiválasztani úgy, hogy ez az elmozdulások egységességét (a folytonosságot) is biztosítsa az elemi részek között. Mi olyan hibrid-alakváltozás végeselemek kialakítását tűztük ki célul – Bathe, Cook, Zienkiewicz, Chiesler és Ghali javaslatait, megfigyeléseit követve – melyek a vastag lemezek elméletét szem előtt tartva megefelelnének mind sík, mind ívelt héjak elemzéséhez. Külön köszönettel tartozunk Hrabok úrnak (albertai egyetem), az önzetlen segítségért amit a szerzők kutatómunkájához nyújtott.

2. A végeselemek kialakítása

Mindenek előtt az elméleti háttér főbb jellemzőit kell tisztáznuk. Az újfajta végeselemek kiötlésében elsősorban a szakirodalomra kellett támaszkodnunk. Kiindulásként a Hu-Washizu kifejezés módosításából származó, Pian által közreadott [8] kifejezést használtuk:

$$\Pi_{HW*} = \int_V \left[\left| -\frac{1}{2} \cdot \{\varepsilon\}^T \cdot [D] \cdot \{\varepsilon\} + \{\varepsilon\}^T \cdot ([L] \cdot \{u\}) \right| \right] \cdot dV - \int_V \{b\}^T \cdot \{u\} \cdot dV - \int_{S_t} \{t\}^T \cdot \{u\} \cdot ds \ . \tag{1}$$

A végeselemre jellemző $\{u\}$ elmozdulások interpolálása a $\{q\}$ csomóponti elmozdulások függvényében, az $[N]$ izoparametrikus interpolálási függvények matrixán keresztül történt:

$$\{u\} = [N] \cdot \{q\} \ . \tag{2}$$

Hasonló módon, az $\{\varepsilon\}$ alakváltozások interpolálása egy végeselemre, az általánosított elmozdulások paramétereiből kiindulva történt, a $[P]$ alakváltozás interpolálási mátrixán keresztül:

$$\{\varepsilon\} = [P] \cdot \{\alpha\} \ . \tag{3}$$

Az (1)-es kifejezésbe behelyettesítve a (2)-es és (3)-as egyenleteket, a következő kifejezést kapjuk:

$$\begin{aligned} \Pi_{HW*} = \int_V \left[\left| -\frac{1}{2} \cdot \{\alpha\}^T \cdot [P]^T \cdot [D] \cdot [P] \cdot \{\alpha\} + \{\alpha\}^T \cdot [P]^T \cdot [D] \cdot ([L] \cdot [N]) \cdot \{q\} \right| \right] \cdot dV \\ - \int_V \{b\}^T \cdot [N] \cdot \{q\} \cdot dV - \int_{S_t} \{t\}^T \cdot [N] \cdot \{q\} \cdot ds \ . \end{aligned} \tag{4}$$

A következő jelölésekkel:

$$\int_V [P]^T \cdot [D] \cdot [P] \, dV = [K*] \quad : \text{ általánosított merevségi mátrix,} \tag{5}$$

$$\int_V [P]^T \cdot [D] \cdot ([L] \cdot [N]) = [G] \quad : \text{ átalakítási mátrix,} \tag{6}$$

$$\int_V [N]^T \cdot \{b\} \cdot dV + \int_{S_t} [N]^T \cdot \{t\} \cdot ds = \{F\} \quad : \text{ terhelések mátrixa,} \tag{7}$$

a (4)-es függvénykifejezés a így írható:

$$\Pi_{HW*} = -\frac{1}{2} \cdot \{\alpha\}^T \cdot [K*] \cdot \{\alpha\} + \{\alpha\}^T \cdot [G] \cdot \{q\} - \{q\}^T \cdot \{F\} \ . \tag{8}$$

E kifejezés $\{q\}$-tól és $\{\alpha\}$-tól való függősége az alábbi mátrixegyenlethez vezet:

$$\begin{bmatrix} 0 & G^T \\ G & -K^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q \\ \alpha \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{9}$$

A $[K*]$ meghatározott jellege miatt, $\{\alpha\}$-t egy szokványos fordított Gauß-féle eljárással kiküszöbölhetjük, és így a végeselem $[K]$ merevségi mátrixa a következő lesz:

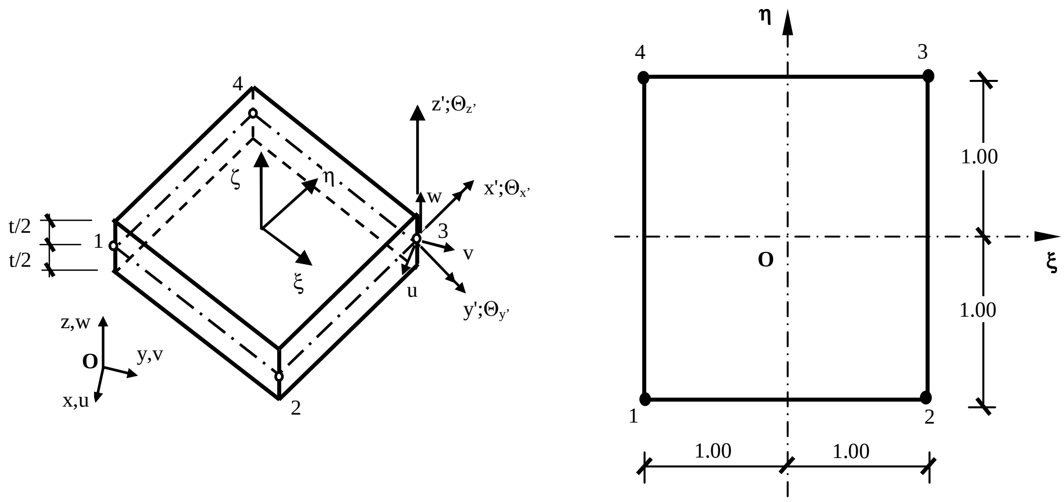
$$[K] = [G]^T \cdot [K*]^{-1} \cdot [G] \ . \tag{10}$$

A $\{q\}$-nak megfelelő általános megoldás után, a feszültségeket a következő kifejezéssel számíthatjuk ki:

$$\{\sigma\} = [D] \cdot [P] \cdot \left([G]^T \cdot [K*]^{-1} \right)^T \cdot \{q\} \ . \tag{11}$$

A fenti lépéseket követve két, egyenként 24 szabadsági fokkal rendelkező végeselemet alakítottunk ki: egy kétdimenziós elemet 4 csomóponttal (6 szabadsági fokkal mindegyik csomóponton) melyet HYBFLAT-nek kereszteltünk, illetve egy háromdimenziós elemet 8 csomóponttal (3 szabadsági fokkal mindegyik csomóponton) melyet HYBRICK-nek kereszteltünk. A következőkben a HYBFLAT-nek keresztelt sík végeselemet mutatjuk be röviden, utána egy pár szót ejtve az új háromdimenziós elemről is.

