Közgazdasági Szemle, LIV. évf., 2007. november (1004–1011. o.)

DOBOS IMRE

Egy megjegyzés Bródy András: Leontief zárt dinamikus modellje című dolgozathoz

Bródy András dolgozatában a zárt, dinamikus input-output modell egyensúlyi megoldásának három módszerét mutatja be. A három megoldás közül e dolgozat a klasszikus megoldást elemzi, amelyet Leontief is javasol. A megoldáshoz a sajátértékek meghatározásán át vezet az út, amely a tőkemátrix szingularitása miatt általánosított sajátérték–sajátvektor problémához vezet. Bródy számpéldáját követve az is megmutatható, hogy az egyensúlyi megoldás csak akkor nemnegatív hosszú távon, ha a gazdaság pályája a Neumann-sugár mentén halad.*

Journal of Economic Literature (JEL) kód: C67, D5, D57, O4, O41.

A zárt és nyílt dinamikus Leontief-modell a gazdaság egyensúlyát írja le lineáris differenciál- és/vagy differenciaegyenlet-rendszer segítségével. A dinamikus egyenletrendszerekben egy periódus bruttó termelését (kibocsátását) zárt modell esetén a termelőfelhasználás és a tőkebefektetések összegeként ábrázolja, ami nyílt modell esetén kiegészül a fogyasztások vektorával. A tőkeráfordítások mátrixa az esetek nagy részében szinguláris, ami nem teszi lehetővé a bruttó kibocsátások explicit kifejezését.

A vázolt problémával az irodalom elég bőségesen foglalkozik. A nyílt dinamikus Leontief-modell megoldására javaslatot először maga *Leontief* [1976] tett. E megoldás a vizsgált tervezési horizont összes kibocsátási vektorát egy szimultán lineáris egyenletrendszerben határozza meg. A megoldás hasonló előállítását javasolta *Kendrick* [1972], amint azt Leontief is tette a dinamikus inverzzel, de a szerző már az explicit megoldás lehetőségét is vázolta. A dinamikus inverzet vizsgálta még *Schinnar* [1978] is dolgozatában. A hetvenes években sorra születtek a megoldási javaslatok a nyílt modell explicit megoldásának előállítására (*Livesey* [1972], *Kreijger–Neudecker* [1976], *Luenberger–Arbel* [1977], *Campbell* [1979] és *Meyer* [1982]). E dolgozatok mindegyike egy regularitási feltétellel teszi a modellt explicitté. Az alkalmazott regularitási feltételek ekvivalenciáját ismertette *Dobos* [1987–1988], megmutatva azt is, hogy a szinguláris tőkemátrix konkrét formájától függetlenül a nyílt Leontief-modell mindig explicitté tehető.

A zárt modell megoldásainak explicit előállításával, ismereteink szerint, három dolgozat foglalkozott: *Meyer* [1982], *Campisi–Nastasi–La Bella* [1992] és *Kiedrowski* [2001]. E megoldások a sajátértékek előállításán alapulnak. *Bródy* [2004] dolgozat is e zárt modell folytonos idejű, differenciálegyenlet-rendszerrel megadott változatát és az ahhoz vezető sajátérték-feladatát vizsgálja.

A hozzászólás célja, hogy ez utóbbi dolgozatban szereplő modellt, valamint az abban szereplő sajátérték-feladatot újra megvizsgálja. A dolgozat e sajátérték-feladat megoldá-

* A szerző köszöni *Simonovits András*nak, hogy a dolgozatot türelemmel elolvasta, és javaslataival hozzájárult a dolgozat érthetőségének javításához.

