

$$\sigma_{\max} = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{E}{\pi l (1-\nu^2)}} \sqrt{\frac{Z}{R}} \quad [\text{kN/mm}^2]$$

A Hertz-féle érintkezési feszültség legnagyobb értékére vonatkozó – a vasútépítés gyakorlatában használatos – összefüggés az

$$\begin{aligned} E &= 2,15 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2, \\ l &= 20 \text{ mm} \\ \nu &= 0,3 \end{aligned}$$

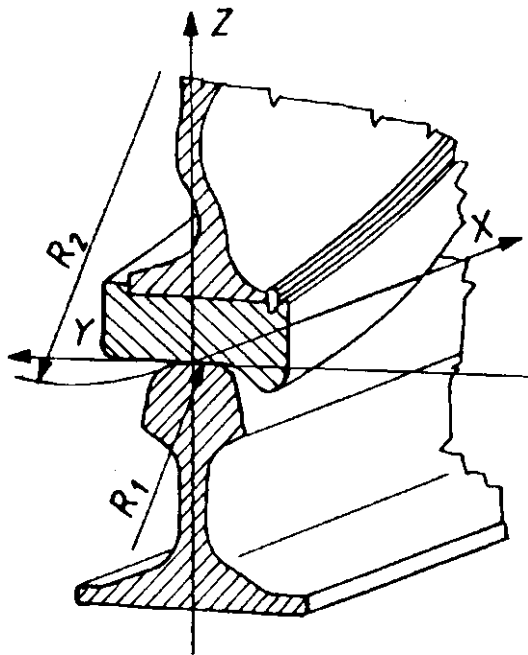
értékek helyettesítésével nyerhető:

$$\sigma_{\max} = 1371 \sqrt{\frac{Z}{R}} \cong 1380 \sqrt{\frac{Z}{R}} \quad [\text{N/mm}^2]$$

A levezetés áttekintése során kitűnik, hogy az a valóságtól távol eső modellt-, valamint túlzottan nagyvonalú közelítést tartalmaz, amennyiben a vasúti sín fejének lekerekítő ívét végtelen nagy, illetve az érintkezési felület egyik méretét (oldalhosszát) önkényesen felvehető méretnek ($l = 20 \text{ mm}$) tekinti.

3. Az érintkezési feszültség javasolt pontos összefüggése

A kerék-sín kapcsolatánál fellépő érintkezési feszültség pontos meghatározásához vasútépítési alkalmazásra – a 4. ábrán látható illeszkedés alapján – a Hertz-féle henger-henger modell felvétele javasolható.



4. ábra

A kerék-sín kapcsolata a Hertz-féle henger-henger modell esetén

Az érintkezési feszültség legnagyobb értéke henger-henger érintkezésének feltételezésével Hertz-szerint:

$$\sigma_{\max} = \frac{3}{2} \bar{p} = \frac{3}{2} \frac{Z}{A} = \frac{3}{2} \frac{Z}{\pi a b} \quad [\text{kN/mm}^2]$$

ahol

- \bar{p} - az átlagos érintkezési feszültség, $[\text{N/mm}^2]$
- Z - a kerékterhelés, $[\text{kN}]$
- A - az érintkezési felület (ellipszis), $[\text{mm}^2]$
- $2a$ - az érintkezési ellipszis nagytengelye, $[\text{mm}]$
- $2b$ - az érintkezési ellipszis kistengelye, $[\text{mm}]$

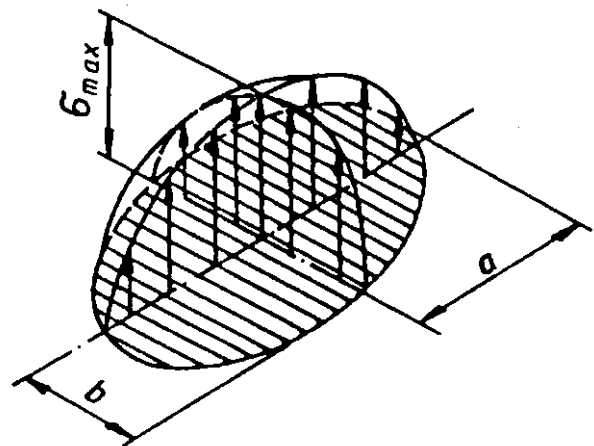
Az 5. ábrán látható érintkezési ellipszis fél-tengelyei általános esetben Hertz szerint:

$$a = \alpha \sqrt[3]{\frac{3 Z (1-\nu^2)}{E (G_1 + G_1' + G_2 + G_2')}} \quad [\text{mm}]$$

$$b = \beta \sqrt[3]{\frac{3 Z (1-\nu^2)}{E (G_1 + G_1' + G_2 + G_2')}} \quad [\text{mm}]$$

ahol az előzőeken kívül

- ν - Poisson tényező
- E - az érintkező anyagok rugalmassági modulusa, $[\text{N/mm}^2]$
- G_i, G_i' - az érintkező testek fő görbületei, $[1/\text{mm}]$.