2.1. Az új kétdimenziós HYBFLAT végeselem



1. ábra
A „HYBFLAT" végeselem

A következő alakfüggvényeket alkalmaztuk ebben az esetben:

$$N_i = \frac{1}{4} \cdot \left(1 + \xi \cdot \xi_i\right) \cdot \left(1 + \eta \cdot \eta_i\right) \text{, ahol } \xi_i, \eta_i = \pm 1 \tag{12}$$

A végeselemen létrejövő $\{u\}$ elmozdulásokat a $\{q\}$ csomóponti elmozdulásoktól függő izoparametrikus interpolálási függvények $[N]$ mátrixával számíthatjuk ki:

$$\underset{(3x1)}{[u]} = \underset{(3x24)}{[N]} \cdot \underset{(24x1)}{[q]} \tag{13.a}$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccccc|c|cccccc} N_1 & \cdot & \cdot & -A_1 \cdot l_2 & A_1 \cdot l_1 & A_1 \cdot l_3 & \cdots & N_4 & \cdot & \cdot & -A_4 \cdot l_2 & A_4 \cdot l_1 & A_4 \cdot l_3 \\ \cdot & N_1 & \cdot & -A_1 \cdot m_2 & A_1 \cdot m_1 & A_1 \cdot m_3 & \cdots & \cdot & N_4 & \cdot & -A_4 \cdot m_2 & A_4 \cdot m_1 & A_4 \cdot m_3 \\ \cdot & \cdot & N_1 & -A_1 \cdot n_2 & A_1 \cdot n_1 & A_1 \cdot n_3 & \cdots & \cdot & \cdot & N_4 & -A_4 \cdot n_2 & A_4 \cdot n_1 & A_4 \cdot n_3 \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \Theta_{x_1} \\ \Theta_{y_1} \\ \Theta_{z_1} \\ \hline \cdots \\ \hline u_4 \\ v_4 \\ w_4 \\ \Theta_{x_4} \\ \Theta_{y_4} \\ \Theta_{z_4} \end{bmatrix} \tag{13.b}$$

a fenti kifejezésben:

$$A_1 = N_1 \cdot t \cdot \frac{\zeta}{2}; \quad A_2 = N_2 \cdot t \cdot \frac{\zeta}{2}; \quad A_3 = N_3 \cdot t \cdot \frac{\zeta}{2}; \quad A_4 = N_4 \cdot t \cdot \frac{\zeta}{2} \quad . \tag{14}$$

Hasonló módon interpolálhatjuk a $\{\varepsilon'\}$ alakváltozásokat, a $[P']$ mátrix segítségével:

$$\underset{(6x1)}{[\varepsilon']} = \underset{(6x18)}{[P']} \cdot \underset{(18x1)}{[\alpha]} \tag{15.a}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_\xi \\ \varepsilon_\eta \\ \varepsilon_\zeta \\ \gamma_{\xi\eta} \\ \gamma_{\eta\zeta} \\ \gamma_{\zeta\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \eta & \zeta & \eta\cdot\zeta & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \xi & \zeta & \xi\cdot\zeta & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \xi & \eta & \xi\cdot\zeta & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \zeta & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \xi & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \eta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \dots \\ \alpha_{16} \\ \alpha_{17} \\ \alpha_{18} \end{bmatrix} \tag{15.b}$$

A Cook [5] által meghatározott $[T_\sigma]$ mátrix segítségével transzponálhatjuk az alakváltozásokat a globális rendszerbe:

$$\underset{(6x1)}{[\varepsilon]} = \underset{(6x6)}{[T_\sigma]^T} \cdot \underset{(6x1)}{[\varepsilon']}. \tag{16}$$

Az anyag alkotómátrixaként ortotróp anyagra jellemzőt választottunk:

$$\underset{(6\times6)}{[D']} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & 0 & 0 & 0 \\ e_{12} & e_{11} & e_{13} & 0 & 0 & 0 \\ e_{13} & e_{13} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{13} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_{33} \end{bmatrix} \tag{17}$$

Az alkotómátrix globális koordinátákba való leírásához a következő átalakításokat végeztük:

$$\underset{(6\times6)}{[D]} = \underset{(6\times6)}{[T_\varepsilon]^T} \cdot \underset{(6\times6)}{[D']} \cdot \underset{(6\times6)}{[T_\varepsilon]} , \tag{18}$$

ahol $[T_\varepsilon]$ a már említett, Cook [5] nevéhez fűződő transzponálási mátrix.

A végeselem merevségi mátrixához, melyet a következő kifejezéssel kaphatunk meg:

$$\underset{(24\times24)}{[K]} = \underset{(24\times18)}{[G]^T} \cdot \underset{(18\times18)}{[K^*]^{-1}} \cdot \underset{(18\times24)}{[G]} , \tag{19}$$

a következő két mátrixot kellett Gauß-féle numerikus integrálással meghatároznunk:

i) az általánosított merevségi mátrixot:

$$\underset{(18\times18)}{[K^*]} = \int_V \underset{(18\times6)}{[P]^T} \cdot \underset{(6\times6)}{[D]} \cdot \underset{(6\times18)}{[P]} \cdot dV \quad , \tag{20}$$

ii) az átalakítási mátrixot:

$$\underset{(18\times24)}{[G]} = \int_V \underset{(18\times6)}{[P]^T} \cdot \underset{(6\times6)}{[D]} \cdot \left(\underset{(6\times3)}{[L]} \cdot \underset{(3\times24)}{[N]} \right) \cdot dV \quad , \tag{21}$$

ahol $[L]$ jelölte az alakváltozások kiszámításához szükséges differenciális operátort, melynek alakja a következő:

$$\underset{(6\times1)}{[L]} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{\partial}{\partial y} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & \cdot \\ \cdot & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \cdot & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{22}$$

