KÖZGAZDASÁGI SZEMLE, LXIII. ÉVF., 2016. MÁJUS (473–500. o.)

KIRÁLY BALÁZS–SIMONOVITS ANDRÁS

Megtakarítás és adózás egy önkéntes nyugdíjrendszerben – ágensalapú modellezés

Az önkéntes nyugdíjrendszer működésének modellezésekor egy korábbi tanulmány (*Simonovits* [2009]) már rámutatott arra, hogy – figyelembe véve a támogatások adóvonzatát – e rendszer gyakran csak egyszerűen a kis keresetű és rövidlátó dolgozók adóját szivattyúzza át a nagy keresetű és előrelátó dolgozókhoz. A főáram kívánalmai szerint a megtakarításokat a különböző mértékben leszámítoló egyének életpálya-hasznosság maximalizálásából vezette le, és a technikai akadályok miatt eltekintett a több évtizedes megtakarítási folyamat idején lehetséges változásoktól. Ebben a cikkben egyszerűbb viselkedési szabályokat feltételezünk, cserében képesek vagyunk a dinamikus vizsgálatokra. Először megelégszünk a globális tanulással, ekkor analitikus eredményeket tudunk bizonyítani. Ha a lokális tanulást is vizsgálni kívánjuk, akkor ágensalapú modellezést kell használnunk, s le kell mondanunk az analitikus eredményekről. Összességében a lokális tanulás tovább javítja a globális tanulást.*
Journal of Economic Literature (JEL) kód: H55, D91.

Bevezetés

A fejlett világban mindenütt évtizedek óta létezik *kötelező* társadalombiztosítási vagy tőkésített magánnyugdíjrendszer. Ezeket a rendszereket azonban általában *önkéntes* nyugdíjrendszerek egészítik ki. Az itt felhalmozott kiegészítő megtakarításokat általában a részvevők nyugdíjazásáig le kell kötni, cserében különféle formájú adókedvezményeket élveznek.

A kormányzati támogatások mellett a következőképpen szokás érvelni: célszerűtlen lenne a kötelező nyugdíjakat olyan bőségesre tervezni, hogy a legszegényebb/

* Köszönetünket fejezzük ki *Cars Hommesnek, Vicsek Tamásnak* és *Vincze Jánosnak* hasznos tanácsaikért. Simonovits András kutatását az OTKA K108668. számú pályázata támogatta.

Király Balázs, BME Fizikai Tudományok Doktori Iskola, BME Fizikai Intézet, PhD-hallgató (e-mail: kiraly.balazs.graf@gmail.com).

Simonovits András, MTA KRTK Közgazdaság-tudományi Intézet, BME Matematikai Intézet (e-mail: simonovits.andras@krtk.mta.hu).

A kézirat első változata 2016. február 15-én érkezett szerkesztőségünkbe.

DOI: http://dx.doi.org/10.18414/KSZ.2016.5.473

leginkább rövidlátó dolgozók ne szorulnának kiegészítő nyugdíjra (lásd például *Poterba–Venti–Wise* [1996]). E rendszerek ellenzői attól tartanak, hogy a támogatások rosszul célzottak, mert főleg a jómódúak megtakarításait ösztönzik, miközben a szegények adóterheit növelik, ezzel torzul az újraelosztás (lásd például *Engen–Gale–Scholz* [1996], *Duflo és szerzőtársai* [2007]). Itt is érvényes *Campbell* [2006] nagyon fontos észrevétele: „zavaros pénzügyi termékek a naiv háztartások terhére támogatnak kifinomultakat”. A két álláspont között szintézisre törekedett *Hubbard–Skinner* [1996]). Utalunk az *OECD* [2005] és *Hinz és szerzőtársai* [2013] kötetre, amely a különféle országok idevágó gyakorlatát összegezte. Eddig még e láthatatlan „különadók” nem voltak nyomasztók (bár az Egyesült Államokban körülbelül a GDP 0,7 százalékára rúgnak), de a kötelező nyugdíjrendszerek tervezett zsugorítása esetén ez megváltozna. Ebben a cikkben egy modellcsalád segítségével azt vizsgáljuk, hogyan csökkenti a globális és a lokális tanulás a torz *(perverse)* újraelosztást.

Modigliani–Brumberg [1954] és *Samuelson* [1958] munkái nyomán az életciklus és az együttélő nemzedékek modelljeit széles körben kezdték alkalmazni. Új korszak kezdődött *Auerbach–Kotlikoff* [1987] könyvével, amely a korábbi parciális egyensúlyi megközelítést általános egyensúlyivá általánosította, ahol nemcsak a megtakarítások függnek a kamatlábaktól, de a felhalmozott tőkén keresztül a kamatlábak is függnek a megtakarításoktól. A kötelező és önkéntes nyugdíjak külön is megjelentek a megtakarításokban, így e modellek reálisabbak lettek. Például *Fehr–Habermann–Kindermann* [2008] megmutatta, hogy az önkéntes nyugdíjrendszer reformja javítana a jövő nemzedékek jólétén, de rontana a jelenlegién. Ezek a modellek azonban túlzott racionalitást és elemző képességet tételeznek fel a szereplőkről. A racionális várakozások feltevése különösen bonyolulttá teszi e modelleket (vö. *Molnár–Simonovits* [1997]). Ma már jól dokumentált tény, hogy a dolgozó lakosság jelentős része világszerte csak nagyon korlátozott gazdasági elemzésre képes (*Lusardi–Mitchell* [2014]), és emellett nagyon hiányos pénzügyi információkkal rendelkezik (*Barr–Diamond* [2008] Box 4.2), továbbá gyenge az akaratereje a megtakarításhoz.

A nagyon egyszerű életciklusmodellek egy osztályában a kamatlábak és a bérek kívülről adottak (kis, nyitott gazdaság). Ilyen modellekben a különböző dolgozók hagyományos megtakarítási folyamatai függetlenek egymástól. Ha azonban az önkéntes nyugdíjrendszert is bevonjuk az elemzésbe, a támogatások finanszírozása összekapcsolja e folyamatokat. Valóban, még ha egyes dolgozók semmit sem takarítanak meg, egységes adókulcs szerint „különadót” kell fizetniük mások megtakarításainak támogatására. Ez lehet az egyik oka annak, hogy az egyéni optimalizálás végrehajtása az ilyen modellekben nagyon bonyolult [lásd a *Függelék B)* részét], kivéve ha eltekintünk a munka- és a nyugdíjszakasz részekre bontásától (*Simonovits* [2009]).

Az életciklus-megtakarítás realistább megközelítését szorgalmazza a viselkedési közgazdaságtan (az úttörő *Laibson* [1997] cikkétől *Chetty* [2015] áttekintéséig). *Findley–Caliendo* [2008] a racionális megközelítésen belül a rövid tervezési horizont folyamatos kiterjesztésével próbálta elemezni a kérdéskört. Új lehetőségeket ad a közgazdasági elemzésnek az *ágensalapú modellezés* (például *Gigerenzen–Selten* [2002] és

Tesfatsion [2006]). E megközelítés közgazdaságtani alkalmazását a következőképpen hasonlíthatjuk a racionális döntés paradigmájához.

A racionális paradigmában a szereplők teljesen átlátják a gazdaság működését. Még a decentralizált piaci csere modellezésében is fel kell tételezni egy piaci kikiáltót, aki pillanatonként összesíti a különféle termékpiacok keresleti-kínálati viszonyait, és képzeletben e szerint igazítja a termékek piaci árát – egészen addig, amíg az összes piacon közelítően beáll az egyensúly. Ekkor kihirdeti a közelítő egyensúlyi árakat, amelyek mellett a piaci szereplők már képesek piaci kereskedést folytatni. Az azonban homályban marad, hogy addig mi történik. A tényeges piaci csere legszemléletesebb elemzését *Kirman–Vriend* [2001] nyújtja, többek között a marseille-i halpiac eladói és vevői viselkedését, a szereplők lojalitását és a keletkező árszóródást magyarázza meg. Rokon megközelítés a genetikai algoritmus, amelynek jeles hazai alkalmazója Benedek Gábor (*Benedek* [2003]).

A rokon témájú adócsalás problémáját már sokan elemezték ágensalapú modellezéssel: többek között *Szabó–Gulyás–Tóth* [2009], *Méder–Simonovits–Vincze* [2012] és *Pickhard–Prinz* [2014]. *Axtell–Epstein* [1999] a nyugdíjba vonulási döntést elemezte ágensalapú modellel, s ez közvetlenül szintén érinti a nyugdíjrendszert. A megtakarítási folyamat ágensalapú megközelítése azonban még alig kezdődött el. *Varga–Vincze* [2016] a hagyományos megtakarítás folyamatát vizsgálta végtelen élettartamú fogyasztók havi megtakarításainak ágensalapú megközelítésében, ahol nincs kötelező vagy önkéntes nyugdíjrendszer. Három megtakarítási típust különböztettek meg a szerzők: prudens (óvatos), rövidlátó és előrelátó. Bár állandóan tanulnak egymástól, abban a modellben e három típus az idők végezetéig együtt él.

Modellünkről

A jelen cikk az ágensalapú modellezés megközelítést a megtakarítások sajátos fajtájára, az *életpálya-megtakarításokra* alkalmazza. Egyetlen empirikus tényt próbálunk megmagyarázni: bár a magasabb keresetűek nagyobb arányban és relatíve nagyobb tagdíjjal vesznek részt az önkéntes nyugdíjrendszerekben, adott keresetűek között is változik a részvételi arány és a megtakarítás mértéke. Ezért ebben a cikkben csak azonos keresetű dolgozókat modellezzünk. Az elemzés irányai a következők.

a) Bevezetve az életkorfüggő megtakarításokat, a modellben vannak a dolgozók, akik $R \geq 1$ időszakon keresztül takarékoskodnak, és vannak a nyugdíjasok, akik a maradék $D - R \geq 1$ időszak folyamán felélik-e megtakarításokat, ahol a D a teljes felnőtt élettartam. A modellcsaládban R és D időszakok mértékegysége a felbontás finomságának függvényében változik: lehet év, évtized és negyedévszázad is.

b) Közepes nagyságú kötelező nyugdíjrendszert feltételezve, az életpálya-fogyasztásukat kisimítani kívánó, előrelátó dolgozók is közepes mennyiséget takarítanak meg, a hitelkorlát léte pedig megakadályozza eladósodásukat.

c) Megfelelő adókedvezményekkel ösztönözve a megtakarításokat, a kötelező rendszer mérete csökkenthető, de ennek hatására a különadók növekednek.

Az egyszerűség kedvéért stacionárius népességet feltételezünk, kizárva a gazdasági növekedést, az inflációt és a kamatokat is. (*Butrica–Smith* [2016] empirikus tanulmány éppen azt elemezte, hogy az egyesült államokbeli, úgynevezett 401(k) önkéntes rendszerben hogyan változott a részvétel és a tagdíj a gazdasági ciklus hatására.) További egyszerűsítés, hogy eltekintünk az önkéntes nyugdíj-megtakarítási plafontól, ezáltal kizárjuk a támogatás nélküli megtakarításokat is. (Ezt a két fontos tényezőt vizsgálta a már említett *Simonovits* [2009] cikk is, de más megszorítással.) Az egyéni döntések makrohatását úgy tudjuk eltüntetni, ha feltesszük, hogy kontinuum számosságú dolgozó létezik. Két típust különböztetünk meg: a rövidlátót és az előrelátót (vö. *Feldstein* [1985]). Két mutatót alkalmazunk: 1. a *belső szórás* az egyedi fogyasztási pályák átlagos szórása; 2. a *külső szórás* a fogyasztási pályák átlagának a szórása.

