

BOROS PÉTER

## A hitelminősítői bejelentések fertőző hatásai és a hitelértékelési kiigazítás

A csődesemények után fellépő fertőző hatások hitelértékelési kiigazításra (CVA) gyakorolt hatását már számos tanulmány elemezte. Empirikus tanulmányok azonban rámutattak, hogy nemcsak a csődesemények, hanem a hitelminősítők bejelentései is fertőző hatásokkal járnak. A tanulmányban azt vizsgáljuk, hogy e hatások befolyásolják-e a CVA értékét. Egy általános modellkeretet javasolunk, amely figyelembe veszi az empirikus tanulmányok által megfigyelt fertőző hatásokat. A modell megoldására a teljes hazardeljárás egy általánosítását adjuk meg. Az általunk elvégzett elemzés rávilágít, hogy a hitelminősítési kategóriák közötti átmeneteket kísérő fertőző hatások szignifikánsan változtathatják a kétoldalú hitelértékelési kiigazítás értékét olyan iparágakban, ahol a hitelminősítések erősen koncentrálnak.

Journal of Economic Literature (JEL) kód: C15, C53, G12, G13, G32, G33.

### Bevezetés

A 2008-as gazdasági válság óta jelentős figyelem övezte a partnerkockázat árazására és modellezésére irányuló törekvéseket, ami elsősorban két okra vezethető vissza. Egyrészt jelentős mértékű partnerkockázat halmozódott fel a piacon, hiszen a teljes derivatív állomány bruttó piaci értéke a 2008-as gazdasági válságig óriási ütemben növekedett, s megközelítette a 35 ezer milliárd dollár értéket.<sup>1</sup> Másrészt a Nemzetközi Fizetések Bankja (BIS) rámutatott, hogy „a globális pénzügyi válság alatt a partnerkockázathoz kapcsolódó veszteségek közel kétharmada a hitelértékelési kiigazítás értékének megváltozásából adódott, és csupán azok egyharmadát lehetett tényleges csődeseményeknek betudni”.<sup>2</sup> Ezt követően fejlett modellek jelentek meg a partnerkockázat területén, amelyek egy része a kockázat árazásával, a hitelértékelési kiigazítás (*Credit Valuation*

<sup>1</sup> A 2018 májusában a Nemzetközi Fizetések Bankja (BIS) által publikált felmérés elérhető az alábbi linken: [https://www.bis.org/publ/otc\\_hy1805.pdf](https://www.bis.org/publ/otc_hy1805.pdf).

<sup>2</sup> <http://www.bis.org/press/p110601.htm>.

*Adjustment*, CVA) számításával foglalkozott. A CVA pontos meghatározása mind árársági, mind kockázatkezelési szempontból rendkívül fontos. A nem megfelelően számított CVA a derivatív rossz értékelését jelenti, ami akár az egyes partnerekkel szemben fennálló kockázat alulárzását is jelentheti. Ez viszont a tőketartalék elvárt szintjének alulbecsléséhez és az adott partnerrel kötött ügyletek felhalmozódásához vezethet.<sup>3</sup> A csődidőpont és a csődvalószínűségek jelentős szerepet játszanak a partnerkockázat árázásában, így azok pontos mérése elengedhetetlen feladat. A CVA számításakor azonban a partnerre mint egyedülálló entitásra szoktak tekinteni, holott a gyakorlatban a piacon lévő vállalatok számos csatornán keresztül hatást gyakorolnak egymásra. Ennélfogva a csődesemények közötti kapcsolat figyelmen kívül hagyása komoly hibát hordozhat magában, ami miatt a csődesemények korrelációjának vizsgálata fontos kutatási területté vált. A csődesemények korrelációjának a partnerkockázatra és a hitelértékelési kiigazításra gyakorolt hatását már számos tanulmány elemezte, köztük *Hull–White* [2000], *Schönbucher–Schubert* [2001] vagy *Brigo–Chourdakis* [2009].

A fertőző csődesemények (amely fogalom *Davis–Lo* [2001] és *Jarrow–Yu* [2001] munkáihoz köthető) egy alternatív megközelítésmódot kínálnak a csődesemények korrelációjának modellezésére. Ezekben a modellekben az egyes vállalatok csődeseményei befolyásolják a túlélő vállalatok csődintenzitás-folyamatait, így közvetve azok csődeseményeit. Jellemzően egy csődesemény növeli a túlélő fél intenzitásfolyamatát, így tükrözve a fertőzés terjedését a piacon. Ez a specifikáció azonban az úgynevezett körkörös csődesemények problémáját okozza, s ez azt jelenti, hogy az összefüggő intenzitásfolyamatok már nem szimulálhatók egymástól függetlenül.

*Jarrow–Yu* [2001] munkája óta számos megoldás született a körkörös csődesemények problémájára. *Yu* [2007] úgynevezett teljes hazardépítési eljárása egy általános algoritmust ad a rekurzív probléma leküzdésére. *Leung–Kwok* [2005] a túlélési mérték fogalmára építve oldja fel a szimulálási nehézségeket. Speciális esetekben *Walker* [2006] és *Leung–Kwok* [2009] Markov-lánc-alapú megoldása is használható.

Empirikus elemzések azonban rámutattak, hogy a csődesemények mellett a hitelminősítési változások is járhatnak fertőző hatásokkal. *Wengner és szerzőtársai* [2015] azt vizsgálta, hogy van-e hatása egy vállalatot érintő hitelminősítési bejelentésnek a vállalat versenytársainak CDS-felárára. Eredményeik szerint az úgynevezett nem érintett vállalatok hitelfelára csökken (nő) a társuk leminősítésekor (felminősítésekor), ami arra mutat rá, hogy egy hitelminősítési változás hatása ellentétes egy csődesemény után tapasztalathoz képest. Ezenfelül a *Micu és szerzőtársai* [2006], *Finnerty és szerzőtársai* [2013], *Wengner és szerzőtársai* [2015] tanulmányok mind arra a következtetésre jutnak, hogy a le- vagy a felminősítés az érintett vállalat CDS-felárát is befolyásolja: a hitelfelár jellemzően emelkedik (csökken) egy leminősítés (felminősítés) bejelentésekor vagy azt megelőzően. A hitelminősítési bejelentések hatását a szakirodalom elhanyagolja a hitelértékelési kiigazítás modellezésekor, miközben a hitelfelárak annak fontos bemeneti paraméterei. Jelen munkában kiterjesztünk egy keretrendszert, amely beépíti az empirikus eredményeket a CVA-modellezéshez gyakran használt, redukált formájú modellbe.

<sup>3</sup> Hasonló veszélyekre hívja fel a figyelmet *Canabarro–Duffie* [2003].

A tanulmány célja, hogy felmérje a hitelminősítő intézmények bejelentéseinek a hitelértékelési kiigazításra gyakorolt hatását, felhasználva a fertőző csődeseemények keretrendszerét. Így megvizsgáljuk a legújabb empirikus kutatási eredményeket, és beépítjük azokat a redukált formájú modellkeretbe. A modell a körkörös csődeseemények problémájának egy általánosítását örökli, amelynek megoldásához egy új módszerre van szükség. Ezért kiterjesztjük a teljes hazardépítési eljárást, ami lehetővé teszi a rekurzív probléma feloldását és a modell tesztelését. Az eredményeink azt mutatják, hogy a hitelminősítői bejelentések után fellépő fertőző hatások jelentősen megváltoztathatják a hitelértékelési kiigazítás értékét olyan esetekben, amikor az iparág vállalatainak hitelminősítése erősen koncentrálódik a spektrum egyik végén. Ez a megfigyelés egy-, de különösen kétoldalú hitelértékelési kiigazítás mellett igaz, még akkor is, ha a feleknek fedezet is rendelkezésükre áll. Másrészt viszont, egyenletesebb eloszlású iparágakban a fertőzés hatása elhanyagolható. Eredményeink mögött a hitelbesorolás változásainak kétoldalú jellege húzódik meg, ami miatt két változás hatása gyakran kioltja egymást.

Az alábbiakban ismertetjük a szakirodalom empirikus kutatásokon alapuló eredményeit. Ezután bemutatjuk a hitelértékelési kiigazítás legfontosabb fogalmait, majd bevezetjük a modellt, amely figyelembe veszi a hitelminősítői intézmények bejelentéseinek fertőző hatásait. Mivel a modell megoldása egy új eljárást kíván, ezért itt megadunk egy algoritmust, amellyel már szimulálhatók a csődeseemények. Ezt követően egy numerikus példán szemléltetjük a modellt. Végül a tanulmányt összefoglalással zárjuk.

## A hitelminősítői bejelentések és a csődeseemények hatása

A hitelminősítő intézmények a pénzügyi piacok fontos szereplői. Az ő feladatuk a befektetők döntéseit befolyásoló információs aszimmetria mérséklése azáltal, hogy az egyes piaci szereplőket hitelminősítési kategóriákba osztják be. Emiatt egy hitelminősítői bejelentésnek friss információt kell hordoznia, ami várhatóan befolyásolja a piaci tényezőket vagy más piaci szereplőket. Ezzel szemben a hitelminősítő intézmények igyekeznek minimalizálni a bejelentéseik számát annak érdekében, hogy a hitelminősítések volatilitását csökkentsék. E célból egy adott vállalat hitelminőségét érintő esemény után gyakran kívárnak a bejelentéssel, hogy megbizonyosodjanak az esemény hatásának tartósságáról.

Számos tanulmány foglalkozik annak az elemzésével, hogy a hitelminősítési besorolás megváltozása hogyan hat a hitelfelárra. Míg a korai munkák (például *Weinstein* [1977], *Hite–Warga* [1997], *Steiner–Heinke* [2001]) a vállalati kötvények által implikált felárat használták, az újabb tanulmányok a hitelmulasztási ügyletek felárait használják a hitelminősítői bejelentések és a hitelfelár kapcsolatának a meghatározására. *Hull és szerzőtársai* [2004] azt a következtetést vonta le, hogy a le- és felminősítések információtartalma elhanyagolható, mivel a piacok már a bejelentési nap előtt reagálnak. A Moody's hitelminősítési adatai alapján a szerzők azt találták, hogy a CDS-felárok már a bejelentés előtt tükrözik annak hatását, és a nyilvánosságra hozatal napján sem

fel-, sem pedig leminősítés esetén nem változnak szignifikánsan. Ezzel szemben a hitelminősítő közleménye egy adott vállalat leminősítési felülvizsgálatának megkezdéséről (*review of downgrade*) szignifikáns változásokat okoz a hitelfelárban. Norden–Weber [2004] már mindhárom nagy hitelminősítő intézményre kiterjesztette az elemzést. Fő eredménye, hogy a Moody's- és az S&P-leminősítések a hitelfelárak szignifikáns változását okozzák a bejelentés előtt és – ellentétben Hull és szerzőtársai [2004] munkájával – a bejelentés napján is. A Fitch közleményei sokkal gyengébb, nem szignifikáns hatást mutatnak. Micu és szerzőtársai [2006] 2001 és 2006 közötti adatokra építette hasonló, eseményablak-technikájú elemzését, amelyben mindhárom nagy hitelminősítő intézmény besorolásait és a CDS-felárakat használta. A tanulmány a napi felárváltozások arányát is vizsgálta, szemben a korábbi munkákkal, amelyek csak a felárak különbségére épültek. A szerzők azt a konklúziót vonták le, hogy minden típusú hitelesemény (hitelminőség-változtatás, le- vagy felminősítési felülvizsgálat megkezdése és a kilátások változtatása) szignifikáns hatással jár a CDS-felárakra a bejelentés napján, így az releváns információt hordoz. Egy valamelyest frissebb tanulmányban Finnerty és szerzőtársai [2013] azt találta, hogy az S&P-felminősítésekre, valamint a felülvizsgálati bejelentésekre a piaci szereplők kevésbé számítanak, mint a leminősítésekre. Különösképpen az alacsony minősítésű vállalatok felminősítése nagyobb meglepetésnek számít, mint a jobb minősítésből induló vállalatoké. Ezekben az esetekben ugyanis az aznapi hatás szignifikáns, szemben a megelőző napokon becsült értékkel. Ezenfelül Finnerty és szerzőtársai [2013] azt is kimutatta, hogy a negatív bejelentéseknek nagyobb a hatása, mint a pozitívaknak.