A globális merevségi mátrix megszerkesztése és a $\{q\}$ csomóponti elmozdulásoknak megfelelő általános megoldások értékmeghatározása után a következő, végeselem eljárásokban használatos és immár klasszikus egyenletet írhatjuk:

$$[K] \cdot \{q\} = \{F\} \quad , \tag{23}$$

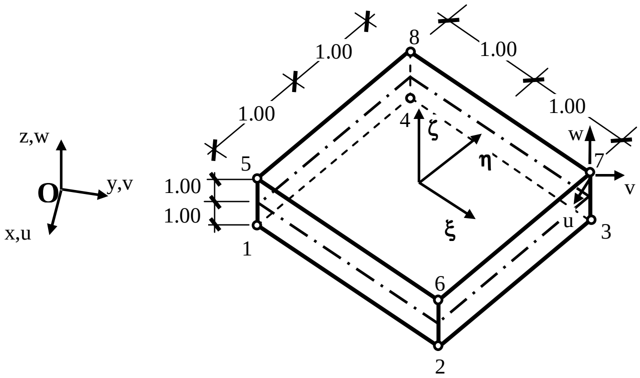
ahol

$$\{F\} = \int_V \underset{(24x3)}{[N]^T} \cdot \{b\} \cdot dV + \int_{S_t} \underset{(24x3)}{[N]^T} \cdot \{t\} \cdot ds \tag{24}$$

a csomóponti terhelések sora. Így a végeselemekben keletkező feszültségeket a következőképpen kaphatjuk meg:

$$\underset{(6\times1)}{\{\sigma\}} = \underset{(6\times6)}{[D]} \cdot \underset{(6\times18)}{[P]} \cdot \left(\underset{(24\times18)}{[G]}^T \cdot \underset{(18\times18)}{[K*]^{-1}} \right)^T \cdot \underset{(24\times1)}{\{q\}} \quad . \tag{25}$$

2.2. Az új háromdimenziós végeselem (HYBBRICK)



2. ábra
A „HYBBRICK” végeselem

Ezt a végeselemet tulajdonképpen az előbb bemutatott módszerrel alakítottuk ki, a következő módosításokat eszközölve a kétdimenziós elemhez képest:

i) Bevezettünk egy harmadik (ζ) koordinátát a már létező kettő (ξ és η) mellé, így az interpolálási függvények a következőképp alakultak:

$$N_i = \frac{1}{4} \cdot (1+\xi\,\xi_i) \cdot (1+\eta\,\eta_i) \cdot (1+\zeta\,\zeta_i); \qquad \xi_i, \eta_i, \zeta_i = \pm 1 \tag{26}$$

ii) Nyolc csomópontot vettünk figyelembe (mindegyik oldal sarkában egyet-egyet).

iii) Csak a három (u, v, w) tengelyirányú elmozdulást vettük figyelembe a globális koordináta rendszerből szabadsági fokként, elhanyagolva a három tengelykörüli elfordulást.

iv) Az interpolálási függvények mátrixa megváltozott:

$$\underset{(3x24)}{[N]} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|c|ccc|ccc} N_1 & \cdot & \cdot & N_2 & \cdot & \cdot & N_3 & \cdot & \cdot & \cdots & N_7 & \cdot & \cdot & N_8 & \cdot & \cdot \\ \cdot & N_1 & \cdot & \cdot & N_2 & \cdot & \cdot & N_3 & \cdot & \cdots & \cdot & N_7 & \cdot & \cdot & N_8 & \cdot \\ \cdot & \cdot & N_1 & \cdot & \cdot & N_2 & \cdot & \cdot & N_3 & \cdots & \cdot & \cdot & N_7 & \cdot & \cdot & N_8 \end{array}\right], \tag{27}$$

így az elmozdulások interpolálása a következő egyenlet segítségével volt végre hajtható:

$$\underset{(3x1)}{[u]} = \underset{(3x24)}{[N]} \cdot \underset{(24x1)}{[q]} , \tag{28}$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|c|ccc|ccc} N_1 & \cdot & \cdot & N_2 & \cdot & \cdot & N_3 & \cdot & \cdot & \cdots & N_7 & \cdot & \cdot & N_8 & \cdot & \cdot \\ \cdot & N_1 & \cdot & \cdot & N_2 & \cdot & \cdot & N_3 & \cdot & \cdots & \cdot & N_7 & \cdot & \cdot & N_8 & \cdot \\ \cdot & \cdot & N_1 & \cdot & \cdot & N_2 & \cdot & \cdot & N_3 & \cdots & \cdot & \cdot & N_7 & \cdot & \cdot & N_8 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \hline u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ \hline \cdots \\ \hline u_8 \\ v_8 \\ w_8 \end{array}\right] \tag{29}$$