Fontosabb eredményeink a következők.

a) Passzivitás esetén az előrelátók egyszerűen kihasználják a rövidlátókat.

b) Ha a rövidlátók *aktivizálódnak*, akkor az adókulcs és a támogatási kulcs hányadosával megbecsülik az előrelátók megtakarítását, és e becslés adott hányadát (relatív megtakarítási hajlandóság) képesek megtakarítani. Statikus modellünket dinamizálja, hogy minden időszakban a legidősebb korosztály kihal, és megjelenik a legfiatalabb korosztály. A folyamat gyorsan tart az állandósult állapothoz, s a rövidlátók csökkenthetik veszteségeiket.

c) Átvéve az ágensalapú modellezés megközelítésből a lokális tanulás fogalmát, a felzárkózási folyamat tovább csökkenti a torz újraelosztást. Ezt a pontot hét alpontban részletezzük.

1. Az alapfutásban a háromfajta (erősen, közepesen és enyhén) rövidlátó típus átlagos megtakarítási pálya közeledik egymáshoz, de különbségük fennmarad.
2. Szimmetrikusan növelve a két szélső és a középső rövidlátó típus relatív megtakarítási hajlandósága közti különbséget (a rést), mindkét szórás csökken, de heves ingadozással.
3. A különböző hajlandóságú típusok számát növelve, csökken a külső szórás, de nő a belső szórás.
4. Véletlenül perturbálva az eredetileg is véletlenül létrehozott hálózatot, jobban kiegyenlítődik a rövidlátó típusok átlagos megtakarítása.
5. Negyedére csökkentve az új hálózat sűrűségét, a tanulás lassul, ezért a három (átlagos) rövidlátó pálya tartósan elkülönül.
6. A típusok számának növelése nem javítja az alkalmazkodást.
7. Rövidebb időszakokra (évtized helyett akár évekre) bontva a folyamatot, felgyorsul a tanulási folyamat, de nem csökken a külső szórás, és nő a belső szórás.

Tájékoztatásul a *1. táblázatban* öt ország kötelező és önkéntes nyugdíjrendszerének két jellegzetességével (a degresszió foka és a rendszer mérete) hasonlítjuk össze saját modellünket. A degresszió azt mutatja, hogy a nyugdíj mennyire *nem* arányos a keresettel. Vegyük még figyelembe, hogy a méret megállapítása nem is olyan egyszerű, mivel a plafon relatív – bruttó átlagkeresethez viszonyított – nagysága mellett a járulékkulcsot és a támogatási kulcsot is figyelembe kell venni.

1. táblázat
Válogatott rendszerek válogatott vonásai

Ország	Kötelező		Önkéntes	
	degresszív	méret	degresszív	méret
Egyesült Államok	közepes	közepes	arányos	közepes
Németország	gyenge	nagy	közepes	kicsi
Hollandia	közepes	nagy	arányos	közepes
Csehország	erős	nagy	erős	kicsi
Magyarország	gyenge	nagy	arányos	nagy
Modell	közepes	közepes	arányos	nagy

A táblázat alapján láthatjuk, hogy modellünk még a német és a magyar modellen is túlmegy a kötelező rendszer arányosságában, s az amerikai és a holland kötelező rendszert másolja a méretben. Az önkéntes nyugdíjrendszer arányosságában viszont modellünk az amerikai, a holland és a magyar rendszert követi, és a magyarra hasonlít a nagy potenciális méretet illetően. A táblázat nem mutatja, de megemlítjük, hogy az önkéntes rendszer életjáradékosításában a modell a német modellre hasonlít. Összegezve, különböző országok nyugdíjrendszerének különböző vonásait vettük át, hogy a modell a lehető legegyszerűbb legyen, de tükrözze a tanulási folyamatot. Ha e protomodell beválik, akkor érdemes lehet az egyes országok sajátosságait figyelembe venni a további modellezésben.

A cikk szerkezete a következő: először bemutatjuk, hogy a passzív dolgozók különadója miként csapódik le az előrelátóknál. Ezután a passzív dolgozók aktivizálódnak, és a makroparamétereket követve (globálisan) dinamikusan tanulnak. Majd elemzésünkben megjelenik a lokális tanulás: ágensalapú modellezés. Végül levonjuk a következtetéseket. A *Függelék A)* részében bemutatjuk a két dolgozói–egy nyugdíjas együttélő nemzedékes klasszikus modellben kapott eredményeket. A *B)* rész vázolja a rövidlátó dolgozó racionális modelljének technikai bonyodalmait.

Passzív rövidlátó dolgozók

Ebben a tanulmányban a kötelező és az önkéntes nyugdíjrendszer legegyszerűbb modelljeit elemezzük. Egyszerűsítésként az együtt élő korosztályok egy stacionárius népességet feltételezünk.

Minden időszakban (évben, évtizedben, negyedszázadban) $R > 0$ dolgozó és $D - R > 0$ nyugdíjas korosztály él együtt, R és D természetes szám (D a felnőtt élettartam). Minden korosztálynak kontinuum számosságú tagja van, s így egyéni döntésüknek nincs hatása a rendszer egészére. Az időszak végén minden korosztály egy időszakkal idősebb lesz, de a legidősebb kihal, és a legfiatalabb színre lép. Minden dolgozónak életkorától és a naptári időszaktól függetlenül egységnyi keresete van, amelyből $\tau > 0$ kötelező nyugdíjjárulékot fizet. Bevezetjük a munkában töltött időszaknak a teljes felnőtt, illetve a nyugdíjas élettartamhoz mért arányát:

$$\rho = \frac{R}{D} < 1 \qquad \text{és} \qquad \beta = \frac{\rho}{1-\rho}.$$

Feltéve, hogy a nyugdíjba vonuló korosztályok minden tagja minden időszakban b kötelező nyugdíjat kap, e nyugdíj képlete

$$b = \frac{R\tau}{D-R} = \frac{\rho\tau}{1-\rho} = \beta\tau. \tag{1}$$

A fogyasztói pálya akkor sima, ha a nettó kereset és a nyugdíj egyenlő, azaz $1 - \tau = b$. Némi számolással adódik:

$$\tau = \bar{\tau} = \frac{1}{1+\beta} = 1-\rho.$$

Ösztönzési megfontolásokból a kormányzat e kritikus érték alatt tartja a járulékot: $\tau < \bar{\tau}$. A kötelező rendszer mellett a dolgozók önkéntesen is *takarékoskodnak*, a megtakarítás időszaki értéke $s \geq 0$. Minden forint önkéntes megtakarítást a kormányzat $\alpha > 0$ forint *támogatással* egészíti ki. Ellentétben az irodalom zömével, mi explicite modellezzük e támogatás adóvonzatát: $\theta \geq 0$ a *különadó* kulcsa.

Abból indulunk ki, hogy még az azonos keresetű dolgozók között is különböző a dolgozók megtakarítási hajlandósága. Egyelőre feltesszük, hogy csak két típus létezik: rövidlátó (L) és előrelátó (H): $f_L, f_H > 0$ és $f_L + f_H = 1$, de a következő alfejezettől megbontjuk a rövidlátókat. Egyelőre a megtakarítások csak a típustól függnek (még az életkortól sem): s^L és s^H. Igaz a következő adóegyenlet:

$$\theta = \alpha(f_L s^L + f_H s^H). \tag{2}$$

Most a rövidlátó típus *passzív*, semmit sem takarít meg: $s^L = 0$. Az előrelátó viszont később meghatározandó céllal megtakarít: $s^H > 0$. Ekkor a fogyasztási egyenletek definíció szerint

$$c_{1,L} = 1 - \tau - \theta, \qquad c_{D,L} = b \tag{3L}$$

és

$$c_{1,H} = 1 - \tau - \theta - s^H, \qquad c_{D,H} = \beta[\tau + (1+\alpha)s^H]. \tag{3H}$$

Feltesszük, hogy minden időszakban az előrelátó dolgozó annyit takarít meg, hogy tervezett fogyasztási pályáját kisimítsa:

$$1 - \tau - \theta - s^H = \beta[\tau + (1+\alpha)s^H], \qquad \text{ezért} \qquad s^H = \frac{1-(1+\beta)\tau - \theta}{1+\beta(1+\alpha)}. \tag{4}$$

Szükségünk lesz s^H speciális értékére $\alpha = 0 = \theta$ esetén:

$$s^H(0) = \frac{1-(1+\beta)\tau}{1+\beta}. \tag{4'}$$

Behelyettesítve a (4) összefüggést a (2) speciális alakjába, egy implicit egyenletet kapunk az egyensúlyi adókulcsra:

$$\theta = \alpha f_H s^H = \alpha f_H \frac{\chi - \theta}{1 + \beta(1+\alpha)}, \quad \text{ahol} \quad \chi = 1 - (1+\beta)\tau > 0.$$

Itt χ mutatja a kötelező nyugdíjrendszer által hagyott rést. Innen adódik az *1. tétel.*

1. TÉTEL • *A passzív rövidlátó dolgozók modelljében a kormányzat a következő adókulcsot választja:*

$$\theta^{\circ} = \frac{\alpha f_H \chi}{1 + \beta(1+\alpha) + \alpha f_H} > 0. \tag{5}$$

Ekkor az előrelátók megtakarítása $s^H = \theta^{\circ}/(\alpha f_H)$ és a rövidlátóké nulla.

MEGJEGYZÉSEK

1. Ebben a modellben az önkéntes nyugdíjrendszer egyszerűen jövedelmet csoportosít át a rövidlátóktól az előrelátókhoz. Minél nagyobb a támogatási arány, annál erősebb a torz újraelosztás.

2. Egy ilyen nullaösszegű játékban az önkéntes nyugdíjpillér léte csak akkor indokolható, ha a kötelező nyugdíjrendszer degresszív: $b_i = B_0 + Bw_i$, ahol $B_0 > 0$ és $B > 0$, valamint w_i az i-edik típus keresete. Ezt azonban a keresetek homogenitásának feltevésével kizártuk.

3. Még ezek a képletek is bonyolultak, s az egyes paraméterek hatása távolról sem világos. Például mi történik, ha (irreálisan) a támogatási arány a végtelenbe tart? Az (5) számlálóját és nevezőjét elosztva α-val, $\alpha \to \infty$ esetén $\theta^{\circ}_{\infty} = f_H \chi / (\beta + f_H)$. De $s^H = 0$!

A folytatáshoz bevezetjük a rövidlátó és előrelátó típus átlagos életpálya-fogyasztását:

$$c^L = \rho c_1^L + (1-\rho) c_D^L = \rho(1 - f_H \theta^{\circ}/f_L) \quad \text{és} \quad c^H = \rho(1 + f_L \theta^{\circ}/f_H).$$

A rendszer egyenetlenségét/egyenlőtlenségét két (belső és külső) szórással jellemezzük: a belső az egyenetlen L fogyasztási pályák szórása, a külső pedig az életpályák átlagos fogyasztásának szórása:

$$\varepsilon_I^2 = f_L\left[\rho\left(c_1^L - c^L\right)^2 + (1-\rho)\left(c_D^L - c^L\right)^2\right] \quad \text{és} \quad \varepsilon_E^2 = f_L\left(c^L - \rho\right)^2 + f_H\left(c^H - \rho\right)^2.$$

A megértést elősegítendő, a *2. táblázatban* numerikusan szemléltetjük eredményeinket. Évtizedben számolva: $\mathbf{R = 4}$, $\mathbf{D = 6}$ (a vastag betű és szám arra utal, hogy nem évekről, hanem évtizedekről/negyedszázadról[1] van szó), $\tau = 0{,}2$. Három támogatási arányt modellezünk: $\alpha = 0$, 0,5 és 1, és háromszor több rövidlátó van, mint előrelátó: $f_L = 3/4$ és $f_H = 1/4$. Ahogy az α támogatási arány 0-ról 1-re nő, úgy csökken rövidlátó (L) átlagfogyasztása, $c^L = 0{,}667$-ről 0,654-re. A későbbi összehasonlítás kedvéért közöljük, hogy a külső szórás 0-ról 0,022-re nő, míg a belső alig csökken, és 0,16 körül marad.