Bár a szakirodalom nem egységes ebben a témában, de ahogy azt a fentiek alapján láthatjuk, számos tanulmány arra a következtetésre jutott, hogy egy vállalat leminősítése (felminősítése) növeli (csökkenti) annak CDS-felárát. Ami azt illeti, a fentebb felsorakoztatott munkák csak azzal a vállalattal (érintett vállalat) foglalkoztak, amelyre a hitelminősítői bejelentés vonatkozott, és figyelmen kívül hagyták annak társait (nem érintett vállalat). Valójában észszerű azt feltételezni, hogy egy vállalat hitelbesorolásának megváltozása kihat a partnerei felárára.<sup>4</sup> Továbbá, hasonlóan logikus lehet kiterjeszteni a vizsgálatot az érintett vállalat versenytársaira. Egy iparág jelentős szereplőjének a leminősítése megnövelheti a versenytársak piaci részesedését, így javítva azok hitelminőségét, avagy éppen növelheti a kockázatot a piacon fellépő lehetséges fertőzés miatt.

Wengner és szerzőtársai [2015] vizsgálta elsőként a hitelminősítő intézmények bejelentéseit követő tovaggyűrűző hatásokat. 2004 és 2011 közötti S&P-bejelentéseket és CDS-felárakat vizsgálva azt találják, hogy mind az érintett, mind a nem érintett vállalatok CDS-felárai egyaránt szignifikánsan változnak a hitelminősítői bejelentések körül. Megfigyelésük szerint egy vállalat leminősítése csökkenti az iparágban tevékenykedő versenytársak CDS-felárát, azaz a versenytársak hasznot húznak a társukat érintő negatív eseményből. Ezzel szemben felminősítés esetén a nem érintett vállalatok

<sup>4</sup> A letéti megállapodások (CSA) gyakran tartalmazznak hitelminősítéshez kötött rendkívüli pontokat, amelyek megváltoztathatják a letéti követelményeket. Így például egy leminősítés további letéti követelményekkel járhat, ami mindkét vállalat likviditását érintheti.

hitelfelára növekedni fog. Az érintett vállalatok esetében a felár mindig szignifikánsan változik, de a változás mértéke függ az iparágtól. Végül a szerzők panelregressziót becsülve rámutattak, hogy a tovagyrúzó hatás nagysága függ a nem érintett vállalat hitelbesorolásától, ugyanis az alacsonyabb hitelminőségű vállalatok érzékenyebbek a fertőzésre kevésbé kockázatos társaikhoz képest.

Ezek az eredmények azt az érzetet kelthetik, hogy egy versenytárs hitelminőségének a romlása mindig a vállalat helyzetének a javulását okozza. Ennek téves voltára mutat rá a Lehman Brothers 2008-as csődeseménye. Egy versenytárs lehetséges csődje veszélybe sodorhatja a túlélő felet, például a felé fennálló követeléseken elszenvedett veszteségek miatt. A magas szintű összekapcsoltság – ami például a pénzügyi szektort jellemzi – segíti a fertőző hatások gyors terjedését. Ezt a hipotézist erősíti meg *Jorion–Zhang* [2009], amely a csődbe menő vállalatok hitelezőinek felárait vizsgálta meg. A szerzőpáros eredményei szerint a csődidőpontot megelőzően és még jelentős idővel később is a túlélő felek CDS-feláraiban bekövetkező növekedés szignifikáns. Ez azt jelenti, hogy a csődeseménynek a nem érintett vállalatokra vonatkozó hatása a leminősítéssel ellentétes.

Így a csődesemények közötti korrelációk modellezése releváns kutatási téma. Ahogy a bevezetőben kifejtettük, *Jarrow–Yu* [2001] a fertőző csődesemények modellezését vezette be a redukált formájú modellekbe. A szerzőpáros fő érve, hogy egy vállalat csődeseménye után a piaci fertőzés a túlélő vállalatok megemelkedett csődintenzitás-folyamataiban számszerűsíthető.

Ez a megoldás azt feltételezi, hogy a vállalatok intenzitásfolyamatai konstansok (hazardráta), de egy piaci szereplő csődidőpontja után egy új konstans szintre kerülnek. Ez az egyszerű keretrendszer az implementálás kihívását okozza, ugyanis az intenzitásfolyamatok szimulálása nehézkessé válik. A körkörös csődesemények modelljében az intenzitásfolyamatok egymástól függenek, így már nem szimulálhatók függetlenül. *Jarrow–Yu* [2001] megkerülte ezt a problémát azzal a feltételezéssel, hogy a vállalatok vagy elsődleges, vagy másodlagos kategóriákba sorolhatók. A második kategóriába a kisebb cégek kerülnek, amelyekre kihathat az első csoportban szereplő, nagyobb vállalatok csődeseménye, de ez a kapcsolat fordítva nem igaz.

A körkörös csődesemények problémáját jelentős figyelem övezte, amely a probléma számos megoldását eredményezte. *Leung–Kwok* [2005] a túlélési mértéket használta, míg *Walker* [2006] és *Leung–Kwok* [2009] Markov-lánc-alapú megoldással állt elő. A körkörös csődesemények problémájának teljes hazardépítés-alapú megoldását hat évvel a probléma felvetése után *Yu* [2007] készítette el. Az általa bevezetett algoritmust követve, lépésről lépésre egy kumulált intenzitásfolyamat építhető, amellyel minden pillanatban eldönthető, hogy bármelyik vállalat csődeseménye bekövetkezett-e. A módszer széleskörűen alkalmazható csődintenzitásfolyamatok számos családjára, de a hitelminősítési besorolás változását nem veszi figyelembe. A következőkben úgy egészítjük ki az eljárást, hogy az a hitelminősítő vállalatok bejelentéseire is érzékeny legyen.

Ugyanakkor a korai munkák után számos függőségi struktúra jelent meg a szakirodalomban. *Bao és szerzőtársai* [2012] a túlélő fél intenzitásfolyamatára a nem teljesítő fél csődidőpontja előtti intenzitásfolyamatával arányos ugrást vezetett be, azt

feltételezte, hogy a nem teljesítő vállalat átruházza a csőd előtti intenzitásának egy részét a túlélő félnek.

Zheng [2013] egy általános keretrendszert adott, ahol figyelembe vette a Cox-folyamatok korrelációját és a csődesemény utáni ugrásokat az intenzitásfolyamatban. Ebben a modellben a Markov-lánc-típusú keret már nem alkalmazható, mivel Zheng [2013] egy exponenciális csökkenést használt a múltbeli hatások enyhítésére.

A hitelbesorolások fontos szerepet játszanak a hitelértékelési kiigazítás számításakor is. Korábbi munkák már figyelembe vették a hitelminősítési kategóriától függő fedezet vagy a feltételes pozíciózárás hatásait. Így például Bielecki és szerzőtársai [2013] egy általános modellkeretet épített a hitelbesorolási kategóriától függő és változó letétellátott derivatívák CVA-számítására. A feltételes pozíciózárás hatását Yi [2011] elemezte. A tanulmány szerint az egyoldalú hitelértékelési kiigazítás értéke csökken a hitelbesorolástól függő pozíciózárás bevezetésével, azonban a kétoldalú hitelértékelési kiigazítás akár nőhet is. Ismereteink szerint a hitelminősítői intézmények bejelentéseit követő piaci fertőzés partnerkockázatra gyakorolt hatását eddig nem vizsgálták a szakirodalomban. A CVA minél pontosabb számszerűsítése rendkívül fontos feladat. A releváns kockázati faktorok figyelmen kívül hagyása veszélyezteti a bankok teljesítőképességét, hiszen nem várt veszteségekhez vezethetnek. Továbbá ilyen tényezők rendszerszinten fedezés nélkül maradhatnak, kihatva a teljes bankrendszerre. A tanulmányban megvizsgáljuk, hogy a hitelbesorolások közötti átmenetekkor fellépő fertőző hatások valóban befolyásolják-e a hitelértékelési kiigazítás értékét.

A következő részben egy hitelbesorolás-alapú modellt vezetünk be, amelyben a hitelminősítői változtatás kihat a piacon jelen lévő összes vállalatra. Mivel a tanulmány fő célja, hogy megvizsgálja a fertőző hitelminősítői változások hatását a hitelértékelési kiigazításra, ezért most egy általános CVA-árazó formula bevezetésével folytatjuk.

## A hitelértékelési kiigazítás

A következőkben röviden ismertetjük a fedezeti megállapodással kiegészített, származtatott termékekre vonatkozó kétoldalú hitelértékelési kiigazítás számítását. A fejezetben leírt eredmények speciális eseteként az egyoldalú CVA is megadható.

Dogozunk egy  $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{G}, \mathbb{Q})$  valószínűségi mezőn, ahol  $\mathbb{G}$  tartalmazza a teljes piaci információt, és  $\mathbb{Q}$  a kockázatsemleges mérték. Feltételezzük, hogy  $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t \cup \mathcal{H}_t$ , ahol  $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, 0 \leq s \leq t)$  az  $X_t$  piaci faktorokat tartalmazó vektor által generált szigma-algebra, és  $\mathcal{H}_t$  tartalmazza a csődeseményekre vonatkozó információt. Továbbá tételezzük fel, hogy két fél ( $B$  és  $C$ ) egy  $T$  lejáratú derivatív szerződést köt. Jelölje  $\Pi(t, T)$  a derivatíva  $t$  és  $T$  közötti kockázatmentes pénzáramainak  $t$ -edik időpontra diszkontált értékeinek az összegét. A származtatott termék partnerkockázatmentes ára  $B$  szemszögéből:

$$V_t = \mathbb{E}_t[\Pi(t, T)], \quad (1)$$

ahol  $\mathbb{E}_t[\cdot]$  a  $Q$  mérték alatt számolt  $\mathcal{F}_t$  feltételes várható érték.

Most vezessük be a modellbe a partnerkockázatot, feltételezve, hogy  $\tau_B$  és  $\tau_C$  jelenti a  $B$  és a  $C$  csőd időpontjait. Jelölje  $N_t^i = 1_{(\tau_i \leq t)}$ ,  $i = \{B, C\}$  a csődindikátor-folyamatot, ahol

$$1_{(a \in \mathcal{A})} = \begin{cases} 1, & a \in \mathcal{A} \\ 0, & a \notin \mathcal{A}, \end{cases} \quad (2)$$

továbbá  $\mathcal{H}_t^i = \sigma(N_s^i, 0 \leq s \leq t)$ , és  $\mathcal{H}_t = \cup \mathcal{H}_t^i$  jelenti a csődesemények által generált filtrációt. Végül legyen  $REC_i$ ,  $i \in \{B, C\}$  a csődeseménykori megtérülési ráta.

