

## A sín sztochasztikus igénybevétele és ennek jellemzői

Dr. Köllő Gábor, Suciu Mircea

Kolozsvári Műszaki Egyetem, Építőmérnöki kar

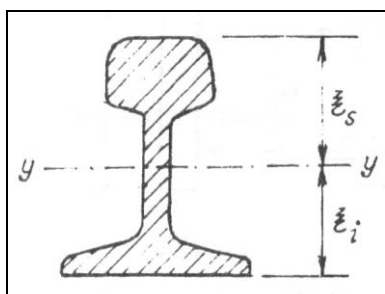
A vasúti felépítmény olyan mérnöki szerkezet (rugalmas ágyazatban elhelyezett, keresztaljakból és sínekből alkotott keretrendszer) amelynek fő igénybevételét a különböző sebességű és tengelyterhelésű vasúti járművek okozzák, nem elhanyagolva a hőmérsékletváltozás okozta és a gyártási igénybevételeket sem.

Figyelembe véve a felépítményt érő erőhatások meghatározásának bizonytalanságait, továbbá a vágánynak mint rugalmas alátámasztású tartónak a terhelés hatására nagy mértékű szórását mutató inhomogén viselkedését (e tekintetben a legfontosabb változók a felépítmény anyaga, az ágyazat, az altalaj, az időjárás, a vágány fenntartottsága stb.), láthatjuk a vasúti felépítmény igénybevétele meghatározásának rendkívül bonyolult voltát.

Ebben a cikkben a sínben a vonatterhelés által létrejött nyomaték és normál feszültség változását tanulmányozom, az idő függvényében meghatározva különböző vonatterhelésre (teher- és gyorsvonat) a nyomaték időbeni változását tehát egy

$$M = f(t), \text{ vagy } \alpha = \alpha_{s,i} \cdot f(t)$$

$$\left( \alpha_{s,i} = \frac{\zeta_{s,i}}{I_y} \right) \text{ típusú függvényt}$$



1. ábra

Tehát célul tűztük ki a sín egy keresztmetszetében a vonatterhelés áthaladása idején a nyomaték változásának meghatározását (1. ábra). Így meghatározhatjuk azokat a mennyiségi jellemzőket, amelyek szükségesek a sín fáradásvizsgálatának az elvégzéséhez.

A 2. ábra a nyomaték időbeni változását mutatja be a sín egy keresztmetszetében, több különböző szerelvény áthaladásakor.

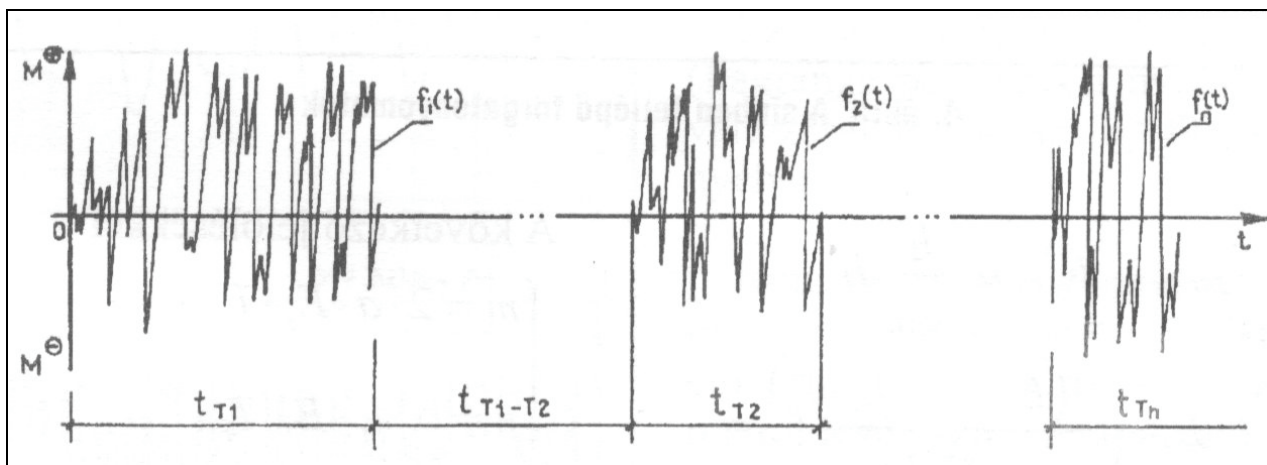
Az ábrában  $t_{T1}$ ;  $t_{T2}$ ;... azok az időintervallumok, amelyek alatt az érintett keresztmetszetet igénybe veszi a szerelvények áthaladása.