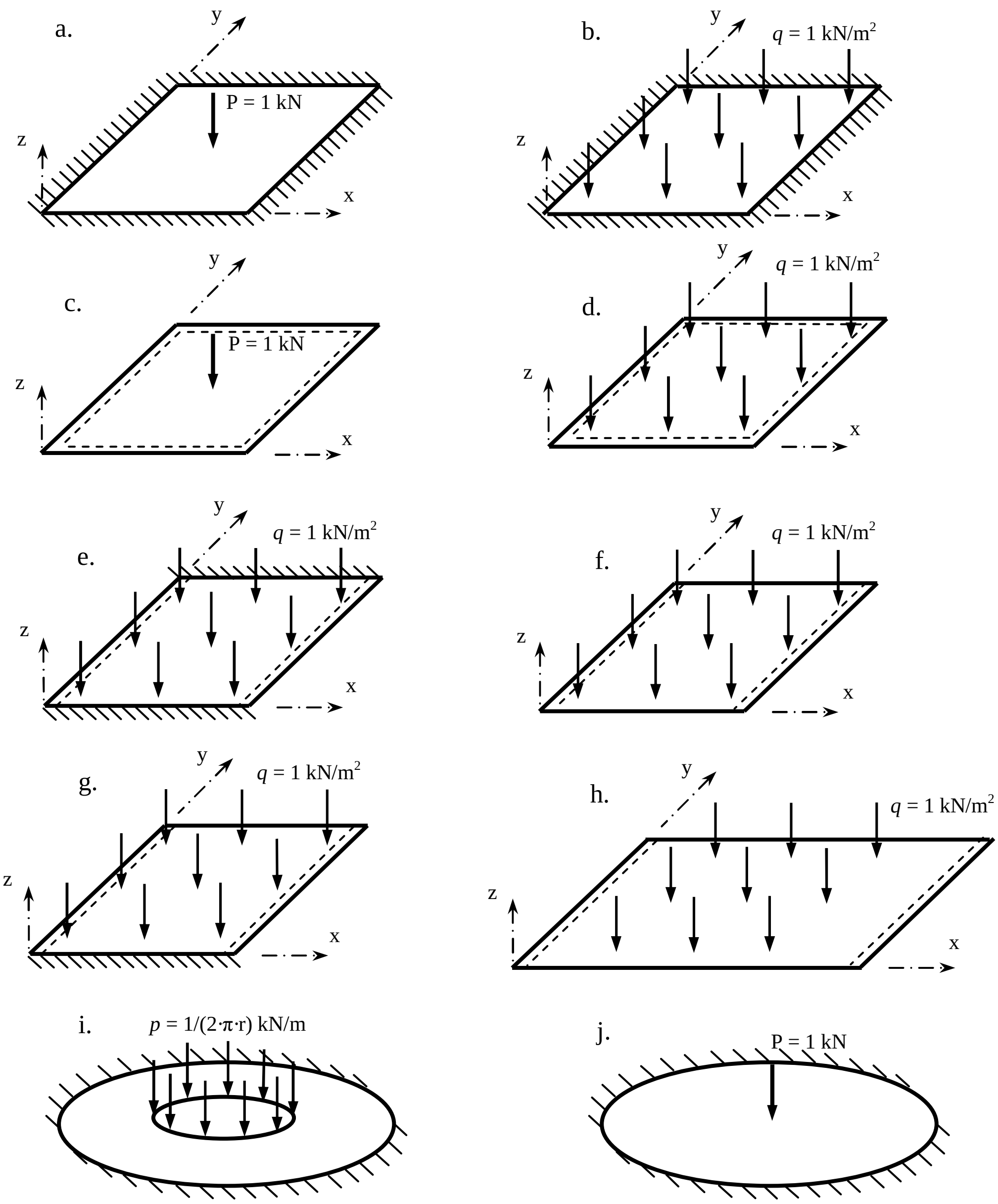
Ami a végeselem merevségi mátrixát, az egész szerkezetnek megfelelő mátrix szerkesztését, a rendszer megoldását, az elmozdulások visszanyerését, majd a feszültségek és erők kiszámítását illeti, mivel a mátrixok méretei nem változtak (24 szabadsági fok maradt minden egyes elemre), csak a numerikus integrálás folyamatában állt be lényegesebb változás a harmadik koordináta bevezetése miatt.

3. Ellenőrzéshez használt példák

Az egyik leglényegesebb lépés új végeselemek kialakításában a gyakorlati tesztelés, hiszen megfelelő eredmények hiányában csak kérdéses elméleti fejtegetésről beszélhetnénk. Csak a teszteredmények igazolhatják vagy cáfolhatják az új modell értelmét és életképességét. Ebből kifolyólag két nagyobb feladatkörben, síkban és térben végeztünk próbaszámításokat az új elemekkel, különös figyelmet fordítva a már ismert eredményekhez viszonyított eltérésekre. E cikk alapjául szolgáló HYBFLAT elemet sík példák segítségével teszteltük, míg a továbbfejlesztés eredményeként kialakított új háromdimenziós elem esetében természetesen térbeli feladatokhoz folyamodtunk.

3.1. Sík teszt-feladatok

Bár nagyon sok ellenőrző számítást végeztünk a bemutatott két végeselemmel, e cikk keretében csak egy pár alapvető példát említünk, ezek a 3. ábrán láthatók.



3. ábra
Sík teszt-feladatok

Az első hét feladat 2000x2000x100(40) *mm*-es négyszögű acéllemezre vonatkozik. Két esetben (*a* és *c*), a lemez síkjára merőleges *P* = 1 *kN* pontszerű terheléssel, a többi esetben *q* = 1 kN/m^2 egyenletesen megoszló teherrel számoltunk. Az első négy példánál, a főtengelyekhez viszonyítva szimmetrikus oldakötéseket (merev befogást illetve egyszerű támaszt) alkalmaztunk. A két következőnél csak egy tengelyhez viszonyítva szimmetrikus, míg a hetediknél egy nem szimmetrikus kombinációt (két oldalon egyszerű támasz, egy oldalon merev befogás, a negyedik oldal szabad) alkalmaztunk.

A nyolcadik feladatnál egy 4000x2000x100 *mm*-es acéllemezt vizsgáltunk, egyszerű támasszal a rövidebb széleken és szabad hosszú szélekkel, a lemez síkjára merőleges egyenletesen megoszló *q* = 1 kN/m^2 terheléssel.

A kilencedik példát egy *t* = 250 *mm* vastag, *R* = 2000 *mm*-es külső sugarú lapos, gyűrű alakú lemez alkotta, merev befogással a külső szélén és egyenletesen megoszló, a lemez síkjára merőleges terheléssel a belső szélén. Ezt a feladatot öt változatban tanulmányoztuk, a külső *R* és belső *r* sugár következő hányadosaival: *R/r* = 2,3,4 és 5.

Az utolsó példa egy *t* = 250 *mm* vastag, *R* = 2000 *mm* sugarú, a szélén mereven befogott sík körlemez, egy a lemez síkjára merőleges P = 1 kN pontszerű terheléssel középen.