Fedezet nélkül a partnerkockázattal kiigazított ár az alábbi alakban számítható:

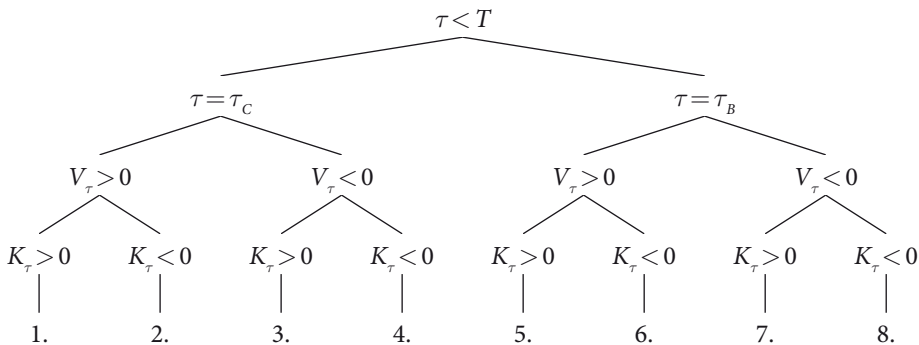
$$\begin{aligned} \overline{\Pi(t, T)} &= \Pi(t, T) 1_{(\tau > T)} \\ &+ 1_{(\tau = \tau_B \leq T)} \left\{ \Pi(t, \tau_B) + D(t, \tau_B) \left[ REC_B (V_{\tau_B})^+ - (-V_{\tau_B})^+ \right] \right\} \\ &+ 1_{(\tau = \tau_C \leq T)} \left\{ \Pi(t, \tau_C) + D(t, \tau_C) \left[ (V_{\tau_C})^+ - REC_C (-V_{\tau_C})^+ \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3)$$

ahol  $\tau = \min(\tau_B, \tau_C)$ , és  $D(t, T)$  a  $t$  és  $T$  közötti diszkontfaktor. A (3) egyenlet szerint a  $t$  és  $T$  közötti, kockázattal kiigazított pénzáramok megegyeznek a kockázatmentes pénzáramokkal, feltéve, ha nincs csődesemény ezen az intervallumon. Ellenkező esetben a kockázattal kiigazított pénzáramoknak a  $t$ -edik időpontra diszkontált összege megegyezik a csődeseményt megelőző kockázatmentes pénzáramok diszkontált értékének, a csődeseménykor fennálló kitettségből megtérülő értéknek, valamint a fennálló kötelezettség értékének az összegével. Természetesen az utolsó két tag közül csak az egyik lehet nem nulla.

*Brigo és szerzőtársai* [2013] a váltoó letét figyelembevételével egészítették ki a fenti pénzáramokat. Az általános pénzáramformula felírásához használhatjuk az egyes eseteket részletező faábrát (1. ábra).

1. ábra

A változó letéttel kiegészített CVA számítása – a nemteljesítés összes lehetséges esete



*Megjegyzés:* az ábrán  $C$  csődjét a bal ág, míg  $B$  csődjét a jobb ág szemlélteti. A nemteljesítéskori pénzáramokat a kitettség és a rendelkezésre álló fedezet egyenlege határozza meg. Ezek összes lehetséges kombinációját mutatják a további bontások.

Jelölje  $K_t$  a fedezeti számla egyenlegét a  $t$ -edik időpontban  $B$  szemszögéből. Általánosan megengedhetjük a fedezeti számlán fellépő veszteséget, az ebből származó megtérülést a  $REC'_i$ ,  $i \in \{B, C\}$  megtérülési számmal írjuk le. Ebben az esetben a pénzáramok a (4) alakot öltik:

$$\begin{aligned} \overline{\Pi(t, T)} = & \Pi(t, T) \mathbf{1}_{(\tau > T)} + \mathbf{1}_{(\tau < T)} \left[ \Pi(t, \tau) + D(t, \tau) K_\tau \right] \\ & + \mathbf{1}_{(\tau_C = \tau \leq T)} \mathbf{1}_{(V_\tau > 0)} \mathbf{1}_{(K_\tau > 0)} D(t, \tau) \left[ REC_C (V_\tau - K_\tau)^+ + (V_\tau - K_\tau)^- \right] \\ & + \mathbf{1}_{(\tau_C = \tau \leq T)} \mathbf{1}_{(V_\tau > 0)} \mathbf{1}_{(K_\tau < 0)} D(t, \tau) (REC_C V_\tau - REC'_C K_\tau) \\ & + \mathbf{1}_{(\tau_C = \tau \leq T)} \mathbf{1}_{(V_\tau < 0)} \mathbf{1}_{(K_\tau > 0)} D(t, \tau) (V_\tau - K_\tau) \\ & + \mathbf{1}_{(\tau_C = \tau \leq T)} \mathbf{1}_{(V_\tau < 0)} \mathbf{1}_{(K_\tau < 0)} D(t, \tau) \left[ REC'_C (V_\tau - K_\tau)^+ + (V_\tau - K_\tau)^- \right] \\ & + \mathbf{1}_{(\tau_B = \tau \leq T)} \mathbf{1}_{(V_\tau > 0)} \mathbf{1}_{(K_\tau > 0)} D(t, \tau) \left[ (V_\tau - K_\tau)^+ + REC'_B (V_\tau - K_\tau)^- \right] \\ & + \mathbf{1}_{(\tau_B = \tau \leq T)} \mathbf{1}_{(V_\tau > 0)} \mathbf{1}_{(K_\tau < 0)} D(t, \tau) (V_\tau - K_\tau) \\ & + \mathbf{1}_{(\tau_B = \tau \leq T)} \mathbf{1}_{(V_\tau < 0)} \mathbf{1}_{(K_\tau > 0)} D(t, \tau) (REC_B V_\tau - REC'_B K_\tau) \\ & + \mathbf{1}_{(\tau_B = \tau \leq T)} \mathbf{1}_{(V_\tau < 0)} \mathbf{1}_{(K_\tau < 0)} D(t, \tau) \left[ (V_\tau - K_\tau)^+ + REC_B (V_\tau - K_\tau)^- \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

Így például a faábrán szerepeltetett 1. esetben, amikor a  $C$  csődjekor  $B$  kitettsége pozitív ( $V_\tau > 0$ ), és valamennyi letét elérhető számára ( $K_\tau > 0$ ), akkor elsőként csökkeni a kitettség értékét az elérhető fedezet összegével. Ha továbbra is marad valamennyi kitettsége  $C$ -vel szemben, akkor csakis a megtérülési ráta által meghatározott összeget fogja megkapni, míg ellenkező esetben a letét fennmaradó értékét visszaadja a partnerének. Az 1. ábra és a példa felhasználásával levezethetők a (4) egyenletben szereplő tagok.

A (4) egyenlet egyszerűsítésével felírhatjuk a letéti megállapodás melletti kockázattal kiigazított árat:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_t \left[ \overline{\Pi(t, T)} \right] = & \mathbb{E}_t \left[ \Pi(t, T) \right] \\ & - \mathbb{E}_t \left\{ \mathbf{1}_{(\tau = \tau_C < T)} D(t, \tau) \left[ (1 - REC_C) (V_\tau^+ - K_\tau^+)^+ - (1 - REC'_C) (V_\tau^- - K_\tau^-)^+ \right] \right\} \\ & - \mathbb{E}_t \left\{ \mathbf{1}_{(\tau = \tau_B < T)} D(t, \tau) \left[ (1 - REC_B) (V_\tau^- - K_\tau^-)^- - (1 - REC'_B) (V_\tau^+ - K_\tau^+)^- \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

A kétoldalú CVA – azaz a partnerkockázat ára – tehát a kockázatmentes és a kockázattal kiigazított ár különbsége. Amennyiben feltételezzük, hogy  $B$  kockázatmentes, akkor az egyoldalú CVA definícióját kapjuk. A fenti formulákból látható, hogy a hitelértékelési kiigazításnak két fő komponense van: a kitettség profilja és a csődvalószínűségek. A következőkben a csődesemények modellezésére összpontosítunk, és levezetünk egy általános keretrendszert a hitelbesorolások megváltozása által okozott fertőző hatások számszerűsítésére.



## A modell

A következőkben tételezzünk fel  $N$  számú vállalatot és  $K$  számú különböző hitelminősítési kategóriát. A kezdeti hitelminősítéseket az  $S_0 = [\eta_1^0, \eta_2^0, \dots, \eta_N^0]$  vektor tartalmazza, ahol  $\eta_i^0 \in \{1, 2, \dots, K\}$  tetszőleges  $i = 1, \dots, N$  esetén. Így az  $i$ -edik vállalat kezdeti hitelbesorolására mint az  $S_0$  vektor elemére hivatkozhatunk, azaz  $S_0[i] = \eta_i^0$ , ahol  $i = 1, \dots, N$ .

A hitelminősítési kategóriák közötti átmeneteket *Lando* [1998] egy vállalatra vonatkozó modelljének az általánosításaként fogjuk modellezni. Az általános eset megértése előtt érdemes egy leegyszerűsített kerettel kezdeni, ahol egyetlen átmenet létezik, ami nem más, mint a csődesemény. *Lando* [1998] a csődidőpontot úgy definiálta, mint az első időpont, amikor egy kumulált intenzitásfolyamat először lép át egy kívülről adott szintet. Azaz ha  $\tau$  jelöli a csődidőpontot, akkor

$$\tau = \inf \left\{ t : \int_0^t \lambda(s) ds \geq \varepsilon \right\}, \quad (6)$$

ahol  $\varepsilon$  egy exponenciális valószínűségi változó egységnyi várható értékkel, és  $\lambda(\cdot)$  a csődintenzitás folyamata. A csődintenzitás-folyamat lehet konstans, determinisztikus vagy sztochasztikus folyamat. Ebben a modellben a vállalat azonnali csőd valószínűsége megadható  $\lambda \Delta t$  formában, amennyiben  $\Delta t$  kicsi. A kumulált intenzitásfolyamatot  $\int_0^t \lambda(s) ds$  formában adhatjuk meg. A fentiekből már következik, hogy determinisztikus intenzitásfolyamat esetében:

$$\mathbb{Q}[\tau > T] = e^{-\int_0^T \lambda(s) ds}. \quad (7)$$

Egy több vállalatot lefedő esetben a (6) egyenlettel adott definíció általánosítható, ha feltételezzük, hogy minden vállalathoz hozzárendelhetünk egy intenzitásfolyamatot és egy exponenciális valószínűségi változót. A sztochasztikus intenzitásfolyamatok korrelációjával és/vagy az exponenciális valószínűségi változók egy kopulával történő összekapcsolásával csődesemények közötti függőség is bevezethető a modellbe.<sup>5</sup>

*Lando* [1998] a fenti modellt általánosította annak érdekében, hogy a hitelminősítési besorolások változását számszerűsítse. Az általános keretben a hitelminősítési átmenet időpontját a (8) egyenlet szerint definiálta:

$$\tau^j = \inf \left\{ t : \int_0^t \lambda_{\eta_0^j}(s) ds \geq \mathcal{E}_{1j} \right\}, \quad j = 1, \dots, K; \quad j \neq \eta_0, \quad (8)$$

ahol  $\{\mathcal{E}_{11}, \mathcal{E}_{12}, \dots, \mathcal{E}_{1K}\}$  független, egységnyi exponenciális valószínűségi változók sorozata, és  $\eta_0$  a vállalat kezdeti hitelbesorolása. Ebben a keretben a  $\lambda_{\eta_0^j}(\cdot)$  hitelminősítési kategóriák közötti átmenetet leíró intenzitásmátrix  $\eta_0$ -adik sorának és  $j$ -edik oszlopának eleme. Az első hitelminősítési átmenet tehát előáll, mint az első időpont, amikor az egyes kategóriákhoz rendelt kumulált átmenetintenzitás-folyamatok közül az egyik átlép egy, a kategóriához rendelt véletlen mennyiséget. A  $\tau^1$ -edik időpontot követő hitelátmenetet a (9) formában definiálhatjuk:

<sup>5</sup> Ezek részleteiért a következő munkákat javasoljuk: *Brigo és szerzőtársai* [2013] vagy *Zheng* [2013].

$$\tau^2 = \inf \left\{ t : \int_{\tau_1}^t \lambda_{\eta_j}(s) ds \geq \mathcal{E}_{2j} \right\}, \quad j=1, \dots, K; \quad j \neq \eta_1, \tag{9}$$

ahol  $\{\mathcal{E}_{21}, \mathcal{E}_{22}, \dots, \mathcal{E}_{2K}\}$  független, egységnyi exponenciális valószínűségi változók egy új sorozata. Ez alapján már tetszőleges hitelátmenetet definiálhatunk egészen a vállalat csődeseményéig. A csődeseményt a legrosszabb besorolásba történő átmenetként adhatjuk meg, amely egy „elnyelő” kategória, azaz az intenzitásmátrix utolsó sora csupa nullát tartalmaz. Így tehát az  $n$ -edik átmenet előáll a (10) szerint:

$$\tau^n = \inf \left\{ t : \int_{\tau_{n-1}}^t \lambda_{\eta_{n-1}j}(s) ds \geq \mathcal{E}_{(n-1)j} \right\}, \quad j=1, \dots, K; \quad j \neq \eta_{n-1}, \tag{10}$$

és amennyiben a  $\tau^n$ -edik időpontban a  $j=K$ -edik átmenetbe történik az átmenet, akkor a  $\tau^n$ -edik időpont a vállalat csődideje.

Lando [1998] alapján a következőkben egy általános modellkeretet adunk meg, amely a hitelminősítési kategóriák közötti átmenetek mellett azok fertőző hatásait is figyelembe veszi. Modellünkben bevezetjük a feltételes intenzitásfolyamatot, amit a feltétel nélküli folyamat átskálázásával kapunk. A skálázó faktor figyelembe veszi az összes hitelminősítés-változást, és annak megfelelően változtatja az intenzitásfolyamatot. Például egy vállalat leminősítésekor növeli az adott vállalat intenzitásfolyamatát, ugyanakkor csökkenti a társakét.

Jelölje  $\lambda_j^i(t)$  az  $i$ -edik vállalat  $j$ -edik hitelminősítésbe való átmenetéhez rendelt, a korábbi hitelminősítés-változásokra vett feltételes intenzitásfolyamatát a  $t$ -edik időpontban:

$$\lambda_j^i(t) = \lambda_j^i(t | T_n, S_n, G_n^i, R_n^i), \tag{11}$$

ahol  $T_n = \{t_1, t_2, t_3, \dots, t_n\}$  jelöli az összes korábbi hitelminősítés-változás időpontjainak halmazát, így  $t_n < t$ . Az  $S_n = \{S_0, S_1, \dots, S_n\}$  az egyes vállalatok hitelminősítési múltjainak a halmaza, ahol is  $S_k = [\eta_1^k, \eta_2^k, \dots, \eta_N^k]$  a  $k$ -edik átmenet után megfigyelt hitelminősítések. Végül  $G_n^i = \{g_1^i, g_2^i, \dots, g_n^i\} \subseteq T_n$  tartalmazza az összes időpontot, amikor az  $i$ -edik vállalat hitelbesorolása változott, és  $r_u^i \in \{r_1^i, r_2^i, \dots, r_n^i\} = R_n^i$  jelenti az új hitelminősítési kategóriát, ahová az  $i$ -edik vállalat került a  $g_u^i$ -edik időpontban.

A bevezetésre kerülő modellben a  $\lambda_j^i(t | T_n, S_n, G_n^i, R_n^i)$  feltételes intenzitásfolyamatot a (12) formában specifikáljuk:

$$\begin{aligned} \lambda_j^i(t | T_n, S_n, G_n^i, R_n^i) = & a_j^i(t) \left[ 1 + \sum_{h=1}^n \left[ d_1^{\text{le}} \left( \mathbf{1}_{(S_h > S_{h-1})} \right) + d_1^{\text{fel}} \left( \mathbf{1}_{(S_h < S_{h-1})} \right) \right] \right. \\ & + d_2^{\text{le}} \left( \mathbf{1}_{(S_h > S_{h-1})} [i] \right) + d_2^{\text{fel}} \left( \mathbf{1}_{(S_h < S_{h-1})} [i] \right) \\ & \left. + d_3 \sum_{v=1}^N \mathbf{1}_{((S_h[v]=K) \cap (S_{h-1}[v] \neq K))} \right] e^{-p(t-t_h)}, \end{aligned} \tag{12}$$

ahol  $a_j^i(t)$  a feltétel nélküli intenzitásfolyamat,  $\mathbf{1} = [1, 1, \dots, 1] \in \mathbb{R}^{N \times 1}$  az összegző vektor, és ahogy korábban,  $\mathbf{1}_{(\cdot)}$  jelöli az indikátorfüggvényt, amelyet vektorok

esetében annak elemein értelmezünk, azaz annak értéke is vektor. Az  $(S_h > S_{h-1})$  és az  $(S_h < S_{h-1})$  összehasonlításokat így a vektorok elemein végezzük el.<sup>6</sup> A hitelminősítések közötti átmeneteket megbontva, le-  $(1_{S_h > S_{h-1}})$  és felminősítések  $(1_{S_h < S_{h-1}})$  formájában kerülnek felhasználásra. Az  $\mathbf{1}$  vektort használjuk, hogy összegezzük ezeket a vektorokat az összes vállalatra, vagy éppen a korábban bevezetett  $[i]$  jelöléssel hivatkozunk a vektor  $i$ -edik elemére.

Így már láthatjuk, hogy a feltételes intenzitásfolyamat minden időpontban a feltétel nélküli intenzitásfolyamat és egy speciális tényező szorzataként áll elő. A tényező függ a múltbeli hitelminősítés-változásoktól és a modell paramétereitől, amelyeket a  $\{d_1^{le}, d_1^{fel}, d_2^{le}, d_2^{fel}, d_3, p\}$  halmazzal adhatunk meg. Értelemszerűen  $d_1^{le}$  és  $d_1^{fel}$  egy tetszőleges vállalat hitelbesorolásának változására vonatkozó érzékenységet, míg  $d_2^{le}$  és  $d_2^{fel}$  a vizsgált vállalat saját hitelminősítésének változására vonatkozó érzékenységet mutatják. Hasonló szerepet kap  $d_3$ , azonban ez kifejezetten a csődesemények hatását számszerűsíti. Végül  $p$  a hatások lecsengését szabályozó érték. Magasabb  $p$ -érték megadásával a múltbeli hitelminősítések hatását kevésbé vesszük figyelembe, ami miatt egy-egy bejelentés kevesebb ideig éreztetni a hatását. Hasonló exponenciális lecsengő függvényt használt csődmodelljében Zheng [2013] is. A  $p$  paraméter még fontos szerepet kap az eredményeink ismertetésekor, ahogy arra majd az utolsó fejezetben visszatérünk.

Ez a modellkeret lehetővé teszi, hogy Micu és szerzőtársai [2006], Finnerty és szerzőtársai [2013], Wengner és szerzőtársai [2015] és Jorion–Zhang [2009] empirikus megfigyeléseit beillesztjük a modellbe. Megfelelő paraméterbeállításokkal a (12) egyenletben szereplő kiigazító tényező csökkenti az intenzitás folyamatát az  $i' \neq i$  vállalatoknak az  $i$  leminősítése után, míg növeli azt az  $i$ -edik esetben. Egy csődesemény minden vállalat intenzitásfolyamatát növeli. Hogy az újabb események nagyobb súlyt kapjanak a korábbiakkal szemben, az intenzitásfolyamatban bekövetkező változások hatása exponenciális ütemben csökken az idő múlásával.

Végül specifikálni kell a (12) egyenletben szereplő  $j$  index értékékkészletét. Erre a kérdésre két alternatív kalibrációs lehetőséget javaslunk. Az első esetben csakis a legrosszabb hitelminősítés intenzitásfolyamatát sokkoljuk, azaz  $j = K$ . Másik megoldásként alkalmazhatjuk a sokkot csupán az aktuális hitelminőségnél rosszabb hitelbesorolásokra. Ebben az esetben a fertőzés ténylegesen befolyásolja a jövőbeli hitelminősítéseket, és nem csak a csődeseményt. A bemutatott számpéldában is ezt a megoldást választjuk. Arra azonban már most felhívjuk a figyelmet, hogy a modell paramétereit a választott opció függvényében újra kell kalibrálni.

Az intenzitásfolyamatoknak a megfigyelt hitelminősítés-változásokon alapuló átskálázása örököli a körkörös csődesemények problémáját. Ez a probléma abból ered, hogy egy vállalat hitelbesorolását meghatározó intenzitásfolyamatok szimulálásához figyelembe kell venni az összes hitelbesorolás-változást. Ezeket azonban az egyes vállalatok folyamatai határozzák meg, amelyek függenek az első vállalat hitelbesorolásának a változásától. A fent megadott általános modellkeretben nem adható analitikus megoldás

<sup>6</sup> Ez nem okoz problémát, hiszen a hitelkategóriákat numerikus skálán definiáltuk a fejezet elején:  $\eta_i^0 \in \{1, 2, \dots, K\}$  tetszőleges  $i = 1, \dots, N$ .

a csődidőpontokra, ezért egy alternatív módszert kell keresni annak érdekében, hogy a modell használható legyen a partnerkockázat árazására.

A Yu [2007] által fejlesztett algoritmus közvetlenül nem alkalmazható a fertőző hitelbesorolás-változások modelljére, hiszen Yu nem foglalkozott hitelminősítési átmenetekkel. Az általa adott eljárásban a vállalatok két állapotot vehetnek fel: fizetőképes, vagy már nem tud teljesíteni. Jelen probléma azonban a hitelminősítési kategóriák miatt sokkal részletesebb. A hitelbesorolások önmagukban is hatással vannak az intenzitásfolyamatra, így egy azokat figyelembe vevő eljárásra van szükség, amihez Yu [2007] módszerének általánosításával juthatunk el. A teljes hazardeljáráshoz elsőként szükség van a kumulált hazardfüggvényre, amit (13) szerint definiálunk:

$$\Lambda_j^i(s|T_m, \mathcal{S}_m, G_m^i, R_m^i) = \int_{t_m}^{t_m+s} \lambda_j^i(u|T_m, \mathcal{S}_m, G_m^i, R_m^i) du. \quad (13)$$

A kumulált hazardfüggvény a feltételes intenzitásfolyamat integrálja, feltéve, hogy a hitelminősítési információt az integrálási időintervallum kezdeténél rögzítjük.