Dobos Imre egyetemi adjunktus, Budapesti Corvinus Egyetem, Vállalatgazdaságtan Intézet.

sához a lineáris algebrából ismert általánosított sajátérték-problémát alkalmazza. A sajátértékek meghatározásához az szükséges, hogy a rendszer mátrixai reguláris mátrixsereget alkossanak, ami a Leontief-modellre teljesül (*Gantmaher* [1988], *Krekó* [1976] és *Rózsa* [1976]). Ennek segítségével azt is beláthatjuk, hogy szinguláris tőkemátrixú modellek esetén a sajátértékek száma határozottan kisebb, mint a gazdaság ágazatainak száma. Más utat választott *Bródy* [2004] a sajátértékek meghatározásához. A feladatot olyan klasszikus sajátérték–sajátvektor problémává alakítja át a Leontief-inverz segítségével, ahol a sajátértékek reciprokai szerepelnek. Ekkor a sajátértékek és sajátvektorok száma megegyezik az ágazatok számával, ami – amint látni fogjuk – nem lehetséges.

A dolgozat felépítése a következő: vázoljuk a megoldandó zárt Leontief-modellt és az általánosított sajátérték-feladatot, majd a *Bródy* [2004]-ben található példán keresztül szemléltetjük az eredményeket, végül összegezzük a leírtakat.

A zárt dinamikus Leontief-modell és megoldásai

A zárt dinamikus Leontief-modell alakja a következő:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\dot{\mathbf{x}}(t), \tag{1}$$

ahol az $\mathbf{A}$ $n \times n$-es nemnegatív mátrix a folyó ráfordítások mátrixa, a $\mathbf{B}$ $n \times n$-es mátrix a tőkebefektetések nemnegatív mátrixa, amely szinguláris nulla elemekből álló sorvektor. Végül az $\mathbf{x}(t)$ vektor az ágazatok termelését tartalmazza. Feltételezzük, hogy az $\mathbf{A}$ mátrixnak létezik Leontief-inverze (*Bródy* [1969]). Tételezzük még fel azt is, hogy az (1) differenciálegyenlet-rendszert a $t \in [0, T]$ intervallumon vizsgáljuk, és a kezdeti érték: $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$.

Az (1) rendszert átalakíthatjuk a következő formára:

$$\begin{aligned} &\mathbf{B}\dot{\mathbf{x}}(t) = (I - \mathbf{A})\mathbf{x}(t), \qquad t \in [0, T] \\ &\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0. \end{aligned} \tag{2}$$

E rendszerről megállapítottuk, hogy a tőkebefektetések $\mathbf{B}$ mátrixa nem invertálható, így az idő szerinti $\dot{\mathbf{x}}(t)$ derivált expliciten nem fejezhető ki. A rendszer mátrixai $[\mathbf{B}, (\mathbf{I} - \mathbf{A})]$ azonban reguláris mátrixsereget alkotnak (*Gantmaher* [1988], *Rózsa* [1976]), így a (2) differenciálegyenlet-rendszer megoldható. Adósak vagyunk még azzal, hogy mit is jelent a reguláris mátrixsereg. A $[\mathbf{B}, (\mathbf{I} - \mathbf{A})]$ mátrixok reguláris mátrixsereget alkotnak, ha létezik olyan λ valós szám, amelyre a $\lambda\mathbf{B} - (\mathbf{I} - \mathbf{A})$ mátrix nemszinguláris. Ez pedig esetünkben teljesül $\lambda = 0$ esetén, ugyanis feltettük, hogy az $\mathbf{A}$ mátrixnak létezik Leontief-inverze, azaz létezik az $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ mátrix. Ha ez a mátrix nem létezne, vagyis a gazdaság csak egyszerű újratermelésre lenne képes, akkor nem biztos, hogy valamilyen λ esetén a kifejezés nemszinguláris lenne.