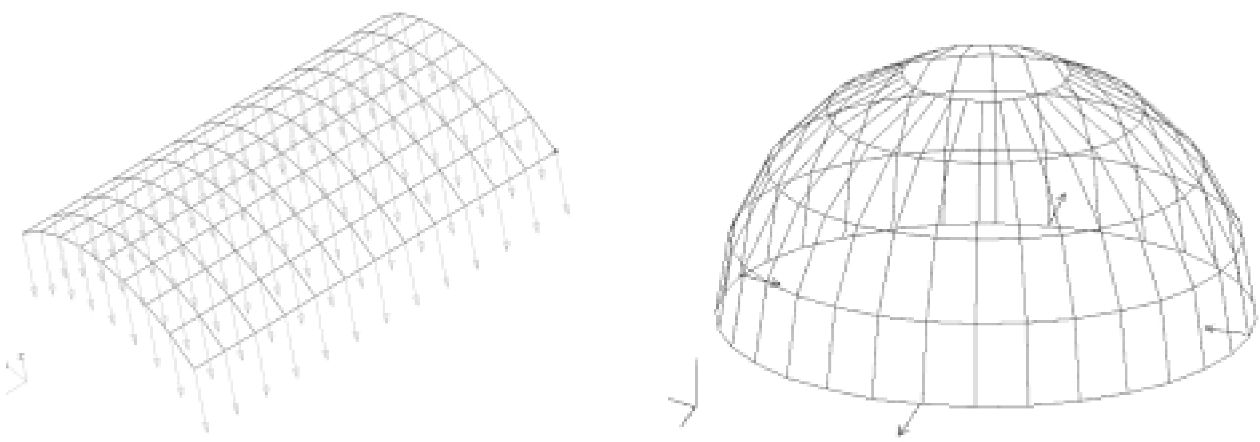
3.2. Térbeli teszt-feladatok

A háromdimenziós feladatok közül a leglényegesebbek a 4. ábrában bemutatott klasszikus példák. Ezek közül az első egy ívelt alátámasztású, önsúllyal terhelt cilindrikus héjszerkezet, mellyel elég gyakran találkoztunk a szakirodalomban. Több kutató foglalkozott ilyen szerkezet elemzésével, elég ha csak egy néhányról teszünk említést: A. C. Scordelis és K. S. Lo (1964-ben, sokan „Scordelis-Lo"-tetőnek is nevezik ezért ezt a szerkezetet), H. Tottenham és C. Brebbia (1971-ben), R. Cook (1974-ben), R. H. MacNeal és R. C. Hardner (1985-ben), illetve O. C. Zienkiewicz és R. Taylor (1991-ben). Az általunk is elemzett héjszerkezet (4.a. ábra) főbb jellemzői a következők voltak:

i) Méretek: R = 7,62 *m*-es sugár; $\alpha = 2{\cdot}40^{o} = 80^{o}$ a nyílásszög; L = 15,24 *m*-es hossz; t = 7,62 *cm*-es héjvastagság.
ii) Anyagjellemzők: Young-féle rugalmassági modulusz: $E = 2{,}1092{\cdot}10^{7}$ kN/m^2; Poisson-féle együttható: $\mu = 0$.
iii) Az önsúlyból származó terhelés értéke: q = 4,394 kN/m^2.

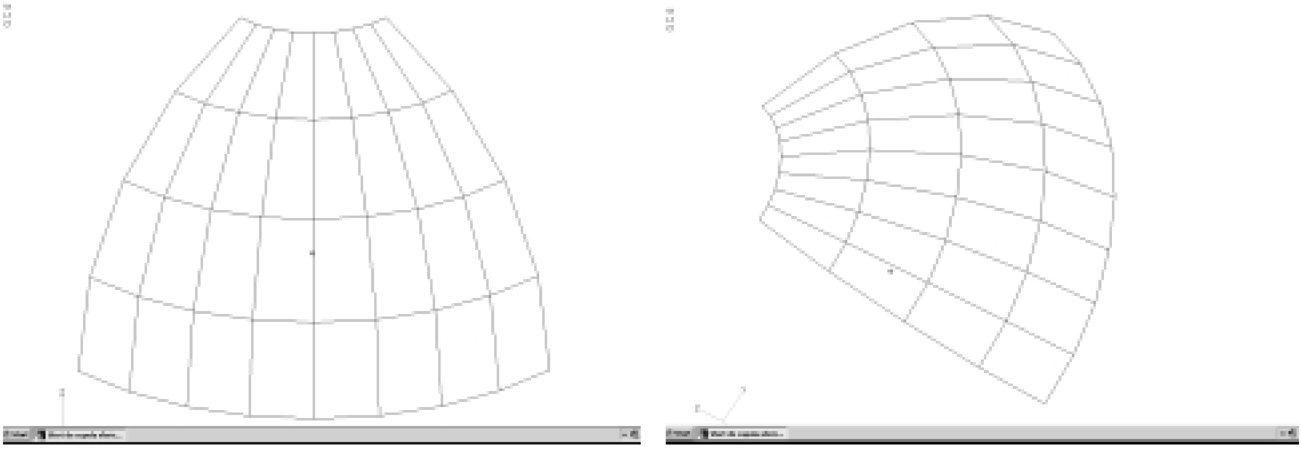
A második példát (4.b. ábra) először R. H. MacNeal és R. C. Hardner javasolta 1985-ben háromdimenziós szerkezetelemző eljárások tesztelésére, de többek között O. C. Zinkiewicz és R. Taylor is elemezte 1991-ben. Ez a szerkezet egy félgömbszerű kupola alakú héjszerkezet, a következő jellemzőkkel:

i) Méretek: R = 10,0 *m*-es sugár; $\alpha = 18^{o}$-os nyílásszögű körüreg a kupola tetején; t = 4,0 *cm*-es héjvastagság.
ii) Anyagjellemzők: Young-féle rugalmassági modulusz: $E = 6{,}825{\cdot}10^{7}$ kN/m^2; Poisson-féle együttható: $\mu = 0{,}3$.
iii) Terhelés: négy pontszerű egységnyi erő az alapkör kardinális pontjaiban, a két szimmetriatengely irányában.