A kumulált hazardfüggvény alapján definiálható a teljes hazardfüggvény:

$$\begin{aligned} \Psi_j^i(t|T_n, \mathcal{S}_n, G_n^i, R_n^i) = & \sum_{f=1}^{\hat{n}} \sum_{m=1}^n \Lambda_{r_f^i}^i(t_m - t_{m-1} | T_{m-1}, \mathcal{S}_{m-1}, G_{m-1}^i, R_{m-1}^i) \mathbf{1}_{(t_m \in (g_{f-1}^i, g_f^i))} + \\ & \sum_{m=1}^n \Lambda_j^i(t_m - t_{m-1} | T_{m-1}, \mathcal{S}_{m-1}, G_{m-1}^i, R_{m-1}^i) \mathbf{1}_{(t_m > g_{\hat{n}}^i)} + \Lambda_j^i(t - t_n | T_n, \mathcal{S}_n, G_n^i, R_n^i). \end{aligned} \quad (14)$$

A (14) egyenlet három részre osztható. Az első rész az  $i$ -edik vállalat intenzitásfolyamatát aggregálja az összes hitelbesorolás-változás időpontján keresztül egészen addig, amíg az  $i$ -edik vállalat utoljára váltott hitelbesorolást. A második tag számszerűsíti az összes lehetséges intenzitásfolyamat-utat az  $i$ -edik vállalat legutolsó átminősítésétől egészen az utolsó hitelminősítői bejelentésig. Az utolsó tag mutatja a kumulált intenzitásfolyamatot a piacot érintő legutolsó hitelminősítés-változástól, hiszen definíció szerint a  $(t_n, t)$  intervallumon egyetlen vállalat sem váltott hitelbesorolást. Vegyük észre, hogy a három tag ugyanazzal a felosztási részletességgel van megadva, de az utolsó két tag függ a lehetséges következő hitelbesorolástól ( $j$ ), míg az első nem. Erre a szétválasztásra azért van szükség, mert a kumulált intenzitásfolyamat változhat, ha bármelyik vállalat hitelminősítői kategóriát vált. Amikor egy vállalat hitelbesorolása változik, akkor az exponenciális változótól való távolsága nullára csökken. Miközben, ha egy másik vállalat vált hitelbesorolást, akkor az előbbi távolság pozitív marad, de a közeledés üteme változik. Tehát, hogy meghatározzuk az exponenciális változó eléréséhez szükséges tényleges időt, minden egyes sebességváltoztató hatást figyelembe kell vennünk.

Végül Yu [2007] tanulmányához hasonlóan definiáljuk a kumulált intenzitásfolyamat általánosított inverzét (15) szerint:

$$\Lambda_j^i(x|T_n, \mathcal{S}_n, G_n^i, R_n^i)^{-1} = \inf \left\{ s : \Lambda_j^i(s|T_n, \mathcal{S}_n, G_n^i, R_n^i) \geq x \right\}. \quad (15)$$

Most, hogy az algoritmus összes építőelemét definiáltuk, lépésről lépésre leírva megadhatjuk:

A KITERJESZTETT TELJES HAZARDELJÁRÁS:

1. Generáljunk véletlenszámokat exponenciális eloszlásból. Jelöljön  $\mathcal{E}$  egy  $N \times K$  méretű mátrixot, amire  $\mathcal{E}_{ij} \sim \text{Exp}(1)$  minden  $i = 1, 2, \dots, N$  és  $j = 1, 2, \dots, K$ .

2. Adjuk meg az indexhalmazok kezdeti értékeit az alábbi formában:  $T_0 = 0$ ,  $S_0 = [\eta_1^0, \eta_2^0, \dots, \eta_N^0]$ ,  $G_0 = 0$  és  $R_0^i = \eta_i^0$ . Ezután találjuk meg az alábbi feladat megoldását:

$$(k_1, r_1) = \underset{\{1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq K\}}{\text{arg min}} \Lambda_j^i(\mathcal{E}_{ij} | T_0, S_0, G_0^i, R_0^i)^{-1}, \quad (16)$$

ahol  $r_1$  jelöli a hitelbesorolást, ahová a  $k_1$  vállalat mozdul, és

$$t_1 = \Lambda_{r_1}^{k_1}(\mathcal{E}_{k_1 r_1} | T_0, S_0, G_0^{k_1}, R_0^{k_1})^{-1} \quad (17)$$

az első átmenet ideje.

3. Frissítsük az indexhalmazokat:

$$T_1 = T_0 \cup t_1, G_1^{k_1} = G_0^{k_1} \cup t_1, R_1^{k_1} = R_0^{k_1} \cup r_1 \quad \text{és} \quad S_1[i] = \begin{cases} S_0[i] & i \neq k_1 \\ r_1 & i = k_1. \end{cases} \quad (18)$$

4. Generáljunk egységnyi exponenciális valószínűségeloszlásból  $K$  elemű független mintát és adjuk az  $\mathcal{E}_{k_1 r_1}$  mennyiséget mindegyikhez. Végül cseréljük le az  $\mathcal{E}$  mátrix  $k_1$ -edik sorát ezekkel az új értékekkel.

5. Az  $m$ -edik hitelminősítési változás meghatározásához oldjuk meg az alábbiakat:

$$(k_m, r_m) = \underset{\{1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq K\}}{\text{arg min}} \left\{ \Lambda_j^i \left[ \mathcal{E}_{ij} - \Psi_j^i \left( t_{m-1} | T_{m-1}, S_{m-1}, G_{m-1}^i, R_{m-1}^i \right) \middle| T_{m-1}, S_{m-1}, G_{m-1}^i, R_{m-1}^i \right]^{-1} \right\} \quad (19)$$

és

$$t_m = t_{m-1} + \Lambda_{r_m}^{k_m} \left[ \mathcal{E}_{k_m r_m} - \Psi_{r_m}^{k_m} \left( t_{m-1} | T_{m-1}, S_{m-1}, G_{m-1}^{k_m}, R_{m-1}^{k_m} \right) \middle| T_{m-1}, S_{m-1}, G_{m-1}^{k_m}, R_{m-1}^{k_m} \right]^{-1}. \quad (20)$$

6. Frissítsük az indexhalmazokat:

$$T_m = T_{m-1} \cup t_m, G_m^{k_m} = G_{m-1}^{k_m} \cup t_m, R_m^{k_m} = R_{m-1}^{k_m} \cup r_m \quad \text{és} \quad S_m[i] = \begin{cases} S_{m-1}[i] & i \neq k_m \\ r_m & i = k_m. \end{cases} \quad (21)$$

7. Generáljunk egységnyi exponenciális valószínűségeloszlásból  $K$  elemű független mintát, és adjuk az  $\mathcal{E}_{k_m m}$  mennyiséget mindegyikhez. Végül cseréljük le az  $\mathcal{E}$  mátrix  $k_m$ -edik. sorát ezekkel az új értékekkel.

8. Ismételjük az algoritmust az 5. ponttól addig, amíg van legalább egy vállalat, amely nem csődött, vagy amíg el nem értük a kívánt szimulációs hosszt.

A korábban adott modellkerettel és a most leírt algoritmussal egy eszközt kaptunk ahhoz, hogy megvizsgáljuk a hitelbesorolás-változások fertőző hatásait az egyes vállalatok csődeseményeire. A megadott algoritmus modellspecifikációk széles köre mellett felhasználható. Továbbá speciális esetben, ahol  $K=2$ , az algoritmus megegyezik az eredeti teljes hazardeljárással. Mint ismert, a hitelértékelési kiigazítás erősen függ a használt modelltől, ezért kifejezetten fontos, hogy olyan modelleket használjunk, amelyek figyelembe veszik az empirikus kutatások eredményeit. A következő részben numerikus példát használva vizsgáljuk meg, hogy a hitelbesorolás-változások fertőző hatásai hogyan érintik a hitelminősítési kiigazítás értékét.

## Numerikus példa

Az előző részben bevezetett modellkeret és a hozzá tartozó megoldó algoritmus intenzitásfolyamatok széles körű családjára alkalmazhatók. A szimulációs algoritmus előnye sztochasztikus intenzitásfolyamatok mellett válik igazán világossá. Az ilyen, úgynevezett Cox-folyamatok esetében minden egyes vállalat minden hitelbesorolásához tartozik egy sztochasztikus intenzitásfolyamat. Ez azonban jelentős paraméterezési kérdéseket vet fel. Ugyan egy vállalatra ilyen típusú elméleti modellt vezetett be Lando [1998], de ő sem tért ki a kalibrálás részleteire. Cox–Ingersoll–Ross-folyamat-alapú sztochasztikus intenzitást használ Brigo–Alfonsi [2005], a szerzők azonban hitelminősítések nélkül csak egy intenzitásfolyamatot, a csődintenzitást definiálják. Erre az ad lehetőséget, hogy a hitelmulasztási ügyletek segítségével megbecsülhetjük a piacon megfigyelt kockázatsemleges csődvalószínűségeket. Hogy elkerüljük a kalibrációs nehézségeket, valamint hogy ne bonyolítsuk túl a magyarázatként funkcionáló jelen fejezetet, egy egyszerűbb példát fogunk felhasználni. Ennek megfelelően konstans intenzitásfolyamatokkal dolgozunk. Ezek lehetőségeket teremtenek arra, hogy kiterjünk a modell kalibrációjára, miközben valós adatokon teszteljük a hitelbesorolás-változások fertőző hatásait.

Számpéldánkban  $N=5$  vállalatot és  $K=9$  hitelminősítési kategóriát vizsgáltunk. Kiindulásként a Moody's által publikált átmenetmátrixot használtuk fel, amelyet az 1. táblázatban közlünk.

A mátrix az egyes hitelminősítési kategóriák közötti egyéves periódusra vonatkozó átmenetvalószínűségeket adja meg. Így például egy A minősítésű vállalat 5,5 százalékos valószínűséggel fog egy év után a Baa hitelminősítési kategóriába tartozni. A fenti átmenetmátrix azonban valós megfigyeléseken alapul, amelyek közvetve nem használhatók fel. Az árazási probléma miatt szükség van a kockázatsemleges mértéken számolt

## 1. táblázat

Kiinduló egyéves átmenetmátrix (százalék)

	Aaa	Aa	A	Baa	Ba	B	Caa	Ca&C	D
Aaa	90,4	8,9	0,6	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
Aa	1,0	90,1	8,4	0,4	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
A	0,1	2,8	90,9	5,5	0,5	0,1	0,0	0,0	0,1
Baa	0,0	0,2	4,8	89,4	4,4	0,8	0,2	0,0	0,2
Ba	0,0	0,1	0,4	6,2	83,4	8,0	0,6	0,1	1,2
B	0,0	0,0	0,1	0,4	5,3	82,2	6,4	0,7	4,7
Caa	0,0	0,0	0,0	0,2	0,5	9,4	68,4	4,7	16,8
Ca&C	0,0	0,0	0,0	0,0	0,4	2,8	10,7	43,5	42,6
D	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	100,0

*Megjegyzés:* az átmenetmátrix elérhető *Moody's* [2011]-ben. Az eredeti átmenetvalószínűségek között szerepel egy WR elnevezésű oszlop, amely a sor szerinti hitelbesorolás visszavonásának a valószínűségét mutatja. Ezt az oszlopot az elemzés során figyelmen kívül hagytuk. Így először töröltük a mátrixból, majd az összes megmaradó átmenetvalószínűséget átskáláztuk, hogy a sorok összege egységnyi legyen.

*Forrás:* *Moody's* [2011].

