Mechanizmusok vegyes dinamikájának elemzése

Antonya Csaba
Transilvania Egyetem, Anyagismeret Kar, Brassó

1. Bevezetés

Komplex mechanizmusok kinematikai és dinamikai mozgásviszonyainak elemzése nélkülözhetetlen a terméktervezés első szakaszaiban. Már egyszerű modellek esetében a rendszer mozgásegyenletei nagyon bonyolultak. Ennek felírása és megoldása klasszikus módszerekkel, nagyobb bonyolultságú rendszerek esetén, lehetetlen. Az elmúlt évtizedekben a többtest-rendszerű eljárások kerültek előtérbe, amelyek alkalmasak olyan számítógépes kód létrehozására, amely automatikusan felírja és megoldja a rendszer mozgásegyenleteit. Ezek a többtest rendszerű programok (mint például ADAMS, DYMES, Working Model, DADS, Mesa Verde, Simpack, Autosim) Lagrange, Newton-Euler, Kane vagy Hamilton egyenletek megoldására épültek.

Egy vagy több szabadságfokos mechanizmusok elemzése során a következő esetekkel találkozhatunk:

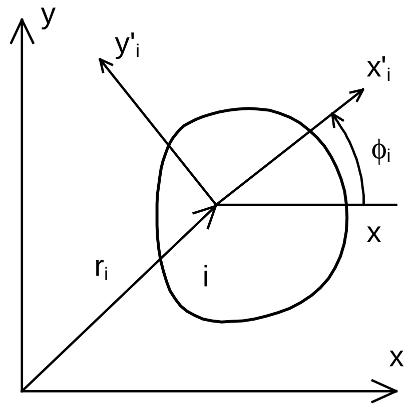
- *Mozgástani elemzés* (kinematika): ebben az esetben a szabadságfokkal megegyező számú irányító mozgás időbeni változását – forgást vagy egyenes vonalú mozgást – kell megadni. A mechanizmusok elemeinek tömegét, valamint a ható erőket nem kell ismerni, csak az elemek közötti csatlakozások helyét.
- *Dinamikai elemzés*: a mechanizmusokra ható erők eredményeként keletkezett mozgásviszonyok tanulmányozására. Ebben az esetben valamennyi hatóerőt ismerni kell, valamint a testek tömegét és tehetetlenségi nyomatékát.
- *Fordított dinamikai* elemzés: a kinematikai és dinamikai elemzés keveréke. Mozgástanilag a többtest rendszer meghatározott, csak nem ismertek mind azok az erők, amelyek a megadott mozgást előidézik. Ebben az esetben a kért adatok: a szabadságfokoknak megfelelő számú (irányító) mozgás, a testek tömege és az ismert hatóerők.

Több szabadságfokú mechanizmus esetén fennáll az az eset, amikor nem ismert az összes testre ható erő, de néhány test mozgása adott. Ezeket az elemzéseket vegyes dinamikai elemzésnek nevezzük.

E dolgozat célja a vegyes dinamikai elemzések egy új partícionálási módszerének bemutatása Newton-Euler egyenletekkel, abban az esetben, ha az ismert mozgások száma megegyezik az ismeretlen erők számával.

2. Kinematikai elemzés

A mechanizmust alkotó merev testek mozgásviszonyait egy külső ponthoz kötött globális koordinátarendszerben kell tanulmányozni. A testekhez rendelt lokális koordinátarendszerek helyzete, sebessége és gyorsulása fogja megadni a mechanizmus mozgásviszonyait. A lokális koordináta rendszer helyzetének megválasztása tetszőleges, de dinamikai elemzéseknél ajánlott a tömegközéppontot választani.