5. ábra

A kerék-sín kapcsolatánál értelmezett Hertz-féle feszültségi test

Az érintkezési ellipszis fél-tengelyei henger-henger érintkezésének feltételezett modelljében:

$$a = \alpha \sqrt[3]{\frac{3 Z (1-\nu^2)}{E (G_1 + G_2)}} \quad [\text{mm}]$$

$$b = \beta \sqrt[3]{\frac{3Z(1-\nu^2)}{E(G_1 + G_2)}} \quad [\text{mm}]$$

minthogy

$$G'_1 = \frac{1}{R'_1} = 0 \quad \text{és} \quad G'_2 = \frac{1}{R'_2} = 0$$

ha

$$R'_1 = \infty \quad \text{és} \quad R'_2 = \infty$$

ahol az előzőeken kívül

R_i - az érintkező testek görbületi sugara, [mm]

α, β - együtthatók, [-].

Az α és β együtthatók értéke Hertz nyomán általános esetben a:

$$\cos \tau = \sqrt{\frac{(G_1 - G'_1) + (G_2 - G'_2) + 2(G_1 - G'_1)(G_2 - G'_2) \cos 2\varphi}{G_1 + G'_1 + G_2 + G'_2}}$$

összefüggés segítségével táblázat felhasználása révén határozható meg, ahol az előzőeken kívül

φ - az érintkező testek fő görbületi síkjai által bezárt hajlásszög, [°].

A $\cos \tau$ összefüggése henger-henger érintkezésének feltételezett modelljében

$$\cos \tau = \sqrt{\frac{G_1^2 + G_2^2 - 2G_1G_2}{G_1 + G_2}} = \frac{G_1 - G_2}{G_1 + G_2} = \frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2}$$

minthogy

$$G'_1 = \frac{1}{R'_1} = 0 \quad \text{és} \quad G'_2 = \frac{1}{R'_2} = 0$$

ha

$$R'_1 = \infty \quad \text{és} \quad R'_2 = \infty$$

valamint

$$\varphi = 0$$

A Hertz-féle feszültség legnagyobb értéke a feszültségi ellipszis féltengelyeire vonatkozó összefüggések helyettesítését követően:

$$\sigma_{\max} = \frac{1}{\alpha \beta} \sqrt[3]{\frac{3E^2}{8\pi^3(1-\nu^2)^2}} \sqrt[3]{Z \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^2} \quad [\text{kN/mm}^2]$$

A Hertz-féle feszültség maximumára vonatkozó összefüggés az

$$E = 2,15 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$$

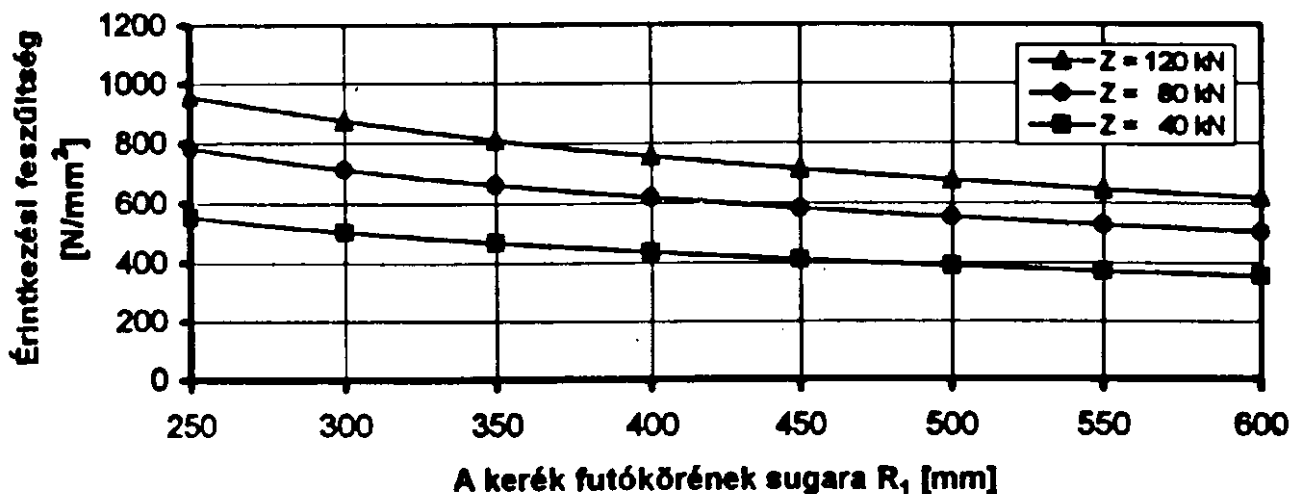
$$\nu = 0,3$$

értékek helyettesítésével nyerhető:

$$\sigma_{\max} = \frac{878}{\alpha \beta} \sqrt[3]{Z \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^2} \quad [\text{kN/mm}^2]$$