átmenetvalószínűségi mátrixra. Számos eljárás létezik a valós átmenetvalószínűségek kockázatmentes világba történő átranzformálására. A módszerek egy családja csak a valós átmenetmátrixot és a kockázatsemleges mértéken számolt csődvalószínűségeket használja. Ezeknek az eljárásoknak az a célja, hogy a valós mátrix utolsó oszlopát, a csődvalószínűségeket a piacon megfigyelt kockázatmentes csődvalószínűségekhez kalibrálja, megőrizve az átmenetmátrix-jelleget. Természetesen ennek a feladatnak több megoldása is létezik. *Trueck–Rachev* [2009] alapján a valós és a kockázatsemleges csődvalószínűségek közötti jelentős különbség esetén érdemes az intenzitásmátrix teljes sorát skálázni, amit eredetileg *Lando* [2000] javasolt. Mivel a jelen esetben is jelentős különbségek állnak fenn, ezért ezt a módszert használtuk, amit itt be is mutatunk.<sup>7</sup>

Jelölje  $\Lambda_M$  az intenzitásmátrixot, azaz:

$$\Lambda_M = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1K} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \cdots & \lambda_{2K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{K1} & \lambda_{K2} & \cdots & \lambda_{KK} \end{bmatrix} \quad (22)$$

és

$$Q = \exp(\Lambda_M), \quad (23)$$

<sup>7</sup> Az általunk felhasznált kockázatsemleges csődvalószínűségek is a *Moody's*-től származnak. A *Moody's* rendszeresen közzéteszi az egyes iparágak hitelminősítés szerint bontott medián hitelfelárárt. A pénzügyi szektor 2018. február 20-án közzétett adatait használtuk fel a csődvalószínűség számítására. Az így kapott értékeket a 2. táblázat utolsó sora mutatja.

ahol  $Q$  az átmenetvalószínűség-mátrix. Lando [2000] eljárását követve az intenzitásmátrix egyes sorait úgy kell átskálázni, hogy az azokból újrászámolt átmenetvalószínűség-mátrix utolsó sora a megfigyelt kockázatsemleges csődvalószínűségekkel egyezzen meg. Ennek megfelelően meghatározhatunk egy olyan  $\{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_K\}$  sorozatot, amelyekre teljesül, hogy

$$Q' = \exp(\Lambda'_M) \tag{24}$$

utolsó oszlopa megegyezik az egyes hitelminősítési kategóriákhoz megfigyelt kockázatsemleges csődvalószínűségekkel, ahol

$$\Lambda'_M = \begin{bmatrix} \lambda_{11}\pi_1 & \lambda_{12}\pi_1 & \dots & \lambda_{1K}\pi_1 \\ \lambda_{21}\pi_2 & \lambda_{22}\pi_2 & \dots & \lambda_{2K}\pi_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{K1}\pi_K & \lambda_{K2}\pi_K & \dots & \lambda_{KK}\pi_K \end{bmatrix}. \tag{25}$$

Az így kapott kockázatsemleges átmenetmátrixot a 2. táblázatban közöljük. A következő lépésként a modellben szereplő paramétereket kell meghatározni, ami egy, a fentiekhez hasonló eljáráson keresztül tehető meg.

2. táblázat

Kockázatsemleges egyéves átmenetmátrix (százalék)

	Aaa	Aa	A	Baa	Ba	B	Caa	Ca&C	D
Aaa	79,6	2,9	11,5	4,2	1,0	0,3	0,1	0,0	0,3
Aa	11,1	2,8	41,9	30,6	9,1	2,6	0,7	0,1	1,0
A	3,0	2,6	42,8	35,1	11,3	3,3	0,8	0,1	1,0
Baa	0,8	1,0	17,6	48,2	22,3	7,0	1,4	0,2	1,5
Ba	0,1	0,1	2,4	10,6	62,6	18,8	1,9	0,3	3,1
B	0,0	0,0	0,2	0,7	6,0	77,2	8,9	1,1	5,8
Caa	0,0	0,0	0,0	0,1	0,4	6,6	77,1	4,3	11,5
Ca&C	0,0	0,0	0,0	0,0	0,2	1,3	5,9	70,9	21,7
D	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	100,0

Az empirikus tanulmányok alapján ismert, hogy a hitelminősítési intézmények egyes bejelentései milyen változást okoznak a hitelfelárakban. A kiinduló hitelfelárakra alkalmazva ezeket, minden egyes bejelentéstípusra megbecsülhetjük a módosított kockázatsemleges csődvalószínűségeket. Ekkor minden  $x \in \{d_1^{le}, d_1^{fel}, d_2^{le}, d_2^{fel}, d_3\}$  paramétert úgy kell meghatározni, hogy az eredeti kockázatsemleges intenzitásra teljesüljön az alábbi összefüggés:

$$\Lambda''_M(x) = \begin{bmatrix} \lambda'_{11} & \lambda'_{12}x & \dots & \lambda'_{1K}x \\ \lambda'_{21} & \lambda'_{22} & \dots & \lambda'_{2K}x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda'_{K1} & \lambda'_{K2} & \dots & \lambda'_{KK} \end{bmatrix} \Rightarrow Q''(x) = \exp[\Lambda''_M(x)] \Rightarrow Q''(x)1^K = q^{emp},$$



ahol  $1^K$  a  $K \times K$  egységmátrix utolsó oszlopa, és  $q^{\text{emp}}$  az empirikusan megfigyelt csődvalószínűség. Vegyük észre, hogy csak az átlótól jobbra lévő intenzitásokat sokkoljuk, ahogy azt már korábban kifejtettük! Az egyes paraméterek kalibrált értékeit a 3. táblázatban adtuk meg. A modell szerkezete miatt bizonyos esetekben korrigálni kell az együtthatókkal. Így például az  $i$ -edik vállalat leminősítésekor annak hatása először a (12) egyenletben szereplő multiplikátor első tagjában jelentkezik, majd a harmadik tagban is. Mivel ez az esemény az  $i$ -edik vállalat szémszögéből nem egy társ leminősítésének számít, ezért az első tag hatásának nullával kell megegyeznie, amit a  $d_2^{\text{le}}$  tag korrigálásával érünk el. Ezért adtuk meg a paramétereket bizonyos esetekben egymástól függően. A számpéldában a  $p$  paramétert nem kalibráltuk, hanem az arra vonatkozó érzékenységet három értéken ( $p \in \{0,4, 0,7, 1\}$ ) keresztül szemléltettük.

### 3. táblázat

A modell paramétereinek becsült értékei

Paraméter	Becsült együttható
$d_1^{\text{le}}$	-0,0124
$d_1^{\text{fel}}$	0,0019
$d_2^{\text{le}}$	$0,0076 - d_1^{\text{le}}$
$d_2^{\text{fel}}$	$-0,0129 - d_1^{\text{fel}}$
$d_3$	$0,0607 - d_1^{\text{le}}$

Mivel érezhetjük, hogy a kiinduló hitelbesorolásoknak jelentős szerepe lehet, ezért három csoportot tételeztünk fel, és mindháromban négy alternatív forgatókönyvet vizsgáltunk. A kiemelt szerepet kapó vállalatok Aa, Baa, B, Ca&C kiinduló hitelminősítésekkel szerepelnek, és a csoportokban szereplő fennmaradó négy vállalat hitelminősítését a 4. táblázatban foglaltuk össze.

### 4. táblázat

A fennmaradó négy vállalat hitelminősítése csoportonként

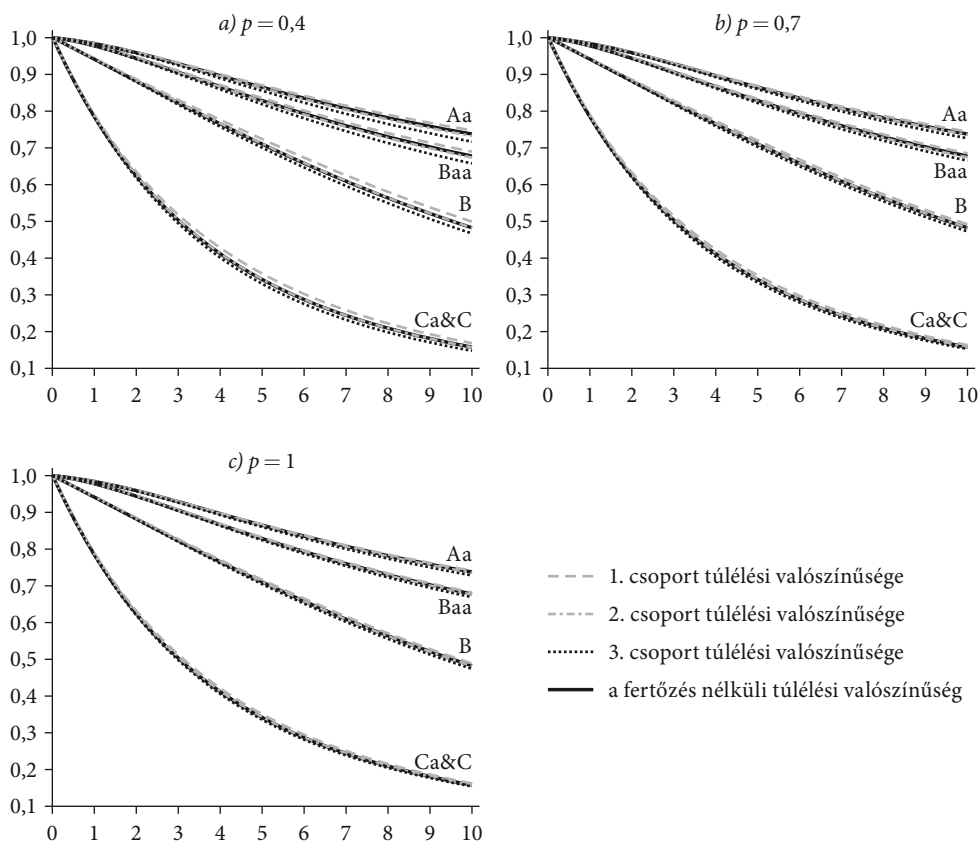
	Hitelbesorolás
1. csoport	Aa, Aa, A, Baa
2. csoport	Aa, Baa, B, Ca&C
3. csoport	Ca&C, Caa, Caa, B

Első lépésként a korábban adott algoritmussal csődeseményeket szimuláltunk egy 10 éves időhorizontra, majd ezekből megbecsültük a túlélési valószínűségeket. Az eredményeket a 2. ábrán szemléltetjük.