[1] Amikor negyedszázadról lesz szó, azt külön megemlítjük.

2. táblázat
Pályák kötelező és önkéntes nyugdíj esetén – passzív L

Támogatási arány	Adókulcs	Előrelátó	Rövidlátó dolgozó	Rövidlátó nyugdíjas	Rövidlátó átlagos	Belső	Külső
		fogyasztás				szórás	
α	θ°	c^H	c_1^L	c_D^L	c^L	ε_I	ε_E
0,00	0,000	0,667	0,800	0,4	0,667	0,163	0,000
0,25	0,007	0,681	0,793	0,4	0,662	0,160	0,008
0,50	0,012	0,691	0,788	0,4	0,659	0,159	0,014
0,75	0,016	0,699	0,784	0,4	0,656	0,157	0,018
1,00	0,019	0,705	0,781	0,4	0,654	0,156	0,022

Aktív rövidlátó dolgozók

Ellentétben az előzőkkel, most feladjuk a rövidlátó dolgozó passzivitását: mérsékelt akaraterőt és értelmet adományozunk a rövidlátó dolgozóknak. Először célszerű az állandósult állapotot, majd a dinamikus változást vizsgálnunk.

Állandósult állapot

Minden rövidlátó dolgozó naivan felteszi, hogy csak ő rövidlátó, a többiek megtakarítása $\tilde{s}$, ezért adóegyenlegük $\theta = \alpha\tilde{s}$, azaz $\tilde{s} = \theta/\alpha$. Ő lelkileg képtelen ennyit félretenni, de adott γ *relatív megtakarítási hajlandóság* esetén $(0 < \gamma \le 1)$

$$s^L = \gamma \frac{\theta}{\alpha}$$

megtakarításra képes. Megtartva az előrelátók (4) megtakarítási egyenletét, s^L megjelenése miatt a (2) mérlegegyenlet módosul:

$$\theta = \gamma f_L \theta + \alpha f_H \frac{\chi - \theta}{1 + \beta(1 + \alpha)}. \tag{6}$$

Innen adódik a 2. tétel.

2. TÉTEL • *Aktív rövidlátó dolgozók esetén az állandósult állapot jellemzői*

$$\theta^\circ = \frac{\alpha f_H \chi}{\nu}, \quad s^H = \frac{(1 - \gamma f_L)\chi}{\nu} \quad \text{és} \quad s^L = \frac{\gamma f_H \chi}{\nu}, \tag{7}$$

ahol

$$\nu = (1 - \gamma f_L)[1 + \beta(1 + \alpha)] + \alpha f_H > 0.$$

MEGJEGYZÉSEK

1. Az aktív rendszer (7) egyensúlyi adókulcsából látszik, hogy minél nagyobb a γ relatív megtakarítási hajlandóság, annál nagyobb az egyensúlyi kulcs, és annál kisebb a torz újraelosztás. Ha $\gamma = 1$ (maximális), akkor paradox módon a rövidlátó előrelátóvá válik: $s^L = s^H$, és mindkét szórás eltűnik: $\varepsilon_I = \varepsilon_E = 0$.

2. Felbonthatjuk a rövidlátókat $n-1>1$ alcsoportra, γ_i hajlandóssággal és $f_i>0$ súllyal ($i=1, \ldots, n-1$):

$$f_L = \sum_{i=1}^{n-1} f_i < 1 \qquad \text{és} \qquad \gamma = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} f_i \gamma_i}{f_L} \leq 1.$$

Ekkor *a 2. tétel* megtakarításai s^L felbontásából adódnak:

$$s^i = \frac{\gamma_i f_H \chi}{\nu}, \qquad i = 1, \ldots, n-1. \tag{7'}$$

Visszatérve a kéttípusú modellhez, a *3. táblázat* a γ relatív megtakarítási hajlandóság hatását mutatja rögzített $\alpha = 1$ támogatási arány esetén (az 1. sor a *2. táblázat* utolsó sora). Ahogy γ 0-ról 1-re emelkedik, az egyensúlyi adókulcs 0,019-ről 0,067-re nő, és mindkét típus fogyasztási pályája kisimul, a külső szórás 0,022-ről 0-ra süllyed, a belső pedig 0,156-ről 0-ra.

3. táblázat
Pályák kötelező és önkéntes nyugdíjra – aktív *L*

Relatív megtakarítási hányad	Adókulcs	Előrelátó	Rövidlátó			Belső	Külső
			dolgozó	nyugdíjas	átlagos		
		fogyasztás				szórás	
γ	θ°	c^H	c_1^L	c_D^L	c^L	ε_I	ε_E
0,00	0,019	0,705	0,781	0,400	0,654	0,156	0,022
0,25	0,023	0,701	0,771	0,423	0,655	0,142	0,020
0,50	0,030	0,696	0,756	0,459	0,657	0,121	0,017
0,75	0,041	0,687	0,728	0,523	0,660	0,084	0,012
1,00	0,067	0,667	0,667	0,667	0,667	0,000	0,000

Dinamikus modell

Előkészítésünk végére érve, rátérhetünk a dinamikus modell leírására. Bevezetjük az életkort: dolgozóknál $a = 1, 2, \ldots, R$ és nyugdíjasoknál $a = R+1, \ldots, D$. E mellett megjelenik a naptári idő: t. Minden időszakban D felnőtt korosztály él együtt, amelyeknek tagjai a $t, t-1, \ldots, t-D+1$-edik időszakban álltak munkába. Elemzési okokból feltesszük, hogy az új korosztály a $t+1$-edik időszakban állt munkába. Mielőtt a részletekbe bocsátkoznánk, megjegyezzük, hogy minden időszak elején a kormányzat nyilvánosságra hozza az adókulcsot, és ennek függvényében a különféle típusú dolgozók megvalósítják időszaki megtakarításukat.

Minden (a, i) párra – ahol $i=L, H$ – az addig felhalmozott megtakarítások állománya eleget tesz egy rekurziónak:

$$S_{a,i,t+a}=S_{a-1,i,t+a-1}+s_{a,i,t+a}, \qquad t=0, 1, 2, \ldots, \tag{8}$$

ahol a kezdeti állapotok adottak:

$$S_{a-1,i,-1}, \qquad a=2, \ldots, R \qquad \text{és} \qquad i=L, H.$$

Információs megfontolásokból lazítunk a (6) adómérlegen, és megengedjük, hogy a kormányzat ideiglenesen többleteket és hiányokat halmozzon föl. Legyen E_t a t-edik időszak támogatása és $\mathcal{D}_t$ az államadósság az időszak végén. Két azonosságot írhatunk föl ($t=0, 1, 2, \ldots$):

$$E_t=\alpha\sum_{i=L}^{H} f_i \sum_{a=1}^{R} s_{a,i,t} \tag{9}$$

és

$$\mathcal{D}_t=\mathcal{D}_{t-1}+E_t-R\theta_t, \qquad \text{ahol} \qquad \mathcal{D}_{-1}=0. \tag{10}$$

A szokásos próba–szerencse módszert alkalmazva a t-edik időszak elején a kormányzat olyan adókulcsot jelent be, amely az előző időszak kiadásait fedezte volna:

$$\theta_t=\frac{E_{t-1}}{R}. \tag{11}$$

Figyeljük meg, hogy ekkor $\mathcal{D}_t=\mathcal{D}_{t-1}+E_t-E_{t-1}=E_t$. Később bevezetjük az adósságtörlesztést is.

Definíció szerint kétféle fogyasztási egyenletünk van.

Fogyasztás munkában:

$$c_{a,i,t+a}=1-\tau-\theta_{t+a}-s_{a,i,t+a}, \qquad a=1, 2, \ldots . \tag{12}$$

Fogyasztás nyugdíjban:

$$c_{a,i,t+R+1}=\ldots=c_{a,i,t+D}=b+d_{i,t+R}, \qquad a=R+1, \ldots, D, \tag{13}$$

ahol a magán-életjáradék a magánnyugdíjvagyon és a hátralévő élettartam hányadosa:

$$d_{i,t+R}=\psi(1+\alpha)S_{R,i,t+R}, \qquad \text{ahol} \qquad \psi=\frac{1}{D-R}.$$

Feltesszük még, hogy a rövidlátó aktív dolgozó minden időszakban úgy becsüli újra kívánatos megtakarítását, hogy ismeri az érvényes adókulcsot:

$$s_{a,L,t+a}=\frac{\gamma\theta_{t+a}}{\alpha}, \qquad a=1, \ldots, R. \tag{14}$$

Az előrelátó dolgozók életjáradékának előrebecslését először szavakban fogalmazzuk meg: feltesszük, hogy a mindenkori tervezett megtakarítási hányadot követik a nyugdíjazásig hátralévő életszakaszban. Képletben:

$$d_{a,H,t+R} = \psi[(1+\alpha)S_{a-1,H,t+a-1} + (1+\alpha)(R-a+1)s_{a,H,t+a}], \tag{15}$$

s ebből adódik a nyugdíjaskori fogyasztás előrebecslése

$$\tilde{c}_{a,H,t+R+1} = \ldots = \tilde{c}_{a,H,t+D} = b + d_{a,H,t+R}. \tag{16}$$

Dolgozóként a H típus minden időszakban ki akarja simítani fogyasztását: $c_{a,H,t+a} = \tilde{c}_{a,H,t+R+1}$, a (15) és a (16) alapján

$$1-\tau-\theta_{t+a}-s_{a,H,t+a} = b+\psi[(1+\alpha)S_{a-1,H,t+a-1}+\psi(R-a+1)(1+a)s_{a,H,t+a}].$$

Bevezetve a

$$\varphi_a = \frac{1}{1+\psi(R-a+1)(1+\alpha)} \qquad \text{és} \qquad \sigma_a = \psi(1+\alpha)\varphi_a$$

jelöléseket, adódik az a korú előrelátó dolgozó megtakarítása:

$$s_{a,H,t+a} = \varphi_a\left(\chi-\theta_{t+a}\right)-\sigma_a S_{a-1,H,t+a-1}. \tag{17}$$

Dinamikus elemzés

A dinamikus elemzésben felhasználjuk (9)–(11)-et, s a hosszmetszeti egyenleteket keresztmetszetivé alakítva, $t+a$ helyett t-ben kellenek a szabályok. Ezért (14), (17), (9) és (8) összefüggéseket visszafordítjuk a időszakkal.