Az építőmérnöki tartószerkezetek esetében (pl. hidak, vasúti felépítmény stb.) – azok nagy mérete és egyedi jellege miatt – a sok kísérletet igénylő, teljesen empirikus fáradásvizsgálat kizárt. Ezeknél rendszerint csak egy-egy fontosabb részletet (pl. kapcsolószerkezetet) szoktak laboratóriumi méretezéseknek is alávetni, egyrészt, hogy kikeressék a legkedvezőbb szerkezeti kialakításokat, másrészt, hogy a számítási eljárásokhoz megfelelő adatok álljanak rendelkezésre.

A továbbiakban csak az elméleti számítással végrehajtott fáradásvizsgálattal foglalkozunk, azoknak a 2. ábrán bemutatott sztochasztikus (időben véletlenszerűen változó) függvényeknek,  $\{M = f(t)\}$ , a meghatározásával, amelyek a sín egy tanulmányozott keresztmetszetében jönnek létre különböző sebességű és típusú vonatterhelés esetén.

Ezeket a sztochasztikus folyamatokat (realizációkat) naponta és több  $k$  nap alatt a 3. ábra mutatja be.

A vasúti vágány elméleti igénybevételenek számításánál a vágányt rugalmas alátámasztású tartónak tekintjük és a helyettesítő fiktív hosszgerendás eljárás segítségével határozzuk meg a sínben ébredő nyomatékokat.

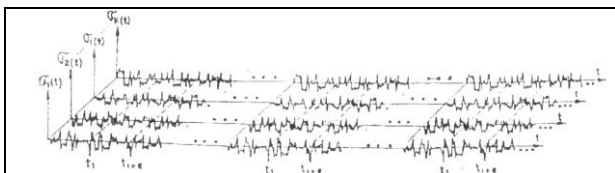


2. ábra, A nyomaték időbeni változása

Mellőzve a sínben ébredő nyomaték meghatározásának a levezetését és bevezetve a következő jelöléseket (4. ábra):

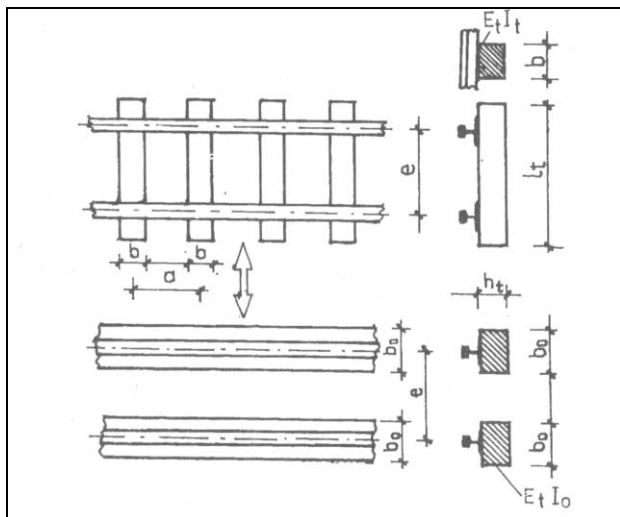
$$b_0 = \alpha \cdot \frac{l_t}{2a} \cdot b$$

$$L = \sqrt[4]{\frac{4(E_s \cdot I_s + E_t \cdot I_0)}{C \cdot b_0}} = \sqrt[4]{\frac{4(2 \cdot a \cdot E_s \cdot I_s + \alpha \cdot l_t \cdot E_t \cdot I_0)}{\alpha \cdot l_t \cdot C \cdot b_0}} \quad (1)$$