A 2. ábráról leolvasható, hogy a túlélési valószínűségekből kirajzolódó különbségek jellemzően néhány év után válnak igazán láthatóvá. Sejtésünknek megfelelően az iparági összetétel és kiinduló hitelbesorolás is fontos szerepet játszik. A jobb hitelminőségű iparágban a vállalat túlélési valószínűsége nő, míg a rosszabb minőségű társak mellett

## 2. ábra

Túlélési valószínűségek különböző kiinduló hitelminősítés és iparági összetétel mellett

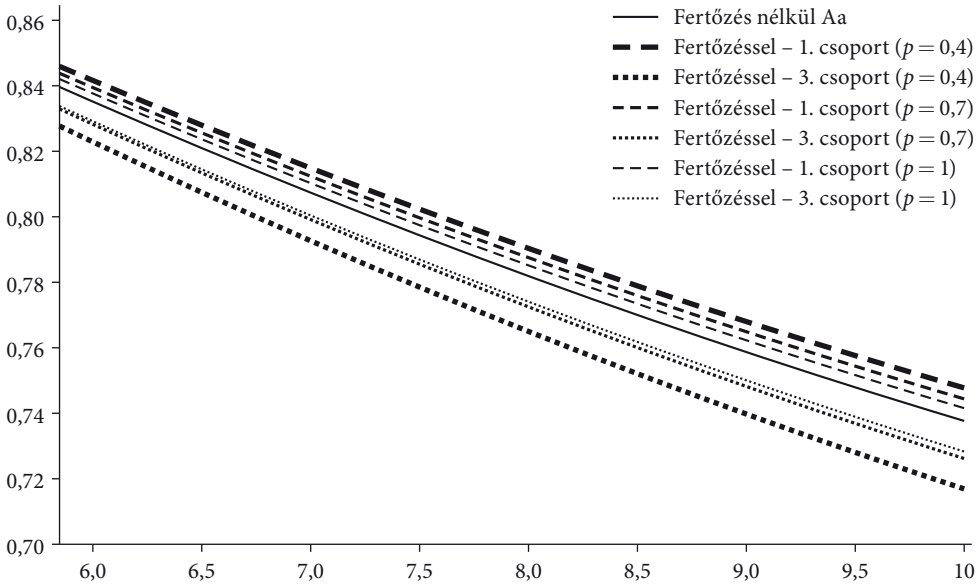


*Megjegyzés:* a vonalak elnevezései a vállalatok kiinduló hitelbesorolását mutatják. A vonal típusa viszont az iparági összetételt jelenti. A szaggatott vonal jelenti az 1. csoportba tartozó vállalat túlélési valószínűségét, a pont-vonal a 2. csoportot mutatja, míg a pontozott vonatkozik a 3. csoportban szereplő vállalatra. Végül a folytonos vonal a fertőzés nélküli túlélési valószínűségeket mutatja.

csökken. Ezek a megfigyelések egybevágóan az empirikus tanulmányok eredményeivel. Jobb iparágban ugyanis a társak leminősítése javíthatja a vállalat felárát, míg a harmadik csoportban bekövetkező csödesemények vagy a társak felminősítése inkább rontja a vállalat túlélési esélyeit. A 2. csoportban, amely egy átlagos iparágat szimbolizál, a fertőzés hatása a túlélési valószínűségekre szinte elhanyagolható. Ennek elsődlegesen az az oka, hogy ilyen iparágakban a hitelminősítésekben bekövetkező változások szétszórva, minden irányba mutatnak. Így azok – szemben az 1. és a 3. csoporttal – gyakrabban kioltják egymás hatását. Továbbá a  $p$  paraméter növekedésével minden esetben csökken a fertőzés hatása, hiszen ekkor az események gyorsabban elvesztik jelentőségüket. Hogy ezt a hatást jobban érzékeltesük, a 3. ábrán bemutatjuk az Aa minősítésű vállalat túlélési valószínűségeit különböző  $p$ -értékek mellett, és felnagyítottuk az intervallum végét.

## 3. ábra

A  $p$  paraméter hatása egy Aa vállalat túlélési valószínűségeire



*Megjegyzés:* a folytonos vonal (fertőzés nélküli eset) felett és alatt a fertőzéssel kapott túlélési valószínűségeket ábrázoljuk egy Aa minősítésű vállalatra. A szaggatott vonalak az 1. csoportból való vállalat túlélési valószínűségei, míg a pontozott esetben a vállalat a 3. csoportba tartozik. A vastagabb görbék alacsony  $p$ -értékkel kerültek meghatározásra, míg a vékonyabbak magasabb érték mellett. Jól kivehető, hogy az egyre vékonyabb görbék egyre kevésbé térnek el a fertőzés nélküli esettől.

A fenti eredményeket átültethetjük az árazás területére. Elsőként az egyoldalú hitelértékelési kiigazítást vizsgáltuk meg, amely szerint csak az egyik fél tekinthető kockázatosnak. Jelen számpéldában feltételeztük, hogy egy hipotetikus bank egy tízéves lejáratú, 100 dollár névértékű kamatláb-csereügyletet köt a vizsgált vállalatokkal. A lehetséges jövőbeli nemteljesítési esemény miatt a bank csökken az árat a korábban leírt módon. Az árkiigazítás nagyságát, az egyoldalú hitelértékelési kiigazítás értékét az 5. táblázatban adtuk meg.

Mivel az egyoldalú hitelértékelési kiigazítás ebben az egyszerű esetben a diszkontált-kitétség-profil egyes pontjainak csődvalószínűségekkel súlyozott összege, ezért eredményeink párhuzamba állíthatók a túlélési valószínűségnél már megfigyelttel. Az 1. csoport esetében minden kiinduló hitelbesorolás mellett az egyoldalú hitelértékelési kiigazítás mértéke csökkenni fog. A 3. csoportra – ahol a túlélési valószínűség csökkenését figyeltük meg – a CVA nő. Az eltérések az Aa és Baa minőségű partnerekre a legjelentősebbek, ahol  $p = 0,4$  mellett több mint 6 százalékos, de még  $p = 1$  mellett is 3 százalékos eltérések adódnak a fertőzés nélküli esethez képest. A 2. csoport értékei a két eset között maradnak, és nem térnek el jelentősen a fertőzés nélküli esettől. Az egyoldalú CVA esete tehát rávilágít, hogy bizonyos esetekben érdemes tovább vizsgálni a hitelminősítési intézmények bejelentései által generált

## 5. táblázat

Az egyoldalú hitelértékelési kiigazítás értéke különböző feltételek mellett

	Aa	Baa	B	Ca&C
$p = 0,4$				
Fertőzés nélkül	0,311	0,386	0,610	1,088
Fertőzéssel – 1. csoport	0,299	0,371	0,585	1,068
Fertőzéssel – 2. csoport	0,317	0,390	0,609	1,089
Fertőzéssel – 3. csoport	0,335	0,410	0,631	1,106
$p = 0,7$				
Fertőzés nélkül	0,311	0,386	0,610	1,088
Fertőzéssel – 1. csoport	0,303	0,376	0,595	1,077
Fertőzéssel – 2. csoport	0,313	0,390	0,610	1,088
Fertőzéssel – 3. csoport	0,324	0,401	0,625	1,099
$p = 1$				
Fertőzés nélkül	0,311	0,386	0,610	1,088
Fertőzéssel – 1. csoport	0,306	0,380	0,600	1,080
Fertőzéssel – 2. csoport	0,313	0,388	0,611	1,088
Fertőzéssel – 3. csoport	0,322	0,396	0,622	1,096

fertőző hatásokat. Ezért most továbblépünk, és a kétoldalú hitelértékelési kiigazítás elemzését végezzük el.

A kétoldalú CVA esetében mindkét fél fontos szerepet kap, így a hipotetikus bank szerepét lecseréltük egy elemzett vállalatra. A 2. ábra eredményeiből már láthatjuk, hogy különösen érdekes eredményt kaphatunk, ha a származtatott termék két oldalán két külön csoportból jövő vállalat áll. Ahogy láttuk, a fertőzés bizonyos esetekben növeli, míg más esetekben csökkenti a túlélési valószínűségeket, ezért különösen érdekesek lehetnek azok a megállapodások, amelyek az 1. és a 3. csoport vállalatai között születnek.

A kétoldalú hitelértékelési kiigazítás első példájában a kamatláb-csereügylet a 3. csoportban szereplő, Baa minősítésű vállalat az 1. csoport különböző besorolású vállalataival kötötte meg. A 6. táblázatból látható, hogy a kétoldalú kiigazítás értéke jelentősen változhat  $p = 0,4$  mellett, de még  $p = 1$  esetében is szignifikáns eltéréseket látunk. A két befektetésre ajánlott minősítésű vállalat közötti ügyleten a kétoldalú CVA akár a másfélszeresére is változhat, miközben a többi szerződésen is jelentősebb különbségeket látunk, mint az egyoldalú esetben. Megállapíthatjuk tehát, hogy a kétoldalú hitelértékelési kiigazítás kombinálja a javuló és a romló túlélési valószínűségeket, amelyek együtt már jelentős eltéréseket okozhatnak.

Hibás lenne azonban levonni azt a következtetést, hogy a hitelbesorolás változásának fertőző hatása minden esetben ilyen mértékű. Ennek érdekében feltételeztünk egy realisabb párosítást, ahol az 1. csoport Aa vállalata köt egy megállapodást a 2. csoport más-más minősítésű szereplőivel. Ilyenkor az esetek többségében nem látunk

## 6. táblázat

Kétoldalú hitelértékelési kiigazítás, 1. csoport–3. csoport

	Fertőzés nélkül	Fertőzéssel			Fertőzéssel/fertőzés nélkül (százalék)		
		$p=0,4$	$p=0,7$	$p=1$	$p=0,4$	$p=0,7$	$p=1$
Fedezet nélkül							
1. csoport, Aa – 3. csoport, Baa	-0,048	-0,084	-0,073	-0,063	177,1	152,2	133,0
1. csoport, B – 3. csoport, Baa	0,337	0,287	0,304	0,314	85,2	90,3	93,3
1. csoport, Ca&C – 3. csoport, Baa	0,897	0,861	0,873	0,881	96,0	97,3	98,2
Fedezettel							
1. csoport, Aa – 3. csoport, Baa	-0,010	-0,014	-0,013	-0,011	144,5	126,7	113,7
1. csoport, B – 3. csoport, Baa	0,044	0,038	0,040	0,042	86,4	90,6	94,6
1. csoport, Ca&C – 3. csoport, Baa	0,142	0,136	0,138	0,140	95,9	97,1	98,4

*Megjegyzés:* a bemutatott kétoldalú hitelértékelési kiigazítás értékei a sor szerinti első vállalat szemszögéből vannak számolva, de természetesen a fertőzés mindkét vállalat hitelminősítés-átmeneteit érinti.

## 7. táblázat

Kétoldalú hitelértékelési kiigazítás, 2. csoport–1. csoport

	Fertőzés nélkül	Fertőzéssel			Fertőzéssel/Fertőzés nélkül (százalék)		
		$p=0,4$	$p=0,7$	$p=1$	$p=0,4$	$p=0,7$	$p=1$
Fedezet nélkül							
2. csoport, Baa – 1. csoport, Aa	0,104	0,116	0,115	0,110	111,9	110,9	105,5
2. csoport, B – 1. csoport, Aa	0,395	0,404	0,401	0,402	102,4	101,5	101,9
2. csoport, Ca&C – 1. csoport, Aa	0,940	0,951	0,946	0,944	101,2	100,6	100,4
Fedezettel							
2. csoport, Baa – 1. csoport, Aa	0,009	0,010	0,010	0,009	116,6	116,0	105,6
2. csoport, B – 1. csoport, Aa	0,051	0,052	0,051	0,051	101,2	100,2	100,6
2. csoport, Ca&C – 1. csoport, Aa	0,148	0,148	0,147	0,148	100,3	99,7	100,0

*Megjegyzés:* a bemutatott kétoldalú hitelértékelési kiigazítás értékei a sor szerinti első vállalat szemszögéből vannak számolva, de természetesen a fertőzés mindkét vállalat hitelminősítés-átmeneteit érinti.

szignifikáns változást. Ez alól kivételt képez a Baa–Aa közötti kétoldalú hitelértékelési kiigazítás, amelynek mértéke jelentősen változik a fertőzéssel.