A rövidlátó dolgozó (L) megtakarítása:

$$s_{a,L,t} = \frac{\gamma\theta_t}{\alpha}, \qquad a=1, \ldots, R. \tag{14'}$$

Az előrelátó dolgozó (H) megtakarítása:

$$s_{a,H,t} = \varphi_a(\chi-\theta_t)-\sigma_a S_{a-1,H,t-1}, \qquad a=1, \ldots, R. \tag{17'}$$

Támogatás:

$$E_{t-1} = \alpha\sum_{i=L}^{H} f_i \sum_{a=1}^{R} s_{a,i,t-1}. \tag{9'}$$

Az előrelátó (H) dolgozó felhalmozott megtakarításállománya:

$$S_{a,H,t} = S_{a-1,H,t-1}+s_{a,H,t}, \qquad a=1, 2, \ldots, R, \tag{8'}$$

ahol a kezdeti feltételek a következők:

$$\theta_{-1}=0, \qquad E_{-1}=0,$$

valamint adottak

$$S_{a-1,H-1}, \quad s_{a-1,H-1}, \quad a=1, \ldots, R.$$

Minimalizálandó a rendszer dimenzióját, elhagyjuk az adósságdinamikát és ($S_{a-1,L-1}$)-t. Behelyettesítve a (14’) képletet a (17’) képletbe, majd (11)-be, újra felírjuk a megmaradt irreducibilis rendszer egyenleteit, nevezetesen a (17’)-t és a (8’)-t $t=0, 1, 2, \ldots$, ahol $\alpha \neq 0$:

$$\theta_t = \gamma f_L \theta_{t-1} + \alpha R^{-1} f_H \sum_{a=1}^{R} s_{a,H,t-1}, \tag{18}$$

$$s_{a,H,t} = \varphi_a(\chi - \theta_t) - \sigma_a S_{a-1,H,t-1} =$$

$$= \varphi_a \chi - \varphi_a \gamma f_L \theta_{t-1} - \varphi_a R^{-1} \alpha f_H \sum_{x=1}^{R} s_{x,H,t-1} - \sigma_a S_{a-1,H,t-1}, \quad a=1, \ldots, R \tag{19}$$

és (8’). A (18)–(19)–(8’)-rendszer inhomogén lineáris rendszer, mérete $m=2R-1$.

3. TÉTEL • *a) A kéttípusú, együttélő nemzedékek (overlapping generations, OLG) modelljében a kormányzat* (18) *szerint kiszámítja a megfelelő adókulcsot, majd az előrelátó dolgozók* (19)–(8’) *és az aktív rövidlátók* (14’) *szerint takarítanak meg.*

b) Elegendően kicsiny $\alpha > 0$ *támogatási arány esetén a rendszer konvergál a 2. tételbeli állandósult állapothoz.*

Megjegyzések

1. Burkoltan feltesszük, hogy elegendően kicsiny a kezdeti feltételek eltérése az állandósult állapotbeli értékektől ahhoz, hogy a keletkező pálya működőképes legyen: $s_{a,i,t+a} \geq 0$, ha $a=1, \ldots, R$.

2. Egyelőre nyitva hagyjuk, hogy általában mennyire kicsiny α-kra konvergens a folyamat. Speciális esetekben [az 1. PÉLDA és a *Függelék A)* része] azonban olyan elégséges feltételeket adunk a stabilitásra, amelyekből a megfelelő támogatási arány meghatározható.

3. A 3. TÉTEL ugyanúgy általánosítható különféle γ_i relatív megtakarítási hajlandóságú rövidlátókra, mint a 2. TÉTEL.

Bizonyítás

a) Már a tétel kimondása előtt, a felvezetésben bizonyítottuk.

b) A stabilitás vizsgálatában elhagyhatjuk az inhomogén tagokat (19)-ből. Ekkor $\alpha=0=\theta_t$ esetén

$$s_{a,H,t} = -\sigma_a S_{a-1,H,t-1}. \tag{19'}$$

Behelyettesítve a (19’)-t a (8’)-ba:

$$S_{a,H,t} = (1-\sigma_a) S_{a-1,H,t-1} = (1-\sigma_a) \ldots (1-\sigma_1) S_{0,H,t-a} = 0, \quad \text{ha} \quad t \geq a.$$

Folytonosság miatt a stabilitás megmarad elegendően kicsiny α-ra. ■

A jobb megértés kedvéért mérlegeljük az együttélő nemzedék modelljének legegyszerűbb esetét, az (OLG 1-1), amelyben egy dolgozó nemzedék és egy nyugdíjas nemzedék van (**R** = **1**, **D** = **2**).

1. PÉLDA • Legyen **R** = **1** és **D** = **2** **(negyedszázad).**
Ekkor $S_{1,H,t} = s_{1,H,t}$, valamint

$$\theta_t = \gamma f_L \theta_{t-1} + \alpha f_H s_{1,H,t-1} \tag{18'}$$

és

$$s_{1,H,t} = \frac{\chi - \theta_t}{2+\alpha}. \tag{19''}$$

Visszatolva (19'')-t egy időszakkal és behelyettesítve az új előrelátó megtakarítást (18')-ba:

$$\theta_t = \alpha f_H \frac{\chi}{2+\alpha} + \left(\gamma f_L - \frac{\alpha f_H}{2+\alpha}\right)\theta_{t-1}.$$

A fenti elsőrendű lineáris differenciaegyenlet által származtatott pálya nyilván stabil, mert θ_{t-1} együtthatója –1 és 1 közé esik. Ha $\gamma = \gamma^* = \dfrac{\alpha f_H}{(2+\alpha) f_L}$, akkor θ_t az állandósult állapotba ugrik. Ha $0 < \gamma < \gamma^*$, akkor a rendszer oszcillálva konvergál, ha $\gamma^* < \gamma < 1$, akkor simán. (Ahhoz, hogy a második eset ne legyen üres, fel kell tennünk, hogy $(2+\alpha)/[2(1+\alpha)] < f_H \leq 1$.) A *Függelék A)* részében megvizsgáljuk a reálisabb **R** = **2** és **D** = **3** esetet.

Végül a *4–6. táblázat* három részben bemutatja az **R** = **4** és **D** = **6**, valamint az $\alpha = 1$ támogatási arányú és a $\gamma = 1/2$ relatív megtakarítási hajlandóságú rendszer dinamikus pályáját. Azt várjuk, hogy a rendszer konvergál a *3. táblázat* 2. sorában leírt állapothoz. Sejtésünk igaznak bizonyult, legalábbis a választott $\theta_0 = 0$, $\mathcal{D}_{-1} = 0$ és $s^H(0) = 0{,}13$ kezdeti feltételek esetén. (Lineáris rendszer esetében ez majdnem biztos konvergenciát jelent.) A *4. táblázat* az adósságpályát, az adókulcsot és a korfüggő előrelátó megtakarításokat mutatja be. Az adósság viszonylag gyorsan tart 0,12-hoz, míg az adókulcs tart 0,03-hoz. Mialatt a támogatási rendszer kialakul, a különféle korú előrelátók megtakarításai némi oszcilláció után tartanak $s^H = 0{,}074$ állandósult értékhez. Most már figyelembe kell venni, hogy a dinamikus részben a kormányzat adósságból finanszírozza a hiányt, ezért a népesség várható átlagos életpálya-fogyasztása: $c_t = f_L c_t^L + f_H c_t^H$ eltérhet ρ-tól. A két szórásnégyzet módosított definíciója:

$$\varepsilon_{I,t}^2 = f_L \sum_{a=1}^{D} \left(c_{a,t}^L - c_t^L\right)^2 + f_H \sum_{a=1}^{D} \left(c_{a,t}^H - c_t^H\right)^2 \quad \text{és} \quad \varepsilon_{E,t}^2 = f_L \left(c^L - c_t\right)^2 + f_H \left(c^H - c_t\right)^2.$$

Az egyszerűség kedvéért életpálya helyett keresztmetszeti pályákra számoltuk ki a belső és a külső szórást.

4. táblázat
Makrojellemzők és előrelátó (*H*) megtakarítások

Évtized	Adósság	Adókulcs	Belső szórás	Külső szórás	Előrelátó dolgozók megtakarítás: legfiatalabb	fiatal	idős	legidősebb
t	$\mathcal{D}_t$	θ_t	ε_I	ε_E	$s_{1,H,t}$	$s_{2,H,t}$	$s_{3,H,t}$	$s_{4,H,t}$
0	0,048	0,000	0,240	0,063	0,080	0,067	0,044	0,000
1	0,101	0,012	0,224	0,005	0,078	0,077	0,080	0,098
2	0,111	0,025	0,196	0,027	0,075	0,074	0,073	0,070
3	0,116	0,028	0,178	0,017	0,074	0,074	0,074	0,075
4	0,118	0,029	0,174	0,018	0,074	0,074	0,074	0,074
5	0,118	0,029	0,172	0,017	0,074	0,074	0,074	0,074
6	0,118	0,030	0,171	0,017	0,074	0,074	0,074	0,074

Az előrelátók fogyasztási pályájáról szólva, figyeljük meg a *4. táblázatban*, hogy a támogatott önkéntes megtakarítás bevezetése előtt az előrelátók sokkal többet takarítottak meg, mint utána: $0{,}133 > 0{,}075$. Emiatt a transzferrendszer bevezetésekor az előrelátók megtakarítása zuhan, és fogyasztásuk meredeken nő – legalábbis egy ideig. A konvergencia itt is gyors: *5. táblázat*. Az egyszerűség kedvéért az életpálya átlagfogyasztása helyett a megfelelő keresztmetszeti átlagprofilokat mutatunk be: $c_t^i = D^{-1}\sum_{a=1}^{D} c_{a,i,t}$.

5. táblázat
Előrelátó (*H*) fogyasztási profilok

Évtized	Előrelátó dolgozó fogyasztása: Legfiatalabb	Fiatal	Idős	Legidősebb	Nyugdíjas fogyasztása: Fiatal	Idős
t	$c_{1,H,t}$	$c_{2,H,t}$	$c_{3,H,t}$	$c_{4,H,t}$	$c_{5,H,t}$	$c_{6,H,t}$
0	0,720	0,733	0,756	0,800	0,933	0,813
1	0,710	0,711	0,708	0,690	0,591	0,667
2	0,700	0,700	0,701	0,705	0,734	0,712
3	0,698	0,698	0,698	0,697	0,692	0,696
4	0,697	0,697	0,697	0,697	0,698	0,697
5	0,696	0,696	0,697	0,696	0,696	0,696
6	0,696	0,696	0,696	0,696	0,696	0,696

Végül a *6. táblázat* az egymást követő évtizedekben munkába álló rövidlátók fogyasztási pályáját mutatja be. Az önkéntes nyugdíjrendszerbe bekapcsolódva, a rövidlátók fiatalkori fogyasztása 0,8-ről 0,76-ra csökken, míg az időskori fogyasztása 0,4-ről 0,46-ra nő. Összehasonlítva az utolsó *L* és *H* profilt $c_6^L = 0{,}657 < 0{,}696 = c_6^H$.

6. táblázat
Rövidlátó (L) fogyasztási profilok

Évtized	Legfiatalabb	Fiatal	Idős	Legidősebb	Fiatal	Idős
	rövidlátó dolgozó fogyasztása				nyugdíjas fogyasztása	
t	$c_{1,L,\mathrm{t}}$	$c_{2,L,\mathrm{t}}$	$c_{3,L,\mathrm{t}}$	$c_{4,L,\mathrm{t}}$	$c_{5,L,\mathrm{t}}$	$c_{6,L,\mathrm{t}}$
0	0,800	0,800	0,800	0,800	0,400	0,667
1	0,782	0,782	0,782	0,782	0,400	0,655
2	0,762	0,762	0,762	0,762	0,424	0,649
3	0,758	0,758	0,758	0,758	0,451	0,656
4	0,756	0,756	0,756	0,756	0,456	0,656
5	0,756	0,756	0,756	0,756	0,458	0,657
6	0,756	0,756	0,756	0,756	0,459	0,657

Eddig nem törődtünk azzal, hogy a különadót adósságból fedezik; megelégedtünk azzal, hogy – a nulla kamatláb miatt is – az adósság egy megengedhető szinten stabilizálódik. Most vázolunk egy egyszerű visszacsatolási mechanizmust, amelyre támaszkodva a kormányzat fokozatosan felszámolhatja a különadó miatt keletkező adósságállományt.