1. ábra

Az *i* testhez hozzárendelt koordinátarendszer az x'_i-y'_i (1. ábra). Tehát ennek a testnek a helyzetét meg fogja határozni a lokális koordinátarendszer origójának helyzetvektora, a globális koordinátarendszerben kifejezve: $r_i=[x, y]^T_i$,valamint a lokális koordináta rendszer dőlésszöge (ϕ_i) a globálishoz viszonyítva. Az *i* testre jellemző általánosított koordinátáknak a globális koordinátarendszerben a következő vektor felel meg:

$$q_i = [x, y, \phi]^{iT}; \qquad (1)$$

Ha a mechanizmus *nb* merevtestből áll, akkor az egész többtest rendszert *nc* általánosított koordináta írja le, ahol:

$$nc = 3 \text{ x } nb \qquad (2)$$

A mechanizmusra jellemző általánosított koordinátáknak a következő vektor felel meg:

$$q = [q_1^T, q_2^T \ldots q_{nb}^T\ ]^T \qquad (3)$$

Mivel a merev testek csatlakoznak egymáshoz, a koordináták között egyenletek írhatók fel. Például csuklós vagy csúszós kapcsolatok esetén két egyenlet, két test közötti távolsági restrikció esetén egy egyenlet írható fel. Az egész mechanizmusra *nh* egyenlet írható fel, ami nem függ az időtől, kifejezi a testek közötti kapcsolatot és a következő képpen írható mátrixos formában:

$$\Phi^K(q) = [\Phi_1^K(q), \Phi_2^K(q), \ldots \Phi_{nh}^K(q)] = 0 \quad (4)$$

Mivel az általánosított koordináták (*nc*) száma nagyobb mint az egyenletek száma (*nh*), az egyenletrendszert nem lehet megoldani. A kettő közötti különbség adja meg a mechanizmus szabadságfokának számát, tehát az irányító mozgások számát is. Az irányító mozgásokat matematikailag az általánosított koordináták közötti összefüggésként lehet felírni. Ezek az egyenletek függnek az időtől, alakjuk a következő:

$$\Phi^D(q, t) = [\Phi_1^D(q, t), \Phi_2^D(q, t) \ldots \Phi_{nc-nh}^D(q, t)] \quad (5)$$

A (4) és (5) egyenletrendszer együtt, *nc* egyenletből álló, *nc* ismeretlennel rendelkező egyenletrendszert alkot:

$$\Phi(q,t) = \begin{bmatrix} \Phi^K(q) \\ \Phi^D(q,t) \end{bmatrix}_{nc\times 1} = 0 \quad (6)$$

Ennek a rendszernek a megoldása adja meg a mechanizmus elemeinek helyzetviszonyát és annak időbeli változását. A megoldás csak numerikusan végezhető el, például a Newton-Raphson féle eljárással.

Mivel a helyzetviszonyok időbeni változásának matematikai formája nem kapható meg a (6)-os egyenlet megoldásával, az egyenletrendszert deriválni kell a sebesség függvényében:

$$\Phi_q \cdot \dot{q} = -\Phi_t \quad (7)$$

A gyorsulás kétszeres deriválással számítható ki:

$$\Phi_q \cdot \ddot{q} = -(\Phi_q \cdot \dot{q})_q \cdot \dot{q} - 2 \cdot \Phi_{qt} \cdot \dot{q} - \Phi_{tt} \quad (8)$$

ahol:

$$\Phi_{tt} = \left[\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial t^2} \right]_{nh\times 1}$$

$$\Phi_{qt} = \left[\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial q_j \partial t} \right]_{nh\times nc}$$

$$(\Phi_q \cdot \dot{q})_q = \left[\frac{\partial}{\partial q_j} \left(\sum_{k=1}^{nc} \frac{\partial \Phi_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \right) \right]_{nc\times nc} = \left[\sum_{k=1}^{nc} \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k \right]_{nc\times nc} \quad (9)$$

Ezen egyenletek megoldásával kiszámíthatók a mechanizmus elemeinek mozgásviszonyai.