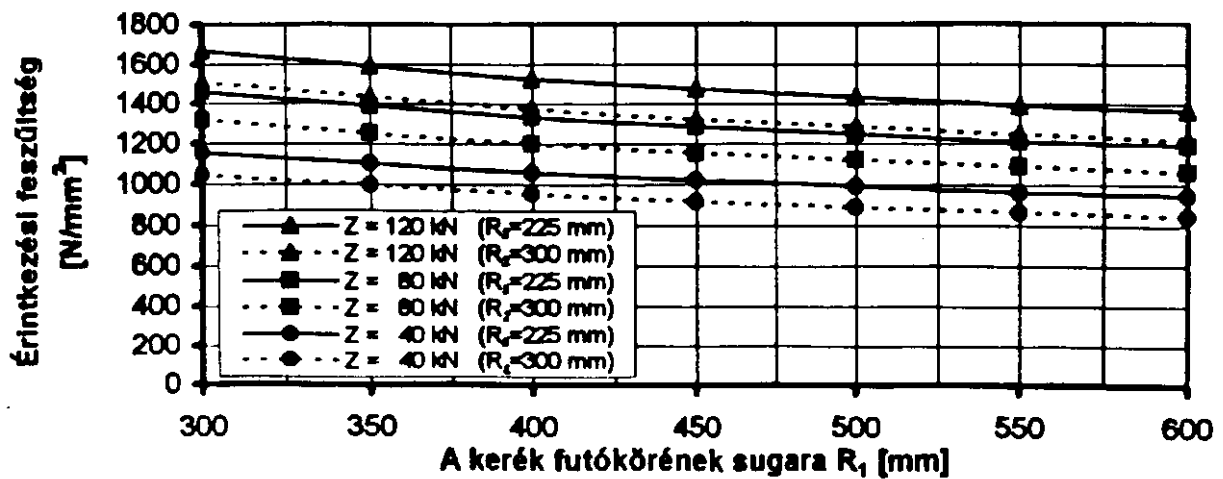
4. Az érintkezési feszültség vizsgálata a közelítő-, és a „pontos” összefüggés alapján

A kerék-sín illeszkedésénél fellépő Hertz-féle érintkezési feszültség meghatározására a 2. pontban egy közelítésen alapuló, a 3. pontban egy közelítést nélkülöző összefüggés került levezetésre. A henger-sík, valamint a henger-henger modell feltételezésével nyert összefüggések a 6. illetve a 7. ábrákon vizsgálhatók, ahol az érintkezési feszültségek alakulása szemlélhető a kerék futókörének sugara (R_1 [mm]), a kerék terhelése (Z [kN]), és a sínfej függőleges lekerekítő ívének sugara (R_2 [mm]) függvényében.



6. ábra

Hertz-féle feszültség henger-sík érintkezésének feltételezésével



7. ábra

Hertz-féle feszültség henger-henger érintkezésének feltételezésével

Az említett összefüggések, illetve a függvények vizsgálata alapján a következő megállapítások tehetők:

1. A kerék-sín érintkezésének henger-sík kapcsolattal történő modelljében az érintkezési felület téglalapjának egyik önkényesen felvett oldalhossza ($l = 20$ mm) a henger-henger modellhez képest lényegesen nagyobb érintkezési felületet eredményez.
2. A kerék-sín érintkezésének henger-henger kapcsolattal való modelljében az érintkezési felület méreteit - a valóságnak megfelelő módon - a kerékterhelés, valamint a kapcsolódó elemek anyagi-, és geometriai jellemzői alakítják.
3. A kerék-sín érintkezésének henger-henger kapcsolattal feltételezett modellje ugyanazon kerékterhelés és keréksugár esetén a henger-sík kapcsolati modellhez képest lényegesen nagyobb Hertz-féle feszültséget szolgáltat. A nagyobb érintkezési feszültség elsősorban a kisebb érintkezési felülettel magyarázható.
4. A sínfej függőleges lekerékítő ívében mért sugár érintkezési feszültségre gyakorolt hatása csak a henger-henger modellben vizsgálható.
5. A közúti vasutak burkolt felépítményeinél használatos Phönix sínszelvény a zúzottkőágyazatú, keresztaljas vágányok Vignol sínszelvényéhez képest mintegy 15 %-os érintkezési feszültség többletet okoz, a sínfej kisebb lekerékítőíve következtében, ugyanazon kerékterhelés mellett.
6. A kerékterhelés érintkezési feszültségekre gyakorolt hatása a henger-henger típusú érintkezés esetén kisebb, mint a henger-sík jellegű kapcsolat során.
7. Minthogy az érintkezési feszültségeket alakító geometriai jellemzők tekintetében a közúti vasút pálya-jármű kapcsolata a nagyvasúthoz képest kedvezőtlenebb, ezért a Hertz-féle feszültségek számításakor a városi vasutaknál különös gonddal kell eljárni. Az érintkezési feszültségek meghatározásához a henger-henger kapcsolati modell alkalmazása javasolható.