A (2) rendszer megoldásához a következő általánosított sajátérték-feladatot kell megoldani:

$$\lambda\mathbf{B}\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x},$$

vagy más formában

$$[\lambda\mathbf{B} - (\mathbf{I} - \mathbf{A})]\mathbf{x} = \mathbf{0}. \tag{3}$$

A probléma egyik alkalmazását az olasz gazdaság adataira vizsgálta *Campisi–Nastasi–La Bella* [1992], az egyensúlyi arányos pályát előállítva. A (3) probléma viszonylag egyszerűen kanonikus alakra hozható, amint azt a függelékben bemutatjuk, annak feltételezésével, hogy az $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$ mátrix egyszerű struktúrájú, azaz a kanonikus alakja diagonizálható. (Ez a feltevés nem jelent túl nagy megszorítást.) Az általánosított sajátérték-probléma kanonikus alakja:

$$\lambda \cdot \mathbf{B} - (\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \mathbf{P}\left\{\lambda \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{E}} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix}\right\}\mathbf{Q}, \tag{4}$$

amit *Dobos* [1987–1988] dolgozat is megmutatott. Itt a Λ diagonális mátrix, ami átlójában az általánosított sajátértékeket tartalmazza. A kanonikus felírásból azonnal látható, hogy a sajátértékek száma kisebb, mint az ágazatok száma, vagyis n. A (4) kifejezés akkor lesz szinguláris, ha λ a sajátértékkel egyezik. Az is nyilvánvaló, hogy a (3) sajátérték-probléma bal oldali sajátvektorait (az árakat) a $\mathbf{P}^{-1}$ megfelelő sorvektorai, míg a jobb oldali sajátvektorait (a termelés szintjeit) a $\mathbf{Q}^{-1}$ megfelelő oszlopvektorai tartalmazzák. Az is megállapítható, hogy a **P** és **Q** mátrixok előállítása nem egyértelmű, amint azt a függelékben is bemutatjuk.

Helyettesítsük most a (4) kanonikus alakot a (3) feladatba:

$$[\lambda \cdot \mathbf{B} - (\mathbf{I} - \mathbf{A})] \cdot \mathbf{x} = \mathbf{P}\left\{\lambda \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{E}} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix}\right\}\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{z} = \mathbf{0}, \tag{5}$$

ahol $\mathbf{x} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{z}$. Particionáljuk most a $\mathbf{Q}^{-1}$ mátrixot a sajátvektorokat tartalmazó mátrixoknak megfelelően: $\mathbf{Q}^{-1} = [\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2]$. Ekkor a sajátvektorokat a $\mathbf{Q}_1 = [q_1, q_2, \ldots q_k]$ $(k < n)$ mátrix tartalmazza. Ennek segítségével a (2) differenciálegyenlet-rendszer megoldása:

$$x(t) = \sum_{i=1}^{k} e^{\lambda_i \cdot t} \cdot q_i \cdot z_i,$$

ahol $\mathbf{z} = [z_1, z_2, \ldots, z_k]'$ vektort a (6) lineáris egyenletrendszerből határozhatjuk meg:

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{Q}_1\mathbf{z}. \tag{6}$$

Ha a (6) rendszernek **z**-re nincs megoldása, akkor a (2) differenciálegyenlet-rendszert nem lehet megoldani.

Numerikus példák

Az eredmények demonstrálásához a *Bródy* [2004] dolgozatában található input-output modellt vesszük alapul. A háromszektoros (vállalatok, háztartások és állam) modell mátrixai a következők:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 10 \end{bmatrix}.$$

Ez a rendszer nagyban hasonlít a korábban vizsgált szinguláris tőkebefektetési mátrixú modellekhez, mégpedig abban, hogy egy regularitási feltétel erre a modellre is teljesül:

$$\widetilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ -0{,}1 & 0{,}7 & -0{,}2 \\ 0 & 1 & 10 \end{bmatrix}$$

mátrix invertálható. Ezzel a feltétellel tette rekurzívvá modelljét *Livesey* [1972], *Kendrick* [1972], *Luenberger–Arbel* [1977], *Campbell* [1979], *Meyer* [1982] és *Grigorkiv–Ljasenko* [2000]. Most ezt a regularitási feltételt nem használjuk.