Tegyük fel, hogy a kormány az adóból nemcsak az előző időszak kiadásait fedezi, hanem adósságot is törleszt. Ekkor (11) helyére

$$\theta_t = \frac{E_{t-1}}{R} + \zeta \mathcal{D}_{t-1} \qquad (11')$$

lép, ahol $\zeta > 0$ egy alkalmasan választott visszacsatolási együttható. Ennek hatására (18) is módosul:

7. táblázat
Makrojellemzők és előrelátó (H) megtakarítások visszacsatolásnál

Évtized	Adósság	Adókulcs	Belső	Külső	Előrelátó dolgozók megtakarítás			
			szórás		legfiatalabb	fiatal	idős	legidősebb
t	$\mathcal{D}_\mathrm{t}$	θ_t	ε_I	ε_E	$s_{1,H,\mathrm{t}}$	$s_{2,H,\mathrm{t}}$	$s_{3,H,\mathrm{t}}$	$s_{4,H,\mathrm{t}}$
0	0,048	0,000	0,240	0,063	0,080	0,067	0,044	0,000
1	0,088	0,017	0,220	0,006	0,077	0,076	0,079	0,096
2	0,070	0,036	0,181	0,027	0,073	0,072	0,071	0,067
3	0,047	0,038	0,157	0,015	0,072	0,072	0,072	0,073
4	0,027	0,037	0,155	0,015	0,073	0,073	0,073	0,073
5	0,014	0,035	0,158	0,015	0,073	0,073	0,073	0,074
6	0,005	0,033	0,162	0,016	0,073	0,074	0,074	0,074

$$\theta_t = \gamma f_L \theta_{t-1} - \alpha R^{-1} f_H \sum_{a=1}^{R} s_{a,H,t-1} + \zeta \mathcal{D}_{t-1}. \tag{18'}$$

Eltekintünk az analitikus vizsgálattól, és csupán a *4. táblázatot* számoljuk újra, $\zeta = 1/R$ esetén. Ha összehasonlítjuk a *4. és a 7. táblázatot*, látjuk, hogy a visszacsatolás hatására az adósság a korábbinál hamarabb eltűnik, és az állandósult állapot stabil marad.

Az életciklus-megtakarítás ágensalapú modellje

Az előző modellben a rövidlátó dolgozók csak közinformációt használtak föl, egyébként semmit sem tanultak. Az ágensalapú modellezés egyik fő jellemzője, hogy az ágensek a szomszédjaiktól közvetlenül is tanulnak, ezért most az ágensalapú megközelítést alkalmazzuk a rövidlátók tanulására.

Feltesszük, hogy $n > 1$ típus létezik, és az első $n - 1$ típus relatív megtakarítási hajlandósága rendre $\gamma_i = i/n$, $i = 1, 2, \ldots, n - 1$, részesedésük $f_i > 0$, $\sum_{i=1}^{n-1} f_i = f_L$ és $\gamma = f_L^{-1} \sum_{i=1}^{n-1} f_i \gamma_i$. Ha az n-edik előrelátó típus (H) nem létezne: $f_H = 1 - f_L = 0$ lenne, ekkor a (18) egyenlet megfelelő általánosításában az adó 0 lenne. A korábbiakhoz hasonlóan most is feltesszük, hogy minden típusban nagyon sok dolgozó van, de most a szimuláció miatt véges számuk van: $k = N_i + 1, \ldots, N_{i+1}$, ahol $N_{i+1} = N_i + Nf_i$, $N_0 = 0$.

Először (9)-et módosítjuk:

$$E_t = \alpha \sum_{i=1}^{n} f_i \sum_{k=N_{i+1}}^{N_{i+1}} \sum_{a=1}^{R} s_{a,k,t}, \qquad t = 0, 1, 2, \ldots. \tag{25}$$

Mielőtt alkalmaznánk az ágensalapú modellezés módszertanát, foglalkoznunk kell a főáramlat központi fogalmával, az életpálya-hasznosság függvényével, amelyet az előző tanulmányunkban is alkalmaztunk (*Simonovits* [2009]). Legyen $u(\cdot)$ a szigorúan konkáv növekvő időszaki hasznosságfüggvény, ekkor a megfelelő dolgozó leszámított életpálya-hasznossági függvénye

$$U\left(c_{1,k,t+1}, \ldots, c_{D,k,t+D}\right) = \sum_{a=1}^{D} \delta_k^{a-1} u\left(c_{a,k,t+a}\right), \tag{26}$$

ahol $0 \le \delta_k \le 1$ a k-adik dolgozó leszámítolási együtthatója. A passzív rövidlátó esetben $\delta_L = 0$ és $\delta_H = 1$.

Mivel a nyugdíjazástól távolabb lévő dolgozó ($a < R$) nem ismeri jövőbeli megtakarítási pályáját, ezért a korábbiakhoz hasonlóan feltesszük, hogy a jelenlegi időszakbeli megtakarítását vetíti előre, s ennek nyomán az életkorfüggő *tervezett* magán-életjáradéka és fogyasztása rendre

$$\tilde{c}_{a,k,t+y} = 1 - \tau - \theta_{t+a} - s_{a,k,t+a}, \qquad y = a, a+1, \ldots, R \tag{27}$$

és

$$d_{a,k,t+R} = \psi[(1+\alpha)S_{a-1,k,t+a-1} + (R - a + 1)s_{a,k,t+a}], \qquad \tilde{c}_{a,k,t+R+1} = b + d_{a,k,t+R}. \tag{28}$$

Most már megfogalmazhatjuk az a életkorban tervezett életpályahasznosság-függvényét:

$$\tilde{U}_{a,k,t+a}\left(c_{1,k,t+1},\ldots,c_{a,k,t+a},\tilde{c}_{a+1,k,t+a+1},\ldots,\tilde{c}_{D,k,t+D}\right)=$$

$$=\sum_{x=1}^{a-1}\delta_k^{x-1}u\left(c_{x,k,t+x}\right)+\sum_{y=a}^{R}\delta_k^{y-1}u\left(c_{a,k,t+a}\right)+\sum_{z=R+1}^{D}\delta_k^{z-1}u\left(\tilde{c}_{R+1,k,t+R+1}\right). \tag{29}$$

A 2. és a 3. tag nyilvánvalóan egyszerűsíthető:

$$\sum_{y=a}^{R}\delta_k^{y-1}u\left(c_{a,k,t+a}\right)=\delta_k^{a}\frac{1-\delta_k^{R-a+1}}{1-\delta_k}u\left(c_{a,k,t+a}\right).$$

és

$$\sum_{z=R+1}^{D}\delta_k^{z-1}u\left(\tilde{c}_{R+1,k,t+R+1}\right)=\delta_k^{R+1}\frac{1-\delta^{D-R}}{1-\delta}u\left(\tilde{c}_{R+1,k,t+R+1}\right).$$

A (27) és a (28) értelmében a (29) függvény csak az $s_{a,k,t}$-tól függ, de nem várhatjuk el egy közönséges dolgozótól, hogy ilyen függvényt kiszámítson, még a legegyszerűbb esetben sem, amikor $u(c)=\log c$. Hogyan tehetnénk fel, hogy egy rövidlátó dolgozó ilyen bonyolult számításokkal képes másoktól tanulni? Sehogy! [Lásd a *Függelék B)* részét.]

Egy egyszerűbb jelzőszámmal kísérletezünk, a aktív rövidlátó dolgozók tárgyalásakor (15)-ben bevezetett előrevetített átlagos életpálya-fogyasztással. Új modellünkben $(a,\ k,\ t+a)$ esetén ez

$$c_{a,t+a}^{k}=\frac{1}{D}\left[C_{a-1,k,t+a-1}+\left(R-a+1\right)c_{a,k,t+a}+\left(D-R\right)\tilde{c}_{a,k,R+1}\right], \tag{30}$$

ahol $C_{a,k,t+a}$ az addig felhalmozott fogyasztás:

$$C_{a,k,t+a}=\sum_{x=1}^{a}c_{x,k,t+x}=C_{a-1,t+a-1}+c_{a,k,t+a}.$$

Ismét a (27) és a (28) összefüggésre támaszkodunk. A (30)-beli $c_{a,t+a}^{k}$ az $s_{a,k,t+a}$ lineáris függvénye. Ez a jelzőszám távol van az ideálistól, hiszen nem tükrözi a nyugdíjrendszer egyik fő feladatát: a fogyasztás kisimítását. De a korlátozott racionalitás világában ez a mutató jól jelzi azt a torz újraelosztást, amelyet az önkéntes nyugdíjrendszer valósít meg: az előrelátó felhasználja a rövidlátó befizetésének egy részét. Reméljük, hogy e mutató most is működik.

A futások értékeléséhez szükségünk lesz a két fix típusra korábban bevezetett szórások általánosítására:

$$\varepsilon_{I,t}^{2}=\frac{1}{DN}\sum_{k=1}^{N}\sum_{a=1}^{D}\left(c_{a,k,t}-c_t^k\right)^2 \quad \text{és} \quad \varepsilon_{E,t}^{2}=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(c_t^k-c_t\right)^2. \tag{31}$$

Az ágensalapú modellezés szellemét követve, feltesszük, hogy a k-adik dolgozó ismer néhány másik dolgozót, amelyek indexhalmaza L_k. Feltesszük, hogy az indexhalmaz időben változatlan. Az ismerősök száma $|L_k| > 0$, $k = 1, 2, \ldots, N$. Az ismerősök éppen egy időszakkal idősebbek, mint a k-adik dolgozó. Minden dolgozó minden időszakban jelzi jelenlegi típusát: $i(a, k, t+a)$ és a (30)-ban előrevetített átlagos életpálya-fogyasztását: $c^k_{a,t+a}$-t.

Elhagyva az életkorindexet, a legegyszerűbb hálózatból indulunk ki: legyen e egy természetes szám, az *ismertségi távolság*, $0 < e \ll N$:

$$L^e_k = \left\{l, |l-k| \le e\right\},$$

ahol az adott korosztály N-edik ágense egy körön véletlen sorrendben helyezkedik el, a mesterséges $N+1$-edik, $N+2$-edik stb. sorszámú ágensek azonosak az 1., 2. stb. ágenssel. Például

$$L^e_1 = \left\{1, 2, 3, \ldots, e, e+1; N-e, N-e+1, \ldots, N-1, N\right\}.$$

Feltesszük, hogy az (a, k) dolgozó a $t+a$-adik időszakban annak az $(a, l^\circ, t-1+a)$ indexű dolgozónak a típusát (γ_i-jét) választja, aki az ismeretségi körében a legnagyobb előrevetített átlagos életpálya-fogyasztást valósítja meg:

$$c^l_{a,t+a} \le c^{l^\circ}_{a,t+a}, \qquad l, l^\circ \in L_k.$$

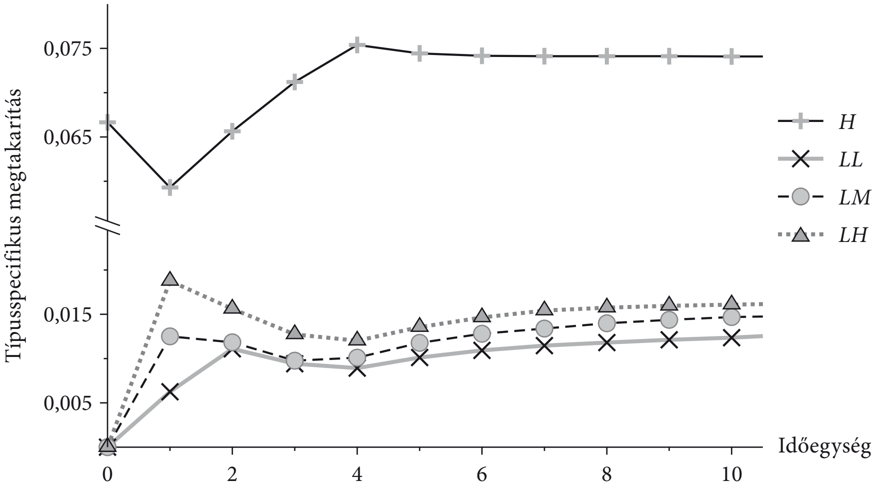
Abban a ritka esetben, ha egynél több ilyen ismerős van, akkor vagy a legkisebb indexű ismerőst választja, vagy sorsot vet. Ha $i_{a,k,t-1+a} < n$, akkor γ_i ismerete megadja a választandó megtakarítási szabályt. De $i = n$ esetén egy külön mechanizmust kellene feltételeznünk, ezt kizárjuk. (Magunk is problematikusnak érezzük a tanulási szabályt, mert ha a dolgozó képes kiszámítani saját átlagos fogyasztását, akkor miért támaszkodik az idősebbek tapasztalataira?)