4. ábra
3D teszt példák
a. – „Scordelis-Lo"-féle tetőszerkezet; b. – Hemiszférikus héjszerkezet

A fent említett példákon kívül más térbeli szerkezeteket is tanulmányoztunk az új háromdimenziós végeselem segítségével, mint például az 5. ábrán látható negyed félgömbkupolametszet alakú héjburkolat, különféle terhelésekkel.

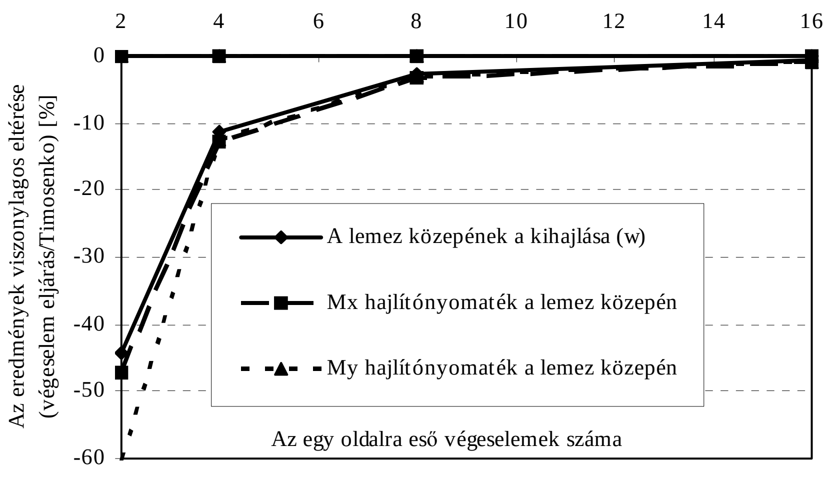


5. ábra
Képernyő részletek egy gömbtrapéz héjburkolat modellezéséről

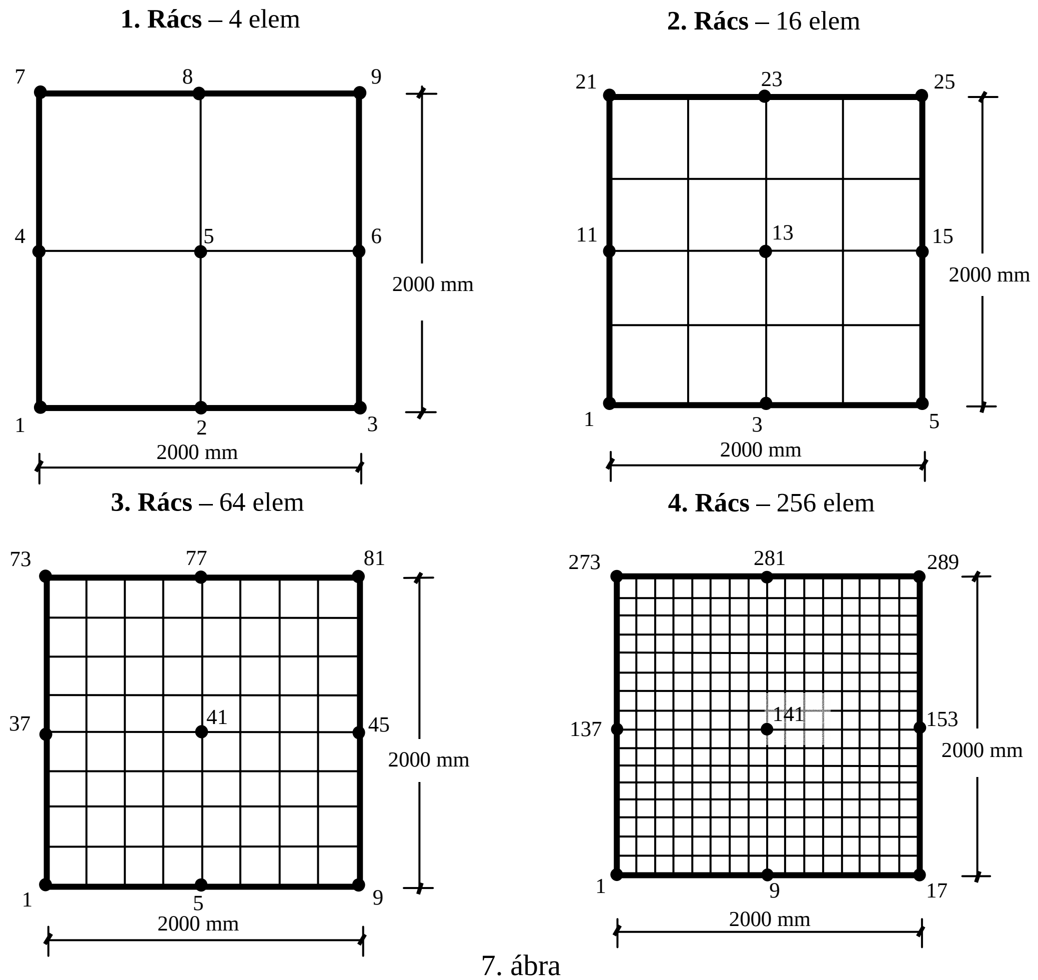
4. Eredmények és észrevételek

Mint a cikk elején már említettük, elsősorban az új síkelemre vonatkozó adatokat kívántuk közzétenni. Az említett feladatkörökben elért eredményeket áttekintve (természetesen nemcsak az említett példákból, hanem más szerkezetek elemzéséből is) a következő tanulságokat és észrevételeket állapítottuk meg:

i). A bemutatott új végeselem alkalmazásából eredő hibrid alakváltozásos eljárás során kapott eredmények nagyon közel álnak, sőt egyes esetekben egybeesőek az analítikus eljárások által nyújtott értékekkel a szakirodalomból [9], [10], ha az optimális felosztás követelményeit betartjuk. A 6. ábrán jól követhető az eredmények viszonylagos százalékos eltérése (a HYBFLAT végeselem használatával a 3. ábrán bemutatott „f” példa esetében,) a Timosenko által leírt megoldástól. Hasonló eltéréseket kaptunk a többi teszt-feladat esetében is. Észrevehető, hogy a hibaszázalék, a végeselemek számának a növekedésével természetesen csökken. A felső vízszintes tengelyen az egy oldal menti végeselemek számát jelöltük, ezek az értékek a 7. ábrán látható diszkretizálási alakzatokból származnak (4 elem esetében az egyoldalra esők száma 2, míg 16 elem esetében 4, 64 elem esetében 8, és 256 elem esetében 16).