3. Dinamikai elemzés

Az *i* test mozgása a síkban, Newton-Euler egyenletei szerint, a következőképpen írható:

$$\begin{cases} m_i \cdot \ddot{r}_i = F_i \\ I_i \cdot \ddot{\phi}_i = M_i \end{cases} \quad (10)$$

ahol m_i és I_i az *i* test tömege és tehetetlenségi nyomatéka, F_i és M_i a testre ható erők és nyomatékok – a külső, és a belső kapcsolatokból származó erők és nyomatékok.

A (10)-es egyenlet mátrixos formában:

$$M_i \cdot \ddot{q}_i - Q_i = 0 \quad (11)$$

ahol:

$$M_i = \begin{bmatrix} m_i & 0 & 0 \\ 0 & m_i & 0 \\ 0 & 0 & I_i \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$Q_i = [F_{xi}, F_{yi}, M_i]^T \quad (13)$$

$$q_i = [x_i, y_i, \phi_i]^T \quad (14)$$

Az *i* test mozgásegyenlete:

$$\delta q_i^T [M_i \cdot \ddot{q}_i - Q_i] = 0 \quad (15)$$

többtest rendszer esetén pedig:

$$\sum_{i=1}^{nb} \delta q_i^T [M_i \cdot \ddot{q}_i - Q_i] = 0 \quad (16)$$

Ha a testre ható külső erőket és nyomatékokat szétválasztjuk a kapcsolatokból származóktól, az egyenlet a következő formában bontható szét:

$$\sum_{i=1}^{nb} \delta q_i^T [M_i \cdot \ddot{q}_i - Q_i^A] - \sum_{i=1}^{nb} \delta q_i^T Q_i^C = 0 \quad (17)$$

ahol a Q_i^A a külső erők és Q_i^C pedig a kapcsolatokból származóak.

Newton hatás és ellenhatás törvényéből következik, hogy a kapcsolatokból származó erők mechanikai munkája nulla:

$$\sum_{i=1}^{nb} \delta q_i^T Q_i^C = 0 \quad (18)$$

Tehát a (17)-es egyenlet felírható mint:

$$\sum_{i=1}^{nb} \delta q_i^T [M_i \cdot \ddot{q}_i - Q_i^A] = 0 \quad (19)$$

Az egyenlet a Lagrange-i együtthatók elméletével oldható meg. Az egyenlet a következő formában írható:

$$\begin{aligned} &[M \cdot \ddot{q} - Q^A]^T \cdot \delta q + \lambda^T \Phi_q \delta q = \\ &= [M \cdot \ddot{q} + \Phi_q^T \lambda - Q^A]^T \cdot \delta q = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

ahol λ a Lagrange-i együttható. Ahhoz, hogy ez az egyenlet igaz legyen, a δq együtthatójának az értéke nulla kell legyen:

$$M \cdot \ddot{q} + \Phi_q^{\,T} \lambda = Q^A \tag{21}$$

Ez az egyenlet, figyelembe véve a (21) és a (8)-as egyenleteket, rövidebben is felírható, mint:

$$\Phi_q \cdot \ddot{q} = \gamma \tag{22}$$

meghatározza a többtest rendszer mozgásviszonyait a külső erők hatására. Ez a vegyes, differenciális és algebrai, egyenletrendszer többféle képpen oldható meg, például partícionálási módszerekkel.

4. Vegyes dinamikai elemzés

Vegyes dinamikai elemzésre akkor kerül sor, amikor nem ismert az összes testre ható erő, de néhány test mozgása adott. Ebben az esetben a (21) és (22)-es egyenletrendszerből nem ismert teljes egészében a Q^A - külső erők vektora, és ahhoz, hogy az egyenletrendszer megoldható legyen, egy új partícionálási módszerre van szükség.

Feltételezve, hogy a többtest rendszer n testből áll, akkor ennek a rendszernek kapcsolatok nélkül 3n szabadságfoka van. A testek közötti kapcsolatok következtében a szabadságfokok száma k-val esik. A következőkben feltételezzük, hogy i+k számú általánosított külső erő ismert (j – számú nem ismert) és j – számú mozgás ismert. Minden testre három általánosított külső erő hat, amelyek értékei lehetnek nullák is: x irányban ható erő, x irányban ható erő és egy nyomaték. Az i, j és k számok között a következő egyenlet írható fel:

$$i + j + k = 3n. \tag{23}$$

Tehát a mechanizmusnak i+j szabadságfoka van.