Ahhoz, hogy elindítsuk a szimulációt a 0-adik időszakban, meg kell adni a kezdőértékeket. Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy minden kezdeti megtakarítás 0, kivéve H-t, amely (4') szerint $s^H(0)$. A jobb áttekinthetőség kedvéért megelégszünk viszonylag kis létszámú népességgel: egy korosztály létszáma $N = 120$. Továbbra is évtizedben számolunk.

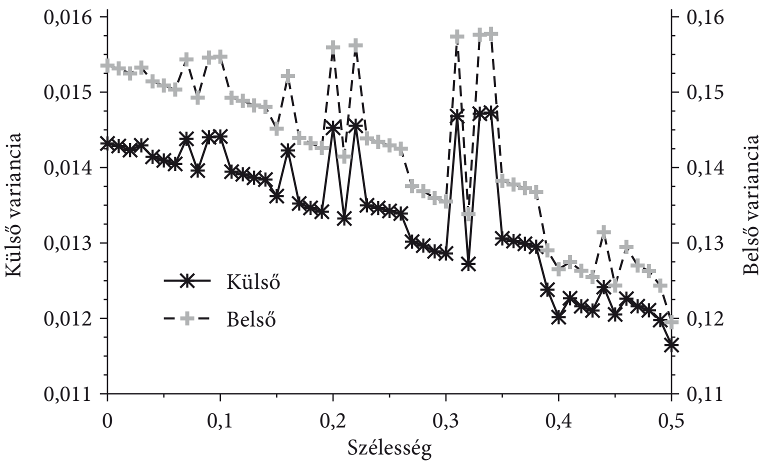
1. FUTÁS • Az *1. ábr*a a legegyszerűbb esetet szemlélteti: $n = 4$ és $f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = 1/4$, ahol γ relatív megtakarítási hajlandóság esetén ($0 < \gamma \le 1$) $\gamma_1 = 1/4$ (*LL* típus), $\gamma_2 = 1/2$ (*LM* típus) és $\gamma_3 = 3/4$ (*LH* típus). A negyedik típusnak (*H*) nincs γ-ja. A (11')-ben $\zeta = 1/R = 1/4$. Mivel a relatív megtakarítási hajlandóságok átlaga 1/2, esetünk összehasonlítható a *3.*, illetve a *4. táblázat* futásával. Az ismerősök száma $2e + 1 = 3$. Az *1. ábra* a négy típus típusonként átlagolt megtakarítási pályáját mutatja: *LM* felzárkózik, de *LL* lemarad *LH*-tól.

2. FUTÁS • A *2. ábrán* megváltoztatjuk az *LL* és az *LH* típusok relatív megtakarítási hajlandóságát, de közben változatlanul hagyjuk az átlagukat: $\gamma_1 = 1/2 - \xi$ és $\gamma_3 = 1/2 + \xi$, ahol $0 < \xi < 1/2$ a szélső megtakarítási hajlandóságok közti *rés* fele. Most csak az életpályák belső és külső szórását mutatjuk a rés függvényében. Azt várjuk, hogy a rés tágulásával csökken a torz újraelosztást mutató külső szórás, de meglepő módon a valóban (0,014-ről 0,012-re) csökkenő mutató a $\xi = 0{,}2$, $0{,}3$, $0{,}4$ értéknél megbokrosodik, és egy időre az induló maximum fölé ugrik.

1. ábra
A megtakarítások időbeli emelkedése



2. ábra
Szélesebb rés, tendencia szerint kisebb belső és külső szórás



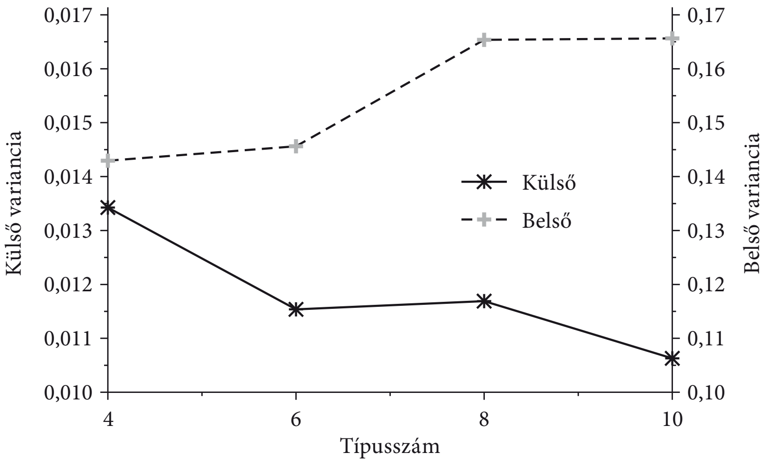
3. FUTÁS • A *3. ábrán* visszaállítjuk a szélsőségek közti eredeti paraméteres rést, de a típusok számát növeljük párosával és szimmetrikusan: $n = 2m$ esetén

$$\gamma_i = \frac{i}{2m}, \quad i = 1, 2, \ldots, 2m - 1.$$

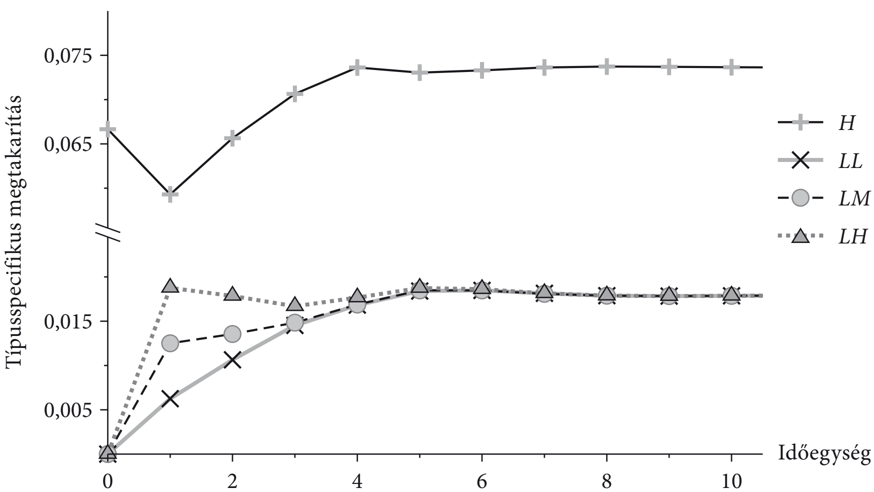
Ahogy a típusszám végig fut az $n = 4, 6, 8, 10$ értéken, a külső szórás lecsökken 0,014-ről 0,01-ra, miközben a belső szórás enyhén emelkedik.

4. FUTÁS • A *4. ábrán* szintén az *1. ábrából* indulunk ki, de az *Erdős–Rényi* [1959] véletlen gráf értelmében véletlenül konstruált szerkezetben választjuk meg a

3. ábra
Több típus, nagyobb belső és kisebb külső szórás



4. ábra
Az ismeretségi hálózat véletlen perturbációja kicsit javít



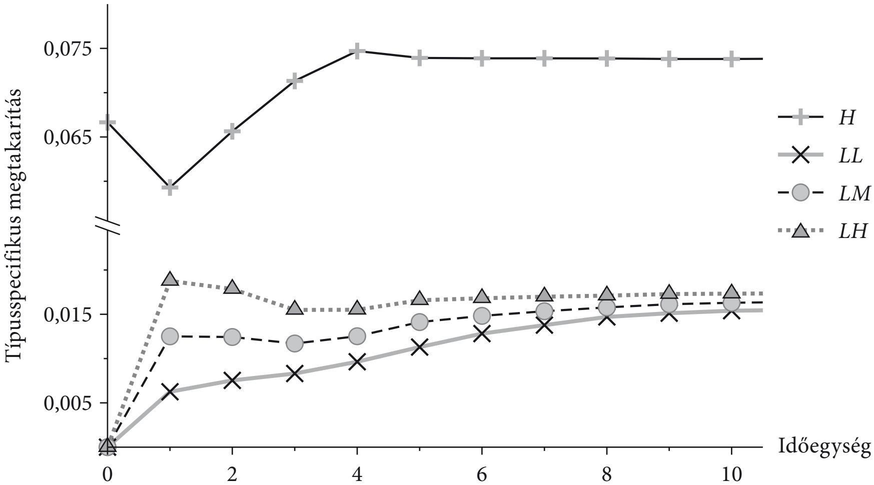
kapcsolatokat. Az átlagos, típusfüggő megtakarítási pályák szinte változatlanok, csak minimális javulás figyelhető meg.

5. FUTÁS • Megtartva az új hálózat szerkezetét, de véletlenül létrehozva az éleket, negyedére csökkentjük a hálózat sűrűségét. Ekkor a tanulás látványosan lelassul.

6. FUTÁS • Most visszatérünk az 1. FUTÁSHOZ, de fokozatosan megnöveljük az ismerősök számát: $e = 1, 2, 3, 4$-re. Sem a külső, sem a belső szórás lényegében nem változik.

7. FUTÁS • Végül fokozatosan lerövidítjük az igazodási időszak hosszát: a h paraméter értéke 10 évről fokozatosan 1 évre rövidül. Azt sejtjük, hogy a tanulás gyorsítása

5. ábra
Ritka ismeretségi hálózat akadályozza a tanulást



miatt emelkedik a rövidlátók megtakarítása, és emiatt mindkét szórás/feszültség csökken. Az *8. táblázat* mutatja, hogy sejtésünk hamis: a relatív belső szórás lassan nő, a külső pedig stagnál (0,014).

8. táblázat
Szórások és az időszak hossza

Időszak hossza (h)	Belső szórás $\varepsilon_I(h)$
10	0,143
5	0,147
2	0,166
1	0,166

Következtetések

Három nagyon egyszerű életciklus-/együttélő nemzedéki modellt vizsgáltunk meg, amelyekben kötelező és önkéntes nyugdíjrendszer működik. Az első modellben rövidlátó és előrelátó típus él együtt, s az előbbi semmit sem okul sanyarú sorsából (passzív). A második modellben a rövidlátók aktivizálódnak, és a rendelkezésre álló közös információ felhasználásával csökkentik veszteségeiket. A harmadik, ágensalapú modellben a rövidlátó dolgozók nemcsak globálisan, de lokálisan is tanulnak, tovább csökkentve veszteségüket.