6. ábra
Az eredmények hibaszázalékának alakulása a diszkretizálás függvényében
(a 3. ábrán bemutatott „f.” példánál alkalmazott HYBFLAT elem esetében)

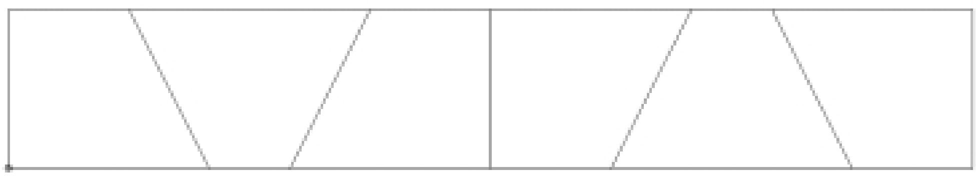


7. ábra
Az első hét példa sík acéllemezénél használt rácsozatok.

ii.) Az eredmények pontossága és értékelhetősége megfelel a mérnöki gyakorlatnak, még akkor is, ha nem szokványos felosztással olyan végeselem alakzatokat képzünk, amelyek nem felelnek meg az optimális követelményeknek (például: alakjuk eltér a négyzettől; a széleik aránya nagyobb mint 1,5 ÷ 2; éles vagy lapos szögeket alkotnak a sarkaik; méreteik hirtelen változnak, nem fokozatosan; nincsen sűrítés/finomítás az érzékenyebb részeken stb.). Az új végeselem tesztelése során különleges felosztásokat is tanulmányoztunk, hiszen ilyen esetekben mutatkozik meg a hibrid eljárások sajátos előnye a szokványos végeselem eljárásokkal szemben. Ezekből a már-már furcsa diszkretizálásokból látható néhány a 8. és 9. ábrán.

iii.) A bemutatott új végeselemek alkalmazhatósága elég széleskörűnek és megbízhatónak bizonyult, valós eredményekhez vezetve még kis számú, különféleképpen befogott csomópontok esetében is.

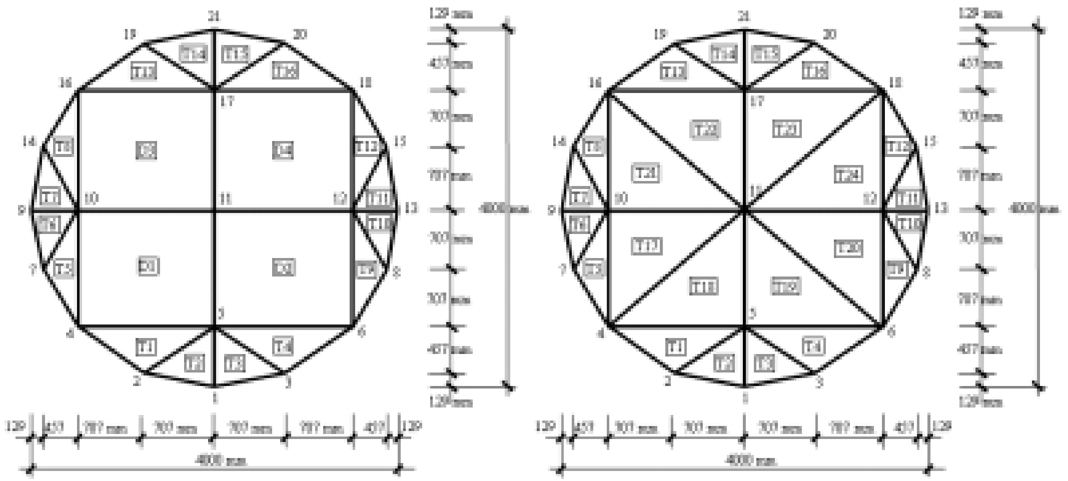
iv.) A hagyományos, elmozdulásokra alapozott szerkezetelemző programokhoz képest, azonos diszkretizálás esetében ez az új végeselem pontosabb eredményekhez vezet a feszültségek és erők értékét illetően.



8. ábra
Síklemez konzolban, szokatlan felosztással (a HYBFLAT elem tesztelése során).

1. Rács:
– 16 háromszög (T)
– 4 négyzet (D)

2. Rács:
– 24 háromszög (T)

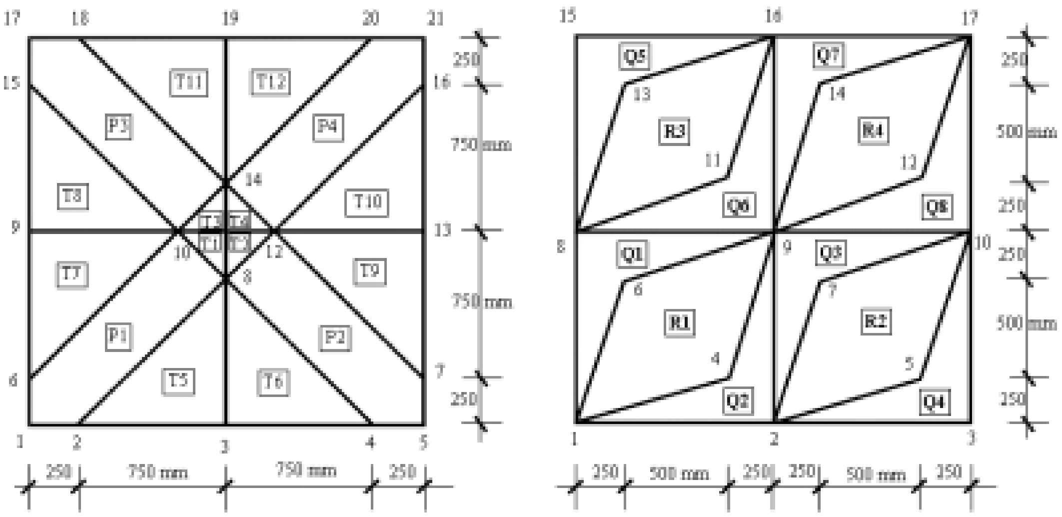


9. ábra
Sík körlemezek szokatlan felosztással (a HYBFLAT elem tesztelése során)

Ami a további kutatásainkat illeti, a bemutatott végeselemet és az utána kifejlesztett háromdimenziós elemet más szokatlan rácsozással is tesztelni kívánjuk, hogy a modell stabilitásáról és érzékenységéről teljesebb képet kaphassunk. A 10. és 11. ábrán látható néhány ilyen jellegű rácsozat, a HYBFLAT sík elem további tanulmányozásához (a 3. fejezetben említett első hét példában szereplő acéllemez esetében). Ezeket a felosztásokat Hrabok és Hrudey tanulmányozta az általuk kialakított HYBSLAB végeselemmel [11], [12].