Vizsgáljuk meg, hogy ennek a modellnek mennyi sajátértéke van. Ehhez úgy juthatunk el, hogy vizsgáljuk a $\lambda\mathbf{B} - (\mathbf{I} - \mathbf{A})$ mátrix determinánsát, és amilyen λ-ra a determináns zérus, ott vannak a sajátértékek. A determináns, vagyis a karakterisztikus függvény a következő függvénye a λ-nak:

$$K(\lambda) = -26{,}4\lambda^2 + 5{,}14\lambda - 0{,}142.$$

Ennek a zérushelyei: $\lambda_1 = \frac{1}{30}$, $\lambda_2 = \frac{71}{440}$. Ebből azonnal látszik, hogy csak két sajátérték létezik, ellentétben azzal, amit *Bródy* [2004] a 928. oldalon vizsgál. Ennek a rendszernek a zérus nem lehet sajátértéke. A sajátértékhez tartozó jobb és bal oldali sajátvektorok a következők:

$$\lambda_1 = \frac{1}{30}, \quad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_1 = [1 \quad 1 \quad 1],$$

és

$$\lambda_2 = \frac{71}{440}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 32 \\ 2 \\ -9 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} \frac{7}{6} & \frac{269}{164} & -1 \end{bmatrix}.$$

Ezek az eredmények azonosak a *Bródy* [2004] által meghatározottakkal, és a megoldások természetesen arányaiban egyértelműek. A legkisebb abszolút értékű megoldáshoz tartoznak nemnegatív sajátvektorok.

Oldjuk most meg a következő differenciálegyenlet-rendszert:

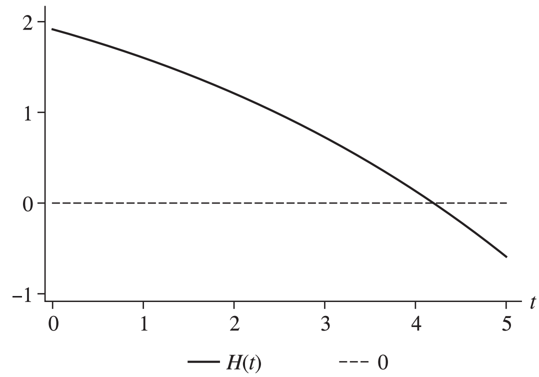
$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}, \qquad t \in [0, 5].$$

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16{,}5 \\ 2{,}9 \\ 1{,}9 \end{bmatrix}.$$

E rendszer megoldása a következő:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = e^{\frac{1}{30}\cdot t} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot 2{,}3 + e^{\frac{71}{440}\cdot t} \begin{bmatrix} 32 \\ 2 \\ -9 \end{bmatrix} \cdot 0{,}3, \qquad t \in [0, 5].$$

1. ábra
A háztartások termelésének alakulása



A vállalatok és az állam pályája a kezdeti érték mellett pozitív és növekvő, de a háztartások termelése csökkenő. Ezt mutatja az *1. ábra*. A háztatások termelése a 4. évben nullává válik.

A háztartások termelése csak akkor nem csökkenő, ha csak a pozitív sajátvektor, vagyis a Neumann-sugár mentén növekszik a gazdaság:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = e^{\frac{1}{30} \cdot t} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot 2{,}3 + e^{\frac{71}{440} \cdot t} \begin{bmatrix} 32 \\ 2 \\ -9 \end{bmatrix} \cdot 0, \qquad t \in [0, 5].$$

Ez azt is jelenti, hogy a (2) rendszernek csak akkor van nemnegatív megoldása elég nagy tervezési időhorizonton, ha a gazdaság egyensúlyi arányos pályáról indul. Minden más esetben vagy a vállalatok és az állam, vagy a háztartások termelése zérus alá csökken. Ugyanez az állítás tehető az árakról is. Ez az eredmény más modern makroökonómiai modellben is jelen van, vagyis hosszú távon a Neumann-sugáron, azaz az egyensúlyi arányos pályán lesz nemnegatív a gazdaság trajektóriája (lásd *Blanchard–Fischer* [1989] vagy *Tamai* [2007]).