Cikkünk végére érve emlékeztetünk az alkalmazott megszorításokra (és várható relevanciájukra).

a) A kötelező rendszer időben változatlan paraméterekkel működik, és az önkéntes nyugdíjrendszeré sem változik bevezetése után. (Ez részben technikai feltevés, de az előre bejelentett és nem bejelentett változások nyilván hatnak a dolgozók viselkedésére.)

b) A keresetek függetlenek az életkortól, a típustól és a naptári időtől.

c) Nincs plafon az önkéntes megtakarításokon. (*Simonovits* [2009] nyomatékosan hangsúlyozta, hogy milyen jelentős hatása van annak, hogy a kereset növekedésével statisztikusan nő az előrelátás, és emiatt az önkéntes megtakarítások alkalmasan megválasztott plafonja képes teret adni a jól kereső előrelátóknak, miközben elegendő nyugdíjat biztosít a kisebb keresetű rövidlátóknak.)

d) A megtakarítások után nem jár kamat. (Ez is egy technikai feltevés, azonban ha figyelembe vennénk a megtakarítások kockázatát, akkor nem is olyan rossz feltevés.)

e) A nyugdíjasok a magánmegtakarításokat is életjáradékként használják fel. (Bár ez lenne a kívánatos, jelenleg csak nagyon kevés ország működtet ilyen rendszereket, és éppen 2015-ben szűnt meg az életjáradékosítási kötelezettség egyik legnagyobb félig önkéntes, félig kötelező rendszert működtető országban, Egyesült Királyságban.)

f) A modellben a kormányzat ugyanolyan ritkán (általában évtizedenként, de néha gyakrabban) változtat az adókulcson, mint a dolgozók a megtakarítási szabályaikon. A valóságban a kormányzat gyakrabban igazíthat, mint a dolgozók.

Ha lazítanánk e feltevéseken, akkor az eredmények numerikusan változnának. Csak reménykedhetünk abban, hogy a kvalitatív megállapításaink megállják a helyüket: a lokális tanulás javít a globális tanuláson.

Hivatkozások

Axtell, R.–Epstein, J. M. [1999]: Coordination in Transient Social Networks. An Agent-based Computation Model of the Timing of Retirement. Brookings, Institution Washington DC.

Auerbach, A. J.–Kotlikoff, L. J. [1987]: Dynamic Fiscal Policy. Cambridge University Press, Cambridge.

Barr, N.–Diamond, P. [2008]: Reforming Pensions: Principles and Policy Choices. Oxford University Press, Oxford.

Benedek Gábor [2003]: Evolúciós játékok szimulációja. PhD-értekezés, Budapesti Corvinus Egyetem, Budapest, http://phd.lib.uni-corvinus.hu/790/1/Benedek_Gabor_1.pdf.

Butrica, B. B.–Smith, K. E. [2016]: 401(k) Participant Behavior in a Volatile Economy. Journal of Pension Economics and Finance. Vol. 15. No. 1. 1–29. o. http://dx.doi.org/10.1017/s1474747214000250.

Campbell, Y. J. [2006]: Household Finance. The Journal of Finance, 56. No. 4. 1553–1604. o. http://dx.doi.org/10.1111/j.1540-6261.2006.00883.x.

Chetty, R. [2015]: Behavioral Economics and Public Policy: A Pragmatic Approach. American Economic Review, Papers and Proceedings, 105. No. 5. 1–33. o. http://dx.doi.org/10.1257/aer.p20151108.

Duflo, E.–Gale, W.–Liebman, J–Orszag, P.–Saez, E. [2007]: Saving Incentives for Low- and Middle Income Families in the United States: Why is Saver's Credit not More Effective? Journal of European Economic Association, 5. No. 2–3. 647–661. o. http://dx.doi.org/10.1162/jeea.2007.5.2-3.647.

Engen, E. M.–Gale, W. G.–Scholz, J. [1996]: The Illusory Effects of Savings Incentives on Saving. Journal of Economic Perspectives, Vol. 10. No. 4. 111–138. o. http://dx.doi.org/10.1257/jep.10.4.113.

Erdős Pál–Rényi Alfréd [1959]: Random Graphs I. Publicationes Mathematicae, 6. 290–297. o. http://www.renyi.hu/~p_erdos/1959-11.pdf.

Fehr, H.–Habermann, C.–Kindermann, F. [2008]: Tax-Favored Retirement Accounts: Are they Efficient in Increasing Savings and Growth? FinanzArchiv, Public Finance Analysis, 64. No. 2. 171–198. o. http://dx.doi.org/10.1628/001522108x334830.

Feldstein, M. S. [1985]: The Optimal Level of Social Benefits. Quarterly Journal of Economics, 100. No. 2. 302–320. o. http://dx.doi.org/10.2307/1885383.

Findley, T. S.–Caliendo, F. N. [2008]: Short Horizons, Time Inconsistency and Optimal Social Security. International Taxation and Public Finance, 16. No. 4. 487–513. o. http://dx.doi.org/10.1007/s10797-009-9115-2.

Gigerenzen, G.–Selten, R. [2002]: Bounded Rationality: The Tool-kit. Boston, MA, MIT Press.

Hinz, R.–Holzmann, R.–Tuesta, D.–Takayama, N. (szerk.) [2013]: Matching Contributions for Pensions. World Bank, Washington, DC.

Hubbard, R. G.–Skinner, J. S. [1996]: Assessing the Effectiveness of Saving Incentives. Journal of Economic Perspectives, Vol. 10. No. 4. 73–90. o. http://dx.doi.org/10.1257/jep.10.4.73.

Kirman, A. P.–Vriend, N. J. [2001]: Evolving Market Structure: An ACE Model of Price Discrimination and Loyalty. Journal of Economic Dynamics and Control, 25. No. 3–4. 459–502. o. http://dx.doi.org/10.1016/s0165-1889(00)00033-6.

Laibson, D. [1998]: Life-Cycle Consumption and Hyperbolic Discount Functions. European Economic Review, 42. No. 3–5. 861–871. o. http://dx.doi.org/10.1016/s0014-2921(97)00132-3.

Lusardi, A.–Mitchell, O. [2014]: The Economic Importance of Financial Literacy: Theory and Evidence. Journal of Economic Literature, 52. No. 1. 5–44. o. http://dx.doi.org/10.1257/jel.52.1.5.

Méder Zsolt–Simonovits András–Vincze János [2012]: Adómorál és adócsalás – társadalmi preferenciák és korlátos racionalitás. Közgazdasági Szemle, 59. évf. 10. sz. 1081–1106. o.

Modigliani, F.–Brumberg, R. [1954]: Utility Analysis and the Consumption Function: An Interpretation of Cross-Section Data. Megjelent: *Kurihara, K. K.* (szerk.): Post-Keynesian Economics. New Brunswick, Rutgers University Press, 388–436. o.

Molnár György–Simonovits András [1997]: Várakozások, stabilitás és működőképesség az együttélő korosztályok realista modelljében. Közgazdasági Szemle, 43. évf. 863–890. o.

OECD [2005]: Tax-Favored Retirement Saving. OECD Economic Studies, 39. Párizs.

Pickhard, M.–Prinz, A. [2014]: Behavioral dynamics of tax evasion – A survey. Journal of Economic Psychology, Vol. 40. Special Issue on Behavioral Dynamics of Tax Evasion, 1–19. o. http://dx.doi.org/10.1016/j.joep.2013.08.006.

Poterba, J. M.–Venti, S. F.–Wise, D. A. [1996]: How Retirement Savings Program Increase Savings. Journal of Economic Perspectives, Vol. 10. No. 4. 91–112. o.

Samuelson, P. A. [1958]: An Exact Consumption-Loan Model of Interest with or without the Social Contrivance of Money. Journal of Political Economy, 66. No. 6. 467–482. o. http://dx.doi.org/10.1086/258100.

Simonovits András [2009]: Az önkéntes nyugdíjrendszer egy egyszerű modellje. Közgazdasági Szemle, 56. évf. 10. sz. 851–865. o.

Szabó Attila–Gulyás László–Tóth István János [2009]: Az adócsalás elterjedtségének változása – becslések a TAXSIM ágensalapú adócsalás-szimulátor segítségével. Megjelent:

Semjén András–Tóth István János (szerk.): Rejtett gazdaság. Be nem jelentett foglalkoztatás és jövedelemeltitkolás – kormányzati lépések és a gazdasági szereplők válaszai. Budapest, MTA Közgazdaságtudományi Intézet, 65–83. o.

TESFATSION, L. [2006]: Agent-Based Computational Economics. A Constructive Approach to Economic Theory. Megjelent: *Tesfatsion, L.–Judd, K. L.* (szerk.): Handbook of Computational Economics, Vol. 2. 831–880. o. http://dx.doi.org/10.1016/s1574-0021(05)02016-2.

VARGA GERGELY–VINCZE JÁNOS [2016]: Megtakarítási típusok: egy adaptív–evolúciós megközelítés. Közgazdasági Szemle, 62. évf. 2. sz. 162–187. o. http://dx.doi.org/10.18414/KSZ.2016.2.162.

Függelék

A) Az $\mathbf{R}=\mathbf{2}$ és $\mathbf{D}=\mathbf{3}$ eset stabilitása

A főszövegben csak a majdnem triviális 1. PÉLDÁBAN ($\mathbf{R}=\mathbf{1}$ és $\mathbf{D}=\mathbf{2}$, negyedévszázad) bizonyítottuk be konstruktívan a tanulási folyamat stabilitását $\alpha>0$-ra. Ebben a függelékben a második legegyszerűbb esetet vizsgáljuk: $\mathbf{R}=\mathbf{2}$ és $\mathbf{D}=\mathbf{3}$, és tényleges feltételt kapunk $\alpha>0$-ra. Felidézünk néhány jelölést:

$$\chi=1-3\tau>0, \qquad \psi=1,$$

$$\varphi_1=\frac{1}{3+2\alpha}, \qquad \sigma_1=(1+\alpha)\varphi_1 \qquad \text{és} \qquad \varphi_2=\frac{1}{2+\alpha}, \qquad \sigma_2=(1+\alpha)\varphi_2.$$

Elhagyva az állandó tagokat, (18')–(19')–(8') egyszerűsödik:

$$\theta_t=\gamma f_L\theta_{t-1}+\frac{\alpha f_H}{2}\left(s_{1,H,t-1}+s_{2,H,t-1}\right), \tag{F1}$$

$$s_{1,H,t}=-\varphi_1\gamma f_L\theta_{t-1}-\frac{\varphi_1\alpha f_H}{2}s_{1,H,t-1}-\frac{\varphi_1\alpha f_H}{2}s_{2,H,t-1} \tag{F2}$$

és

$$s_{2,H,t}=-\varphi_2\gamma f_L\theta_{t-1}-\left(\frac{\varphi_2\alpha f_H}{2}+\sigma_2\right)s_{1,H,t-1}-\frac{\varphi_2\alpha f_H}{2}s_{2,H,t-1}. \tag{F3}$$

A következő analitikus stabilitási eredményt kapjuk.