A partícionálást a következő képen kell elvégezni:

- keresni kell a j számú általánosított koordináták mellé még i számú általánosított koordinátát, amelyek együtt meghatározzák a mechanizmus konfigurációját (kezelhetőek mint vezető mozgások),
- az i és j számú általánosított koordinátát, valamint az ezeknek megfelelő elemeket a (21)-es egyenletből külön kell választani.

Az így kapott egyenletrendszer a következő formában írható fel:

$$\begin{bmatrix} M_{ii} & M_{ij} & M_{ik} \\ M_{ji} & M_{jj} & M_{jk} \\ M_{ki} & M_{jk} & M_{kk} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{q}_i \\ \ddot{q}_j \\ \ddot{q}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Phi^T_{q\,i} \\ \Phi^T_{q\,j} \\ \Phi^T_{q\,k} \end{bmatrix} \cdot \lambda = \begin{bmatrix} Q^A_i \\ Q^A_j \\ Q^A_k \end{bmatrix} \tag{24}$$

Ezt az egyenletrendszert három részre lehet osztani:

$$\begin{bmatrix} M_{ii} & M_{ij} & M_{ik} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{q}_i \\ \ddot{q}_j \\ \ddot{q}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Phi^T_{q\,i} \end{bmatrix} \cdot \lambda = \begin{bmatrix} Q^A_i \end{bmatrix} \tag{25}$$

$$\begin{bmatrix} M_{ji} & M_{jj} & M_{jk} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{q}_i \\ \ddot{q}_j \\ \ddot{q}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Phi^T_{q\,j} \end{bmatrix} \cdot \lambda = \begin{bmatrix} Q^A_j \end{bmatrix} \tag{26}$$

$$\begin{bmatrix} M_{ki} & M_{kj} & M_{kk} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{q}_i \\ \ddot{q}_j \\ \ddot{q}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Phi^T_{q\,k} \end{bmatrix} \cdot \lambda = \begin{bmatrix} Q^A_k \end{bmatrix} \tag{27}$$

A harmadik egyenletből (27) kifejezhetők a Lagrange-i együtthatók, mivel az itt szereplő külső erők mind ismertek:

$$\lambda = \begin{bmatrix} \Phi^T_{q\,k} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \left(\begin{bmatrix} Q^A_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_{ki} & M_{kj} & M_{kk} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{q}_i \\ \ddot{q}_j \\ \ddot{q}_k \end{bmatrix} \right) \tag{28}$$

A $\Phi_{qk}^{\;T}$ mátrix invertálható, mivel nem szinguláris.

Ezt visszahelyettesítve az első egyenletbe (25) – mivel az itt szereplő külső erők is ismertek – a következő i számú egyenletet kapjuk:

$$\left(\begin{bmatrix} M_{ii} & M_{ij} & M_{ik} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Phi^T_{q\,i} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Phi^T_{q\,k} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} M_{ki} & M_{kj} & M_{kk} \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} \ddot{q}_i \\ \ddot{q}_j \\ \ddot{q}_k \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} Q^A_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Phi^T_{q\,i} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Phi^T_{q\,k} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} Q^A_k \end{bmatrix} \tag{29}$$

A (29)-es egyenlet a (22)-es egyenlettel, valamint az j számú ismert gyorsulással együtt *3n* egyenletből álló, *3n* ismeretlennel rendelkező egyenletrendszert alkot, amelynek megoldása adja a többtest rendszer elemeinek gyorsulását. A sebesség és helyzetviszonyok kiszámítása numerikus integrálással lehetséges.

A MATLAB programozási nyelvben megírt számítógépes program ezeket az egyenleteket automatikusan írja fel és oldja meg.