Összefoglalás

A dolgozat újra megvizsgálta a szingularitás problémáját a zárt dinamikus Leontief-modellben. A szingularitást a Leontief-modell struktúrája miatt jól lehet kezelni a reguláris mátrixseregek elméletével. A szingularitás miatt a sajátértékek és a hozzá tartozó sajátvektorok száma szigorúan kisebb, mint a gazdaság ágazatainak száma. A zárt dinamikus Leontief-modell folytonos változatában nulla sajátérték nem fordulhat elő, ezért azt vizsgálni sem lehet. A folytonos idejű dinamikus Leontief-modell hosszú távú megoldása csak akkor ad nemnegatív megoldást, ha a kezdő állapotban a rendszer a Neumann-sugáron, vagyis az egyensúlyi arányos pályán van. Minden más esetben a rendszer egy véges időpontban elhagyja a nemnegatív ortánst.

Hivatkozások

BLANCHARD, O. J.–FISCHER, S. [1989]: Lectures on Macroeconomics, The MIT Press, Cambrige, Mass.–London.

BRÓDY ANDRÁS [1969]: Érték és újratermelés. Közgazdasági és Jogi könyvkiadó, Budapest.

BRÓDY ANDRÁS [2004]: Leontief zárt dinamikus modellje. Közgazdasági Szemle, 10. sz. 924–935. o.

CAMPBELL, S. L. [1979]: Nonregular singular dynamic Leontief systems. Econometrica, 47, 1565–1568. o.

CAMPISI, D.–NASTASI, A.–LA BELLA, A. [1992]: Balanced growth and stability of the Leontief dynamic model: an analysis of the Italian economy. Environment and Planning A, 24. 591–600. o.

DOBOS IMRE [1987–1988]: A szinguláris tőkemátrixú Leontief-modell rekurzivitása. Szigma, XX. évf., 269–285. o.

GANTMAHER, F. G. [1988]: Tyeorija matric. 4. kiadás, Nauka, Moszkva.

GRIGORKIV, V. SZ.–LJASENKO, I. N. [2000]: Optyimizacionnaja gyinamicseszkaja model Leontyeva-Forda v uszlovijah ekologicseszkogo ravnoveszija. Kibernyetyika i Szisztyemnij Analiz, 36. 212–218. o.

KENDRICK, D. [1972]: On the Leontief dynamic inverse. Quarterly Journal of Economics, 86, 693–696. o.

KIEDROWSKI, R. [2001]: A turnpike theorem in the closed dynamic Leontief model with a singular matrix of capital coefficients. Economic Systems Reserch, 13. 209–222. o.

KREIJGER, R. G.–NEUDECKER, H. [1976]: Kendrick's „forward integration method" and the dynamic Leontief multisectoral model. Quarterly Journal of Economics, 90. 505–507. o.

KREKÓ BÉLA [1976]: Lineáris algebra. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.

LEONTIEF, W. [1976]: A dinamikus inverz. Megjelent: *Leontief, W.:* Terv és gazdaság. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 77–107. o. [Eredetileg megjelent: *Leontief, W. W.* [1970]: The dynamic inverse. Megjelent: C*arter, A.–Bródy, A.* (szerk.): Contributions to Input-Output Analysis I. North-Holland, Amszterdam.]

LIVESEY, D. A. [1972]: The singularity problem in the dynamic input-output model. International Journal of Systems Scince, 4. 437–440. o.

LUENBERGER, D. G.–ARBEL, A. [1977]: Singular dynamic Leontief systems. Econometrica, 45. 991–995. o.

MEYER, U. [1982]: Why singularity of dynamic Leontief systems doesn't matter. Megjelent: *Völgyes, T.* (szerk.): Proceedings of the third Hungarian conference on input-output techniques: 3–5. November 1981., Hévíz. Statistical Publishing House, Budapest.

RÓZSA PÁL [1976]: Lineáris algebra és alkalmazásai. 2. kiadás, Műszaki Könyvkiadó, Budapest.

SCHINNAR, A. P. [1978]: The Leontief dynamic generalized inverse. Quarterly Journal of Economics, 92. 641–652. o.