1. Rács:
– 12 háromszög (T)
– 4 ötszög (P)

2. Rács:
– 8 konkáv négyszög (Q)
– 4 rombusz (R)



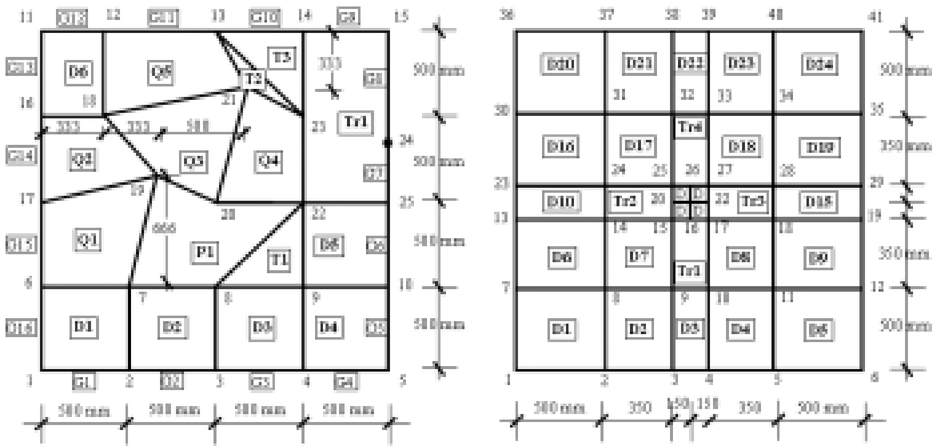
10. ábra
Szokatlan rácsozatok egy négyzet alakú acéllemez esetében

3. Rács:

– 3 háromszög (T)
– 6 rendhagyó négyszög (D)
– 5 négyszög (Q)
– 1 tranzitív négyszög (Tr)
– 1 ötszög (P)
– 16 rúd (G)

4. Rács:

– 24 négyszög (D)
– 4 tranzitív négyszög (Tr)



11. ábra
További szokatlan rácsozatok egy négyzet alakú acéllemez esetében

Befejezésképpen kijelenthetjük, hogy ez az új végeselem a hibrid alakváltozás módszerének alkalmazásával megfelelt az elvárásainknak. Ha az új háromdimenziós végeselemet is figyelembe vesszük, akkor eddigi tapasztalatunk szerint megfelelő eszköztárat kaptunk mind a sík lemezeknek, mind a térbeli ívelt héjaknak a vastag lemezek elméletére alapozott elemzéséhez. A bemutatott HYBFLAT sík elem alkalmazható egyaránt tervezési és kutatási folyamatokban, ugyanakkor a bemutatott eljárások kiindulásként szolgálhatnak más végeselemek vagy szerkezetelemző módszerek kifejlesztéséhez is.

5. Felhasznált szakirodalom

[1] Washizu, K., Variational Methods in Elasticity and Plasticity; 2nd Edn., Pergamon Press, New York, 1975.

[2] Pian, T. H. H., Tong, P., Basis of Finite Element Methods for Solid Continua, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 1, No. 1, 1969 (3.-28. oldal).

[3] Tong, P., Pian, T. H. H., A Variational Principle and the Convergence of a Finite Element Model Based on Assumed Stress Distributions, International Journal of Solids and Structures, Vol. 5, No. 5, 1969 (463.-472. oldal).

[4] Bathe, K. J., Finite Element Procedures, Prentice-Hall, New Jersey, 1996 (437.-449. oldal).

[5] COOK, R. D., Concepts and Applications of Finite Element Analysis, John Wiley, New York, 1974 (191.-220. oldal).

[6] Zienkiewicz, O. C., The Finite Element Method; Fourth Edn., McGraw-Hill, London, 1989 (103.-183. oldal).

[7] Chieslar, J. D., Ghali, A., A Hybrid Strain Technique for Finite Element Analysis of Plates and Shells, Computers and Structures, Vol. 24, No.5, 1986 (749.-765. oldal).

[8] Pian, T. H. H., Derivation of Element Stiffness Matrices by Assumed Stress Distribution, AAIA J. 2, 1964 (1333.-1336. oldal).

[9] Timoshenko, S. P., Woinowsky-Krieger, S., Theory of Plates and Shells; 2nd Edn., McGraw-Hill, New York, 1968 (5., 6., 9., 11., 15. és 16 fejezet).

[10] Marțian, I., Teoria elasticității şi plasticității pentru constructori, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca, 1999 (345.-384. oldal).

[11] Hrabok, M. M., Hrudey, T. M., Stiffened Plate Analysis by the Hybrid Stress Finite Element Method, Structural Engineering Report, No.100, Department of Civil Engineering, University of Alberta, Edmonton-Alberta, 1981.

[12] Hrabok, M. M., Hrudey, T. M., “HYBSLAB” – A Finite Element Program for Stiffened Plate Analysis (User's Manual), Structural Engineering Report, No.101, Department of Civil Engineering, University of Alberta, Edmonton-Alberta, 1981.

[13] Turda, D. V., et alii, A New Finite Element Analysis System, Acta Technica Napocensis, section: Civil Engineering – Architecture, No. 45, Technical University of Cluj-Napoca, 2002 (51.-56. oldal).

[14] Cucu, H. L., et alii, Two New Hybrid Finite Elements for Thick Plates and Shells, Proceedings of the International Conference “Construction 2003”, Technical University of Cluj-Napoca, 2003 (103.-112. oldal).