5. Példa

A következő példa egy mechanizmus vegyes dinamikai elemzését és ellenőrzését mutatja be.

Feltételezzük, hogy 4 merevtest (2, 3, 4, 5-ös test, 2. ábra) egymáshoz csuklós kapcsolattal csatlakozik és a 2-es és az 5-ös test az alaphoz csuklós, valamint csúszós kapcsolattal csatlakozik (2. ábra).

1. táblázat

Pont	Koordináta-rendszer	x [mm]	y [mm]	Pont	Koordináta-rendszer	x [mm]	y [mm]
A	1	0	0	**D**	4	12,5	21,6506
	2	0	-25		5	-5	0
B	2	0	25	**E**	5	-20	0
	3	-25	0		1	60	6,6987
C	3	25	0	**F**	5	20	
	4	-12,5	21,6506		1	100	6,6987

Továbbá feltételezzük, hogy a 2-es és 3-as testre egyenlő értékű (500 Nmm), de ellentétes irányítású nyomaték hat és az 5-ös testre x irányba egy változó nagyságú erő hat. Ezt az erőt a következő függvénnyel lehet leírni:

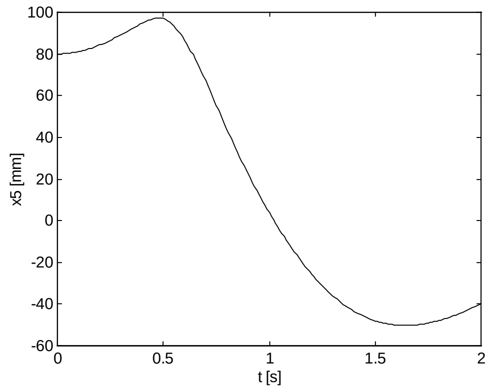
$$F_1 = 10 \sin (\pi/2)\, t. \quad [N] \qquad (30)$$

A kapcsolatok leírásához 6 pontnak a helyzetét kell megadni, a testekhez rendelt lokális koordinátarendszerekben (1. táblázat): az A, B, C és D pontok a csuklós kapcsolatok estében, valamint E és F pontok a csúszós kapcsolat esetében. A koordinátarendszerek a testek tömegközéppontjaiba vannak elhelyezve. A merev testek tömege és inerciája a 2-es táblázatban van megadva.