TAMAI, T. [2007]: Public intermediate goods, endogenous growth, and indeterminacy. Economic Modelling, 24. 683–689. o.

Függelék

A $\lambda\mathbf{B} - (\mathbf{I} - \mathbf{A})$ mátrix kanonikus alakra hozásakor két úton indulhatunk el.

1. út.
Emeljük ki az $(\mathbf{I} - \mathbf{A})$ mátrixot először balra. Ekkor a $(\mathbf{I} - \mathbf{A})[\lambda \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} - \mathbf{I}]$ alakot kapjuk. Amint feltételeztük, az $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$ mátrix egyszerű struktúrájú, így az diagonizálható a jobb oldali és bal oldali sajátértékek $\mathbf{X}$ és $\mathbf{X}^{-1}$ mátrixával:

$$(\mathbf{I}-\mathbf{A})\cdot[\lambda\cdot(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}-\mathbf{I}] = (\mathbf{I}-\mathbf{A})\cdot\left[\lambda\cdot\mathbf{X}^{-1}\begin{bmatrix}\tilde{\ddot{\mathbf{E}}} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\mathbf{X}-\mathbf{I}\right] =$$

$$= (\mathbf{I}-\mathbf{A})\cdot\mathbf{X}^{-1}\left[\lambda\cdot\begin{bmatrix}\tilde{\ddot{\mathbf{E}}} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}\end{bmatrix}\right]\mathbf{X}.$$

Ezt azért tehetjük, mert ismert, hogy az $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$ mátrixnak vannak nulla sajátértékei. Utolsó lépésben a kapcsos zárójelben lévő kifejezésben a λ-hoz tartozó mátrixot alakítjuk egységmátrixszá. Ezt két úton tehetjük, jobbra, vagy balra kiemelve a mátrixot:

$$(\mathbf{I}-\mathbf{A})\cdot\mathbf{X}^{-1}\left[\lambda\cdot\begin{bmatrix}\tilde{\ddot{\mathbf{E}}} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}\end{bmatrix}\right]\mathbf{X} = (\mathbf{I}-\mathbf{A})\cdot\mathbf{X}^{-1}\begin{bmatrix}\tilde{\ddot{\mathbf{E}}} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}\end{bmatrix}\cdot\left[\lambda\cdot\begin{bmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\tilde{\ddot{\mathbf{E}}}^{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}\end{bmatrix}\right]\mathbf{X},$$

vagy

$$(\mathbf{I}-\mathbf{A})\cdot\mathbf{X}^{-1}\left[\lambda\cdot\begin{bmatrix}\tilde{\ddot{\mathbf{E}}} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}\end{bmatrix}\right]\mathbf{X} = (\mathbf{I}-\mathbf{A})\cdot\mathbf{X}^{-1}\cdot\left[\lambda\cdot\begin{bmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\tilde{\ddot{\mathbf{E}}}^{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}\end{bmatrix}\right]\cdot\begin{bmatrix}\tilde{\ddot{\mathbf{E}}} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}\end{bmatrix}\cdot\mathbf{X}.$$

2. út.
Emeljük ki az $(\mathbf{I} - \mathbf{A})$ mátrixot most jobbra. Ekkor a $[\lambda\mathbf{B}(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} - \mathbf{I}](\mathbf{I} - \mathbf{A})$ alakot kapjuk. Most is egyszerű struktúrájú a $\mathbf{B}(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ mátrix, így az diagonizálható a jobb oldali és bal oldali sajátértékek $\mathbf{Y}$ és $\mathbf{Y}^{-1}$ mátrixával:

$$[\lambda\cdot\mathbf{B}(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}-\mathbf{I}]\cdot(\mathbf{I}-\mathbf{A}) = \left[\lambda\cdot\mathbf{Y}^{-1}\begin{bmatrix}\tilde{\ddot{\mathbf{E}}} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\mathbf{Y}-\mathbf{I}\right]\cdot(\mathbf{I}-\mathbf{A}) =$$

$$= \mathbf{Y}^{-1}\left[\lambda\cdot