Végül a 6. és 7. táblázatban kiszámoltuk a változó letétl kapott kétoldalú hitelértékelési kiigazítás értékét is. Mint az ismert, a kétoldalú letéti megállapodás csökkenti a hitelértékelési kiigazítás értékét, így abszolút értékben kisebb értékeket mutatunk a táblázatok

megfelelő oszlopaiban. Viszont fontos látnunk, hogy a letéti megállapodás (*Credit Support Annex, CSA*) megléte nem feltétlenül enyhíti a fertőzés szerepét. Pontosabban, nem tudunk megfogalmazni egy általános érvényű megállapítást, mivel ahogy a bemutatott példákön látjuk, a fedezet növelheti is, és csökkentheti is a fertőzés hatását.

A bemutatott példák tehát arra mutatnak rá, hogy a hitelminősítói bejelentéseket követő fertőző hatások nem minden esetben hagyhatók figyelmen kívül a hitelértékelési kiigazítás számítása során. Amennyiben a szerződő felek olyan iparágakban szerepelnek, ahol a hitelbesorolások jelentős koncentrációja figyelhető meg, akkor a kétoldalú hitelértékelési kiigazítás számításakor fontos a hitelminősítói bejelentések fertőző hatásait figyelembe venni. Az egyoldalú CVA csak akkor tér el jelentősen, ha a fertőző hatások perzisztensek.

Azokban az iparágakban azonban, ahol a hitelminősítések egyenletesen oszlanak meg, a fertőző hatások elhanyagolhatók. Ilyenkor a hitelminősítési változások hajlamosak kioltani egymás hatását, ezért a partnerkockázat mérésekor sem okoznak jelentős hatást.

## Összefoglalás

A hitelminősítő intézmények bejelentéseinek információtartalma az empirikus szakirodalom régóta vitatott témája. Egyes szerzők szerint a piacok már korán felkészülnek a bejelentésre, míg újabb tanulmányok rámutatnak, hogy bizonyos piaci faktorok reagálnak a hitelminősítói bejelentésre. Többek között ilyen piaci faktor az érintett és a nem érintett vállalatok CDS-felárai. Ebben a tanulmányban azt vizsgáltuk meg, hogy miként hatnak ezek a változások a hitelértékelési kiigazításra.

Elsőként bevezettük a fertőző csődesemények egy általánosítását, amely magába foglalja a le- és felminősítések hatását az érintett vállalatra és annak társaira. Mivel a modell örökölte a körkörös csődesemények problémáját, ezért szükség volt egy eljárásra, amellyel csődeseményeket szimulálhattunk. Erre a problémára a Yu [2007] által fejlesztett teljes hazardépítési módszer egy általánosított verzióját adtuk válaszul. Végül egy numerikus példát használva elemeztük a hitelminősítési kategóriában bekövetkező változások számszerűsített hatását az egy- és kétoldalú hitelértékelési kiigazításra. Eredményeink azt mutatják, hogy a hitelbesorolásban bekövetkező változások hatása nem minden esetben elhanyagolható.

Olyan iparágakban, ahol a hitelbesorolások jobban koncentrálnak, a csődvalószínűségek jelentősen változhatnak. Ezek kihatnak az egyoldalú hitelértékelési kiigazítás értékére: vagy növelik, vagy csökkentik azt. Amennyiben azonban a hitelminősítói bejelentések hatásainak időbeli perzisztenciáját csökkentjük, akkor az egyoldalú hitelértékelési kiigazításban látott eltérések is eltűnnek. Valamelyest másként reagál a kétoldalú hitelértékelési kiigazítás, amely aggregálja a partnerek csődvalószínűségében bekövetkező változásokat. Emiatt ez akár kevésbé tartós hatások mellett is jelentősen változhat a fertőzés bevezetésével. Ez a megfigyelés fedezet mellett is igaz.

Más esetekben, ahol az iparág összetétele a hitelminősítói kategóriák tekintetében egyenletesebb, a hitelbesorolásból bekövetkező fertőző hatások sokkal gyengébbek. Így ekkor nem figyeltünk meg jelentős változást a hitelértékelési kiigazítás értékében.

*Hivatkozások*

- BAO, Q.–CHEN, S.–LI, S. [2012]: Unilateral CVA for CDS in a contagion model with stochastic pre-intensity and interest. *Economic Modelling*, Vol. 29. No. 2. 471–477. o. <https://doi.org/10.1016/j.econmod.2011.12.002>.
- BIELECKI, T. R.–CIALENCO, I.–IYIGUNLER, I. [2013]: Collateralized CVA valuation with rating triggers and credit migrations. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, Vol. 16. No. 2. 1350009. <https://doi.org/10.1142/S021902491350009X>.
- BRIGO, D.–ALFONSI, A. [2005]: Credit default swap calibration and derivatives pricing with the SSRD stochastic intensity model. *Finance and Stochastics*, Vol. 9. No. 1. 29–42. o. <https://doi.org/10.1007/s00780-004-0131-x>.
- BRIGO, D.–CHOURDAKIS, K. [2009]: Counterparty risk for credit default swaps: Impact of spread volatility and default correlation. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, Vol. 12. No. 7. 1007–1026. o. <https://doi.org/10.1142/S0219024909005567>.
- BRIGO, D.–MORINI, M.–PALLAVICINI, A. [2013]: Counterparty credit risk, collateral and funding: with pricing cases for all asset classes. John Wiley & Sons, <https://doi.org/10.1002/9781118818589>.
- CANABARRO, E.–DUFFIE, D. [2003]: Measuring and marking counterparty risk. Megjelent: ALM of financial institutions, institutional investor books. Euromoney Institutional Investor, <https://www.darrellduffie.com/uploads/surveys/DuffieCanabarro2004.pdf>.
- DAVIS, M.–LO, V. [2001]: Infectious defaults. *Quantitative Finance*, Vol. 1. No. 4. 382–387. o. <https://doi.org/10.1080/713665832>.
- FINNERTY, J. D.–MILLER, C. D.–CHEN, R.-R. [2013]: The impact of credit rating announcements on credit default swap spreads. *Journal of Banking & Finance*, Vol. 37. No. 6. 2011–2030. o. <https://doi.org/10.1016/j.jbankfin.2013.01.028>.
- HITE, G.–WARGA, A. [1997]: The effect of bond-rating changes on bond price performance. *Financial Analysts Journal*, Vol. 53. No. 3. 35–51. o. <https://doi.org/10.2469/faj.v53.n3.2083>.
- HULL, J. C.–WHITE, A. [2000]: Valuing credit default swaps ii: modeling default correlations. *The Journal of Derivatives*, Vol. 8. No. 3. 12–21. o. <https://doi.org/10.3905/jod.2001.319153>.
- HULL, J.–PREDESCU, M.–WHITE, A. [2004]: The relationship between credit default swap spreads, bond yields, and credit rating announcements. *Journal of Banking & Finance*, Vol. 28. No. 11. 2789–2811. o. <https://doi.org/10.1016/j.jbankfin.2004.06.010>.
- JARROW, R. A.–YU, F. [2001]: Counterparty risk and the pricing of defaultable securities. *The Journal of Finance*, Vol. 56. No. 5. 1765–1799. o. <https://doi.org/10.1111/0022-1082.00389>.
- JORION, P.–ZHANG, G. [2009]: Credit contagion from counterparty risk. *The Journal of Finance*, Vol. 64. No. 5. 2053–2087. o.
- LANDO, D. [1998]: On Cox processes and credit risky securities. *Review of Derivatives Research*, Vol. 2. No. 2–3. 99–120. o. <https://doi.org/10.1007/BF01531332>.
- LANDO, D. [2000]: Some elements of rating-based credit risk modeling. Megjelent: *Jegadeesh, N.–Tuckman, B. (szerk.): Advanced fixed-income valuation tools*. IEEE Computer Society Press, 193–215. o.
- LEUNG, K. S.–KWOK, Y. K. [2009]: Counterparty risk for credit default swaps: Markov chain interacting intensities model with stochastic intensity. *Asia-Pacific Financial Markets*, Vol. 16. No. 3. 169–181. o. <https://doi.org/10.1007/s10690-009-9091-7>.
- LEUNG, S. Y.–KWOK, Y. K. [2005]: Credit default swap valuation with counterparty risk. *The Kyoto Economic Review*, Vol. 74. No. 1. 25–45. o. <https://doi.org/10.11179/ker.74.25>.

- MICU, M.–REMOLONA, E.–WOOLDRIDGE, P. [2006]: The price impact of rating announcements: evidence from the credit default swap market. *BIS Quarterly Review*, Vol. 2. Június, 55–65. o. [https://www.researchgate.net/publication/4735952\\_The\\_Price\\_Impact\\_of\\_Rating\\_Announcements\\_Evidence\\_From\\_the\\_Credit\\_Default\\_Swap\\_Market/link/0deec51939842a06d500000/download](https://www.researchgate.net/publication/4735952_The_Price_Impact_of_Rating_Announcements_Evidence_From_the_Credit_Default_Swap_Market/link/0deec51939842a06d500000/download).
- MOODY'S [2011]: Corporate Default and Recovery Rates 1920–2010. *Global Corporate Finance*, február 28. <http://efinance.org.cn/cn/FEben/Corporate%20Default%20and%20Recovery%20Rates,1920-2010.pdf>.
- NORDEN, L.–WEBER, M. [2004]: Informational efficiency of credit default swap and stock markets: The impact of credit rating announcements. *Journal of Banking & Finance*, Vol. 28. No. 11. 2813–2843. o. <https://doi.org/10.1016/j.jbankfin.2004.06.011>.
- SCHÖNBUCHER, P. J.–SCHUBERT, D. [2001]: Copula-dependent default risk in intensity models. *Műhelytanulmány*, <https://pdfs.semanticscholar.org/7720/54fccbe6c6afa808c07e9f06fa6bbca6ae5.pdf>.
- STEINER, M.–HEINKE, V. G. [2001]: Event study concerning international bond price effects of credit rating actions. *International Journal of Finance & Economics*, Vol. 6. No. 2. 139–157. o. <https://doi.org/10.1002/ijfe.148>.
- TRUECK, S.–RACHEV, S. T. [2009]: Rating based modeling of credit Risk: Theory and application of migration matrices. *Academic Press*, <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-373683-3.X0001-2>.
- WALKER, M. B. [2006]: Credit default swaps with counterparty risk: A calibrated Markov model. *Journal of Credit Risk*, Vol. 2. No. 1. 31–49. o. <https://doi.org/10.21314/JCR.2006.031>.
- WEINSTEIN, M. I. [1977]: The effect of a rating change announcement on bond price. *Journal of Financial Economics*, Vol. 5. No. 3. 329–350. o. [https://doi.org/10.1016/0304-405X\(77\)90042-3](https://doi.org/10.1016/0304-405X(77)90042-3).
- WENGER, A.–BURGHOF, H.–P.–SCHNEIDER, J. [2015]: The impact of credit rating announcements on corporate CDS markets – are intra-industry effects observable? *Journal of Economics and Business*, Vol. 78. 79–91. o. <https://doi.org/10.1016/j.jeconbus.2014.11.003>.
- YI, C. [2011]: Dangerous knowledge: Credit value adjustment with credit triggers. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, Vol. 14. No. 06. 839–865. o. <https://doi.org/10.1142/S0219024911006395>.
- YU, F. [2007]: Correlated defaults in intensity-based models. *Mathematical Finance*, Vol. 17. No. 2. 155–173. o. <https://doi.org/10.1111/j.1467-9965.2007.00298.x>.
- ZHENG, H. [2013]: Contagion models a la carte: which one to choose? *Quantitative Finance*, Vol.13. No. 3. 399–405. o. <https://doi.org/10.1080/14697688.2012.708428>.