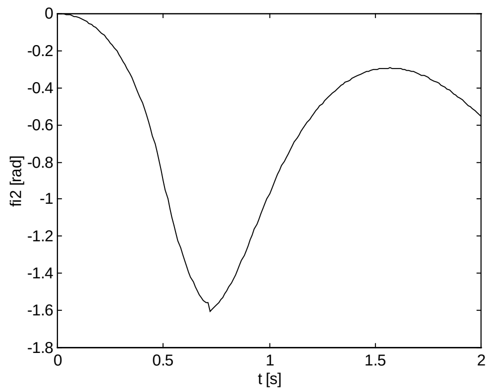
2. táblázat

Test	*Tömeg [kg]*	*Inercia [Nmm^2]*
2, 3, 4	0,0221	20,2313
5	0.00786,	50.63

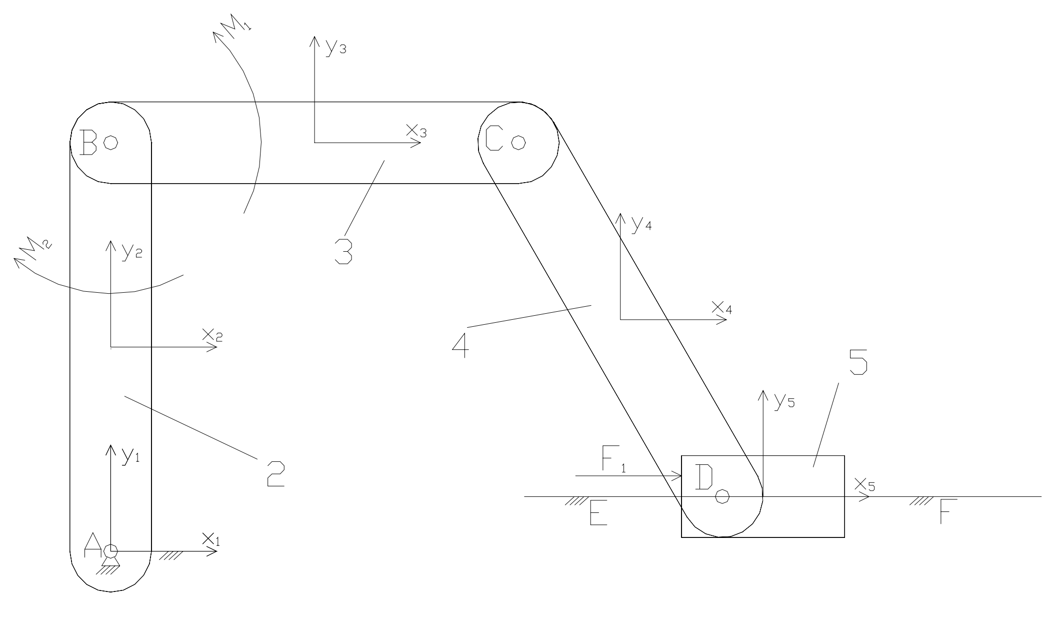
Dinamikai elemzés következtében, ezen erők és nyomatékok ismeretében, két másodpercnyi idő alatt, az 5-ös test elmozdulása a 3-as ábrán van bemutatva, a 2-es test elfordulása pedig a 4-as ábrán.



3. ábra



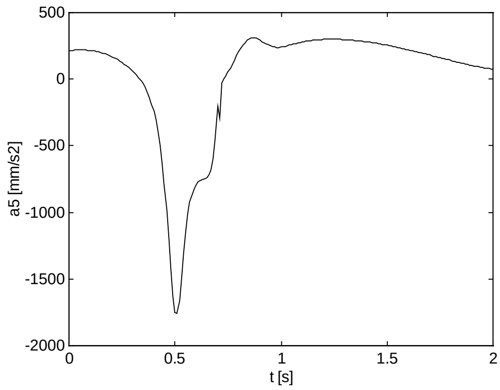
4. ábra



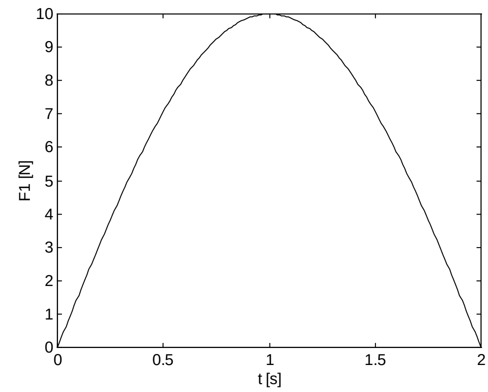
2. ábra

A továbbiakban feltételezzük, hogy az F_1 erő nem ismert, csak az 5-ös test elmozdulása adott, ami megfelel a dinamikai elemzés során kapott elmozdulásnak. Ebben az esetben a következő általánosított koordináták kiválasztása ajánlott: az x irányú elmozdulása az 5-ös testnek (mivel ez az irány felel meg az ismeretlen erőnek) és a 3-as test elfordulása. Az 5-ös test x irányú gyorsulását a dinamikai elemzés során kapjuk meg és az 5-ös ábrán van bemutatva.

A 4. fejezetben megadott egyenletrendszerek megoldása ugyanazokat a mozgásviszonyokat eredményezi, mint a dinamikai elemzés során. Az ismeretlen F_1 erőt pedig a Lagrange-i együtthatók kiszámítása során lehet megkapni. A 6-os ábra bemutatja az erő változását, amely megegyezik a (30)-as egyenletben leírt függvénnyel. Tehát a leírt módszer alkalmazható mechanizmusok vegyes dinamikájának tanulmányozására.



5. ábra



6. ábra