3. ábra

*Sztochasztikus folyamatok naponta és több „K” nap alatt*



4. ábra

*A sínben fellépő forgatónyomaték*

A sínre jutó forgatónyomaték egy  $x$  távolságra lévő  $G$  [kN] kerékterhelés hatására ( $M_S$ )

$$M_S = \frac{2aE_s I_s}{4(2aE_s I_s + \alpha l_t E_t I_0)} \cdot \sqrt[4]{\frac{4(2aE_s \cdot I_s + \alpha l_t E_t I_0)}{\alpha l_t C}} \cdot G e^{-\frac{x}{L}} \left[ \cos \frac{x}{L} - \sin \frac{x}{L} \right]$$

A következő jelölésekkel:

$$\begin{cases} m = 2a \cdot E_s \cdot I_s \\ n = \alpha \cdot l_t \cdot I_0 \\ r = \alpha \cdot l_t \cdot b \cdot c \\ \mu(x) = e^{-\frac{x}{L}} \left[ \cos \frac{x}{L} - \sin \frac{x}{L} \right] \\ \lambda = \frac{m}{m+n} \sqrt[4]{\frac{4(m+n)}{r}} \end{cases} \quad (3)$$

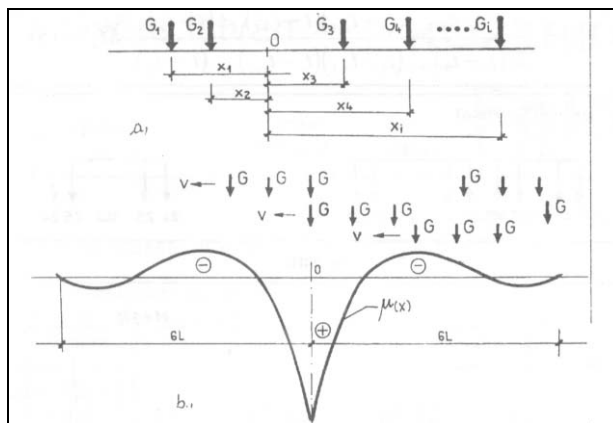
A (2) összefüggésből

$$M_S = \lambda \cdot G \cdot \mu(x)$$

A több kerékterhelés hatására ébredő nyomaték

$$M_S = \lambda \cdot \sum_{i=1}^k G_k \cdot \mu(x_k) \quad (4)$$

Feltételezve, hogy a következő vonatterhelés  $\{G_1, G_2, \dots, G_i\}$ ,  $v$  [km/h] sebességgel halad át a tanulmányozott keresztmetszeten és környezetén  $[-6L, 6L]$  (5/a. b. ábra)



5. a. b. ábra

*Több kerékterhelés hatására ébredő nyomaték*

A nyomaték változását az idő függvényében egy [MOT] koordináta rendszerben ábrázolva megkapjuk az  $M_i = f(t_i)$  függvényt (mint pontthalmazt, 6. ábra).

A következőkben ezt a módszert alkalmazva a 7. ábrán bemutatott tehervonati terhelés következtében létrejött nyomaték változását mutatjuk be a 8. ábrán.

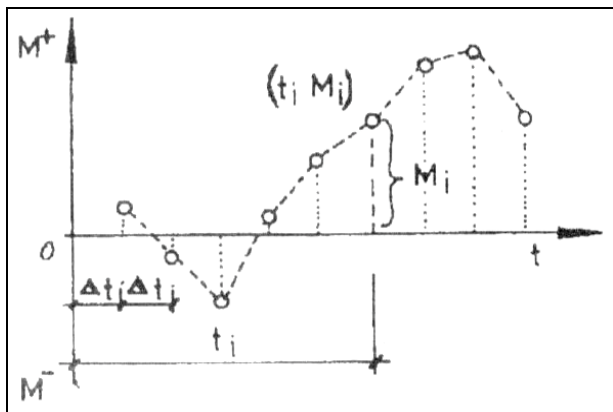
A 8. ábrán a tehervonat terhelésre létrejött nyomaték változását mutatjuk be, mint pontthalmazt. Észrevehetjük a nyomaték változásának periodicitását, amit a 30 egyenlően terhelt teherkocsi okoz. A 80 km/h sebességgel haladó tehervonat  $[-6L, 6L]$  intervallumon 21, 27 másodperc alatt halad át.

A 8/a. ábrán a mozdonyok és kocsi áthaladása okozta nyomaték változás (jobb áttekinthetőség céljából), a 8/b. ábrán pedig a teljes vonatterhelés okozta nyomaték változás látható.

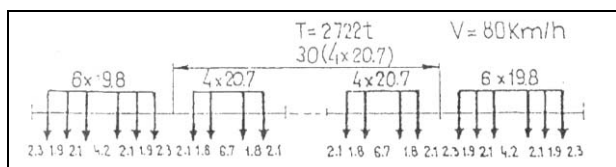
A 8/c. ábrán a mozdony és 4 kocsi áthaladása alatt keletkezett nyomaték változása van feltüntetve, ahol a második és negyedik kocsi terhelése különbözik a többitől (7,5 és 15 tonna/tengely).

A 9. ábrán láthatjuk azt az expressz vonatot ( $v=160$  km/h), amely által létrehozott nyomaték változását a 10. ábra mutatja be.

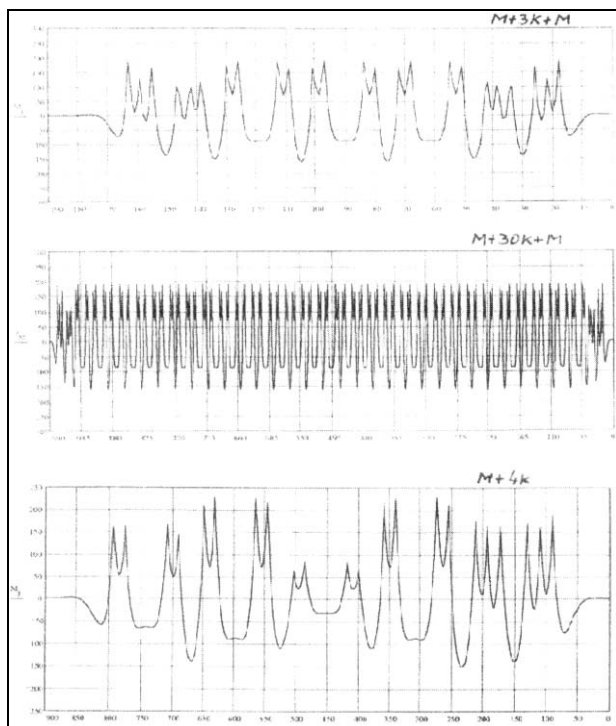
Az  $M_i = f(t)$  függvényt nem mint folytonos függvényt hanem mint diszkrét pontok által leírt függvényt határoztuk meg (kiszámítva minden  $(0+dt_i)$  pontban a létrejött nyomatékot, amíg a szerelvény át nem halad a tanulmányozott keresztmet-szetet magába foglaló  $[-6L, 6L]$  hosszon).



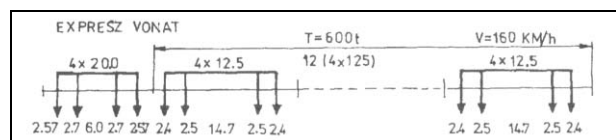
6. ábra



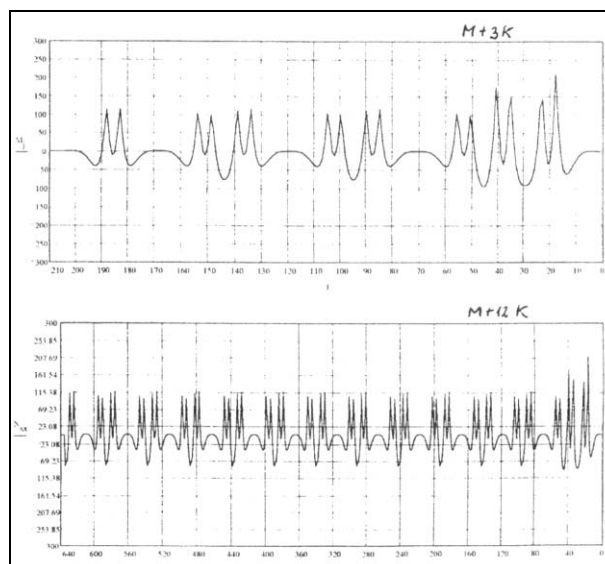
7. ábra



8. ábra



9. ábra



10. ábra

A fáradásvizsgálatoknál és a sín élettartamának a tanulmányozásánál szükséges mennyiségi jellemzők számításához egy folytonos  $M = f(t)$  függvényt kell meghatározni.

Ha a ponthalmazunk adott

$$\left\{ t_0, t_1, \dots, t_k \right\} \Leftrightarrow \left\{ (t_0 M_0) \dots (t_k M_k) \right\} \quad (5)$$

akkor ezen pontok által leírt görbét egy polinom függvénnyel közelítjük meg.

Ezt az aproximálást a Lagrange típusú polinommal lehet elvégezni

Ez a polinom függvény (Lagrange polinom) a nyomaték változását írja le az idő függvényében.

$$M_k(t) = P_{M,k}(t)$$

$$P_{M,k}(t) = \sum_{i=0}^k \frac{(t-t_0) \dots (t-t_{i-1})(t-t_{i+1}) \dots (t-t_k)}{(t_i-t_0) \dots (t_i-t_{i-1})(t_i-t_{i+1}) \dots (t_i-t_k)} \cdot M_k \quad (6)$$

Ismerve az  $M(t)$  függvényt és mivel ergodik tulajdonságú stacionárius sztochasztikus folyamatról van szó, kiszámítható az idő szerinti középérték (7) valamint a másodrendű korrelációs függvény (8).

$$m_M(k) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T M_k(t) dt \quad (7)$$

$$R_M(\theta, k) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T M_k(t) \cdot M_k(t + \theta) dt \quad (8)$$

T- az ergodik stacionárius folyamat realizációjának időtartama. A sztochasztikus folyamat fontos sajátossága, hogy jellemzőinek kiszámításakor a realizáció  $\{M(t)\}$  sokaságán értelmezett átlagolást időszerinti (t) átlagolással lehet helyettesíteni, ha a realizáció időtartama elég nagy.

Ismerve az  $M_k(t)$  idő szerint változó függvényt, kiszámítható még a négyzetes középérték.

$$\Psi_M^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T M_k(t) dt \quad (9)$$

a szórásnégyzet (diszperzió)

$$d_M^2 = \int_0^T [M_k(t) - m_M(k)]^2 dt \quad (10)$$

A diszperzióból vont négyzetgyök pozitív értékét négyzetes középeltérésnek vagy szórásnak nevezzük +  $\sqrt{d_M^2}$

A valószínűségi változók elméleti eloszlásai között különös jelentőségű a normál (Gauss) eloszlású sűrűségfüggvény

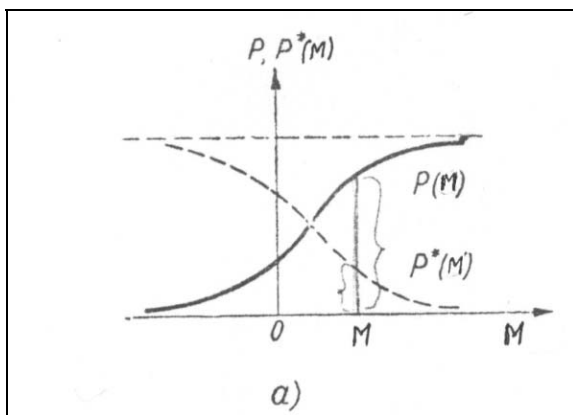
$$p(M) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot d_M} \cdot e^{-\frac{(M-m_M)^2}{2d_M^2}} \quad (11)$$

Az eloszlás függvény kiszámítható a sűrűségfüggvény  $p(M)$  ismeretében

$$P(M) = v[M(t) \leq M] = \int_{-\infty}^M p(M) dM \quad (12)$$

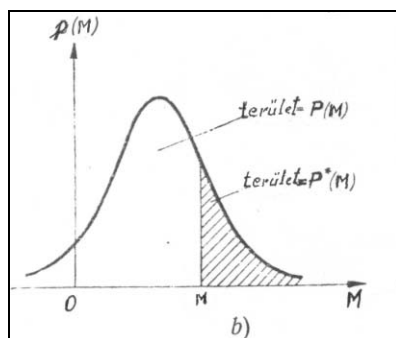
$$P^*(M) = v[M(t) > M] = \int_M^{\infty} p(M) dM \quad (13)$$

$$P(M) + P^*(M) = 1 \quad (14)$$



11. ábra

Sűrűségfüggvények változása



12. ábra

A valószínűségi változók Gauss féle normál eloszlása

Ismerve  $p(M)$  függvényt

$$m_M = \int_{-\infty}^{\infty} M \cdot p(M) \cdot dM \quad (15)$$

$$\Psi_M = \int_{-\infty}^{\infty} M^2 \cdot p(M) \cdot dM \quad (16)$$

$m_M$  – középérték

$\Psi_M$  – névleges középérték

A sűrűség spektrum hatvány függvénye  $G_M(f)$ , amely jellemzi a pillanatnyi intenzitásváltozást a frekvencia változás függvényében

$$\Psi_M^2(f; \Delta f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T M^2(t, f, \Delta f) dt \quad (17)$$

$M(t, f, \Delta f)$  az  $M(t)$  függvény azon intervalluma, amelynek a frekvenciája az  $(f, f+\Delta f)$  frekvencia intervallumban helyezkedik el.

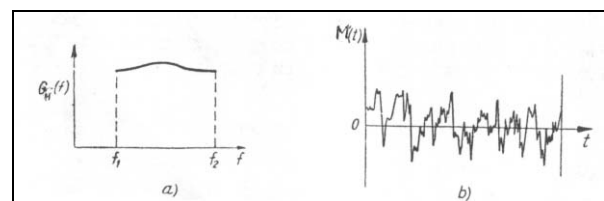
$$G(f) = \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \frac{\Psi^2(f, \Delta f)}{\Delta f} = \quad (18)$$

$$= \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{(\Delta f) \cdot T} \cdot \int_0^T M^2(t, f, \Delta f) dt$$

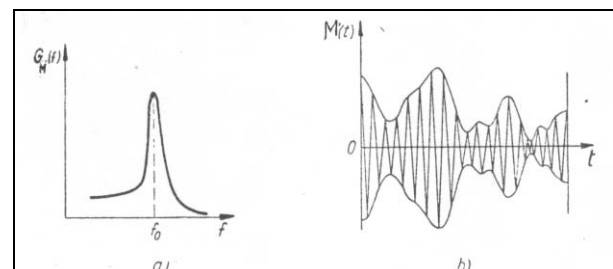
$G(f)$  egy valós függvény a definícióból

$$\Psi_M^2 = \int_0^{\infty} G_M(f) df \quad (19)$$

A 13/b ábrán, valamint a 14/ b ábrán két jellegzetes  $M(t)$  függvény változásra (széles és keskeny frekvenciasáv) ábrázoljuk a  $G_M(f)$  függvény változását. (13/ a és 14/ a ábrákon)



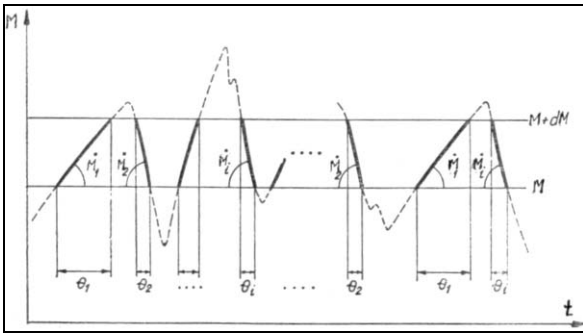
13/ a, b ábra



14/ a, b ábra

A sztohasztikus igénybevételek néhány jellemzője.

A sztohasztikus igénybevétel egy bizonyos sávban  $(M+dM)$  való áthaladásnak frekvenciája.



15. ábra

Az  $M+dM$  igénybevétel intervallumon való áthaladások száma

$$v_M = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \dot{M} \right| \cdot p(M, \dot{M}) d\dot{M} \quad (20)$$

A nulla szinten való átment partikuláris esete

$$v_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \dot{M} \right| \cdot p(0, \dot{M}) d\dot{M} \quad (21)$$

A vegyes normál sűrűségfüggvény

$$p(M, \dot{M}) = \frac{1}{2\pi \cdot d_M \cdot \dot{d}_M} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{M^2}{d_M^2} + \frac{\dot{M}^2}{\dot{d}_M^2} \right) \right] \quad (22)$$

Az  $M(t)$  függvény maximum pontjainak eloszlása.

A maximumpontok száma egy időegység alatt  $v_{\max}$  (mellőzve a levezetést)

$$v_{\max} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \ddot{M} \right| p(M, 0, \ddot{M}) dM d\ddot{M} \quad (23)$$

A szélsőérték pontok közötti változások frekvenciája (változások száma egy időegység alatt ( $\bar{\sigma}$ ))

$$M \left( \left| \dot{M}(t) \right| \right)$$

Az  $M(t)$  függvény deriváltjai abszolút értékeinek az átlaga.

$$\bar{\sigma} = \frac{M \left( \left| \dot{M}(t) \right| \right)}{2v_{\max}} \quad (24)$$

levezetést mellőzve

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{p(0)} \cdot \frac{v_0}{2v_{\max}} \quad (25)$$

Az élettartam folyamán a szerkezet ismétlődő-változó terhelés körülményei között dolgozik, ahol a terhelés bizonyos sztochasztikus folyamatként fogható fel.

A számítással végrehajtott fáradásvizsgálatoknál jelentős problémák adódnak a terhelés és igénybevétel sztochasztikus jellege miatt. Az ilyen vizsgálatokat csak valószínűségelméleti módszerekkel lehet tárgyalni, s emellett még minden esetben egy

elfogadható károsodási hipotézist is kell alkalmazni.

Mivel a terhelés és igénybevétel sztochasztikus folyamat, ezért a károsodások felhalmozódása szintén ilyen folyamatként fogható fel.

Éppen ezért tartom fontosnak a vasúti sínben keletkezett véletlenszerűen változó igénybevételek (pl. forgatónyomaték  $M(t)$ ) minél pontosabb megismerését: a legnagyobb amplitúdójú lengések ( $\Delta M$ ) különböző szerelvények áthaladási időtartama alatti számát, a sztochasztikus függvény maximum valamint minimum pontjai számának meghatározását és ezek időbeni elhelyezkedését. Ezen a sztochasztikus igénybevétel jellemzőinek a meghatározását egy bizonyos elfogadható valószínűséggel kell megtenni.

A felépítmény (sín) károsodása, kifáradása azonban sokkal tömörebb folyamat, ami nemcsak az igénybevételtől, hanem igen sok tényezőtől függ: pl.: a tanulmányozott elem nagysága, keresztmetszete, felületi érdesség és korrózió, felületi kezelés, belső gyártási anyaghibák, hidegalakítás, hőmérséklet stb.

A kutatók, elméleti és gyakorlati szakemberek legfontosabb feladata a károsodási folyamatok elfogadható meghatározása, valamint a károsodások felhalmozódásának a meghatározása lesz.

Ezeknek az ismeretében elfogadható valószínűséggel meghatározható a sín élettartama.

## Irodalom

1. Dr. Köllő Gábor:  
A sín sztochasztikus igénybevételének tanulmányozása, *Közlekedéstudományi Szemle*, 11/1998/XLVIII
2. Dr. Köllő Gábor:  
Őszvérhídszerkezetek tanulmányozása sztochasztikus igénybevételre. Doktori értekezés 1995. Kolozsvár.