F1. TÉTEL • *Az (F1)–(F3) rendszer stabil, ha teljesül*

$$\gamma f_L\left(1+\frac{1}{3+2\alpha}+\frac{1}{2+\alpha}\right)<1 \tag{F4}$$

és

$$\frac{\alpha}{2}f_H\left(1+\frac{1}{3+2\alpha}+\frac{1}{2+\alpha}\right)+\frac{1+\alpha}{2+\alpha}<1. \tag{F5}$$

Bizonyítás • Vegyük az (F1)–(F3) által burkoltan definiált mátrix abszolút értékben vett oszlopösszegeit. Ha mindhárom kisebb mint 1, akkor a stabilitást igazoltuk. Az (F4) és az (F5) értelmében az 1. és a 3. oszlopösszegre teljesül az egyenlőtlenség, és a második egyenlőtlenség következik a harmadikból. ■

Speciálisan, ha $\alpha = 1$, akkor a két egyenlőtlenség a következőre egyszerűsödik: $\gamma f_L < 0{,}546$ és $f_H < 0{,}79$. (Kétszer finomabb felbontású számpéldánkban $\gamma = 1/2$, tehát $f_L = 3/4$ megfelel.) Mivel $\gamma \le 1$, $f_L < 0{,}546$, azaz $f_H > 0{,}454$; csak az $0 < f_L \le 0{,}454$ és az $0{,}8 < f_L < 1$ szakaszt kell vizsgálni. Mivel instabil lineáris rendszerekben nulla a valószínűsége annak, hogy véletlen kezdeti feltételből indítva stabil pályát kapjunk, elég a vizsgálandó két intervallum megfelelően sűrű osztópontjain egy-egy pálya korlátosságát ellenőrizni. Egyébként az $f_L = 0{,}1$, $0{,}2$, $0{,}3$, $0{,}4$, … $0{,}9$ kísérlet szerint a stabilitás fennáll.

B) A rövidlátó dolgozó racionális viselkedésének vázlata

A Bevezetésben azt állítottuk, hogy az önkéntes nyugdíjrendszer racionális döntési modelljében a rövidlátó dolgozó viselkedése csak nagyon körülményesen modellezhető. Ahhoz, hogy alátámasszuk állításunkat, elegendő, ha csak az állandósult állapotra szorítkozunk (vö. 2. tétel), sőt $\mathbf{R}=\mathbf{2}$ és $\mathbf{D}=\mathbf{3}$ esetet vizsgáljuk. Megőrizve az ottani logikát, először adottnak vesszük θ adókulcsot, és egy explicit leszámítolt életpályahasznosság-függvényt optimalizálva, meghatározzuk az (s_1, s_2) megtakarítási pályát, ahogyan s^H-t meghatároztuk (4)-ben. Ekkor a megtakarítási szabályok meghatározzák $\theta°$-t. Végül numerikusan is szemléltetjük eredményeinket.

Feltételes megtakarítási függvények

Bevezetjük a következő rövidítéseket: $\hat{t} = 1 - \tau - \theta$ és $\bar{\alpha} = 1 + \alpha$. Kiindulópontunk a következő fogyasztási egyenlethármas:

$$c_1 = \hat{t} - s_1, \quad c_2 = \hat{t} - s_2 \quad \text{és} \quad c_3 = 2\tau + \bar{\alpha}(s_1 + s_2). \tag{F6}$$

Felírjuk a (26) életpálya-hasznosságfüggvény háromtagú időinvariáns alakját (k típusindexet elhagyjuk):

$$U(c_1, c_2, c_3) = \log c_1 + \delta \log c_2 + \delta^2 \log c_3, \quad 0 \le \delta \le 1. \tag{F7}$$

Behelyettesítve (F6)-ot (F7)-be, adódik a redukált életpályahasznosság-függvény:

$$\mathrm{U}[s_1, s_2] = \log(\hat{t} - s_1) + \delta \log(\hat{t} - s_2) + \delta^2 \log[2\tau + \bar{\alpha}(s_1 + s_2)]. \tag{F8}$$

A két parciális deriváltat egyenlővé téve nullával, adódik a két optimalitási feltétel:

$$U_1'[s_1, s_2] = \frac{-1}{\hat{t} - s_1} + \frac{\delta^2 \bar{\alpha}}{2\tau + \bar{\alpha}(s_1 + s_2)} = 0 \tag{F9'}$$

és

$$U_2'[s_1, s_2] = \frac{-\delta}{\hat{t} - s_2} + \frac{\delta^2 \bar{\alpha}}{2\tau + \bar{\alpha}(s_1 + s_2)} = 0. \qquad (F9'')$$

Összehasonlítva (F9') képletet és (F9'') képletet:

$$\frac{1}{\hat{t} - s_1} = \frac{\delta}{\hat{t} - s_2}, \quad \text{azaz} \quad s_2 = (1-\delta)\hat{t} + \delta s_1. \qquad (F10)$$

Átrendezve (F9') képletet, és behelyettesítve (F10) képletet, adódik

$$\delta^2 \bar{\alpha}(\hat{t} - s_1) = 2\tau + \bar{\alpha}(s_1 + s_2) = 2\tau + \bar{\alpha}\left[(1-\delta)\hat{t} + (1+\delta)s_1\right].$$

Felhasználva $\hat{t} = \hat{\tau} - \theta$-t, az s_1 kifejezhető mint θ lineáris függvénye:

$$s_1 = \frac{\bar{\alpha}(\delta^2 + \delta - 1)(\hat{\tau} - \theta) - 2\tau}{\bar{\alpha}(\delta^2 + \delta + 1)}. \qquad (F11)$$

Tömörítendő a képletet, újabb jelöléseket vezetünk be:

$$A = \frac{\bar{\alpha}(\delta^2 + \delta - 1)\hat{\tau} - 2\tau}{\bar{\alpha}(\delta^2 + \delta + 1)} \quad \text{és} \quad B = \frac{\delta^2 + \delta - 1}{\delta^2 + \delta + 1},$$

s adódik $s_1 = A - B\theta$. Az (F10) értelmében

$$s_2 = (1-\delta)(\hat{\tau} - \theta) + \delta(A - B\theta) = (1-\delta)\hat{\tau} + \delta A - (1 - \delta + \delta B)\theta.$$

Bevezetve az $F = (1-\delta)\hat{\tau} + \delta A$ és a $G = 1 - \delta + \delta B$ jelöléspárt, megkapjuk a második megtakarítási képletet is: $s_2 = F - G\theta$.

Eddig rögzítettük a leszámítolási tényezőt, mostantól két fajtáját különböztetjük meg: δ_L és δ_H. Emellé bevezetjük az $i = L, H$ indexpárt: ekkor s_1 és s_2 helyére

$$s_{1,i} = A_i - B_i\theta \quad \text{és} \quad s_{2,i} = F_i - G_i\theta, \quad i = L, H \qquad (F12)$$

lép.

Foglalkoznunk kell még a hitelkorláttal, nevezetesen azzal, hogy a dolgozók életciklus-megtakarítása sohasem lehet negatív. A matematikai kényelem azt mondaná, hogy hunyjuk be a szemünket a kellemetlen probléma fölött, és gondoljuk azt, hogy $s_{a,i}$ negatív megtakarítás esetén a dolgozók fizetnek $\alpha s_{a,i}$ büntetést. De ezt elvetjük, inkább megfelelően nagy δ_L-ekre szorítkozunk.

Kiegyensúlyozott adókulcs

Miután meghatároztuk adókulcsfüggő megtakarításainkat, rátérünk a kiegyensúlyozott adókulcs kiszámítására. Behelyettesítve (F12)-t a

$$2\theta = \alpha \sum_{i=L}^{H} f_i (s_{1,i} + s_{2,i})$$

adóegyenletbe, adódik egy implicit egyenlet:

$$2\theta = \alpha \sum_{i=L}^{H} f_i \left[A_i + F_i - \left(B_i + G_i \right) \theta \right].$$

Egyszerű rendezéssel adódik az adókulcs explicit képlete:

$$\theta^{\circ} = \frac{\alpha \sum_{i=L}^{H} f_i \left(A_i + F_i \right)}{2 + \alpha \sum_{i=L}^{H} f_i \left(B_i + G_i \right)}. \qquad (F13)$$

Ezt kell a kormányzatnak meghatároznia, és közölnie a dolgozókkal, akik ennek ismeretében döntenek egyéni megtakarításaikról.

Nem túl nehéz elképzelni, milyen bonyolult a dinamikus változat levezetése, amely a 3. TÉTEL analógiájához vezetne.

Numerikus szemléltetés

Végül numerikusan szemléltetjük itt kapott eredményeinket is. Megtartjuk korábbi paraméterválasztásainkat: $f_L = 3/4$ és $f_H = 1/4$, ahol $\delta_H = 1$ és $\tau = 0{,}2$. A maximális leszámítolási tényező: $\delta_H = 1$. A negatív megtakarításokat elkerülendő, a kisebb leszámítolási tényezőt és a támogatási tényezőt 1-ről 0,75-ra csökkentjük. [Éves szinten $\delta_L(1) = 0{,}986$ – nagyon enyhe leszámítolás.] Eredményeinket az *F1.* és az *F2. táblázat* mutatja be.

1. sor: mindkét típus tökéletesen előrelátó (csak egy típus van), $\delta_L = 1$ és $\alpha = 1$. Mind a négy megtakarítás 0,15, s ugyanennyi az adókulcs is. A dolgozók csupán feleannyit fogyasztanak, mint a teljes bér, de az időskori fogyasztás eléri a teljes bért. Ez nyilvánvalóan pazarlás.

2. sor: Egyelőre megtartva $\delta_L = 1$-et, csökkentjük a támogatási arányt: $\alpha = 0{,}75$. Ekkor a kiegyensúlyozott adókulcs is csökken: $\theta^{\circ} = 0{,}107$, s alig emelve a megtakarításokat vagy a fogyasztási pályát.

3. sor: Utat engedünk a rövidlátásnak: $\delta_L = 0{,}75$, de a támogatási arányt visszaemeljük: $\alpha = 1$. Ekkor a rövidlátó fiatal dolgozók alig takarékoskodnak, de később némileg túltesznek előrelátó társaikon: $0{,}178 > 0{,}163$. A kiegyensúlyozott adókulcs kicsit emelkedik:

F1. táblázat
Neoklasszikus életpálya-megtakarítási pályák

Alsó diszkonttényező	Támogatási kulcs	Különadó-kulcs	Megtakarítás			
			fiatalabb (*H*)	idősebb (*H*)	fiatalabb (*L*)	idősebb (*L*)
δ_L	α	θ	$s_{1,H}$	$s_{2,H}$	$s_{1,L}$	$s_{2,L}$
1,00	1,00	0,150	0,150	0,150	0,150	0,150
1,00	0,75	0,107	0,155	0,155	0,155	0,155
0,75	1,00	0,110	0,163	0,163	0,007	0,178
0,75	0,75	0,076	0,165	0,165	–0,001	0,180

F2. táblázat
Neoklasszikus életpálya-fogyasztási pályák

Alsó diszkont-tényező	Támogatási kulcs	Fogyasztás					
		előrelátó (H)			rövidlátó (L)		
		dolgozó		nyugdíjas	dolgozó		nyugdíjas
		fiatalabb	idősebb		fiatalabb	idősebb	
δ_L	α	$c_{1,H}$	$c_{2,H}$	$c_{3,H}$	$C_{1,L}$	$c_{2,L}$	$c_{3,L}$
1,00	1,00	0,500	0,500	1,000	0,500	0,500	1,000
1,00	0,75	0,538	0,538	0,942	0,538	0,538	0,942
0,75	1,00	0,527	0,527	1,053	0,683	0,512	0,769
0,75	0,75	0,559	0,559	0,978	0,725	0,544	0,713

$\theta = 0{,}11$. Az előrelátó dolgozók és nyugdíjasok fogyasztása némileg nagyobb, mint az ideális eseté, de a rövidlátók középkorszaki fogyasztása mindössze 0,502.

4. sor: Ha mindkét paraméterérték csökkentett, $\delta_L = 0{,}75$ és $\alpha = 0{,}75$, akkor $c_{3,L} = 0{,}769$-ről 0,713-re zuhan, míg a középkorszaki fogyasztása $c_{2,L} = 0{,}512$-ről 0,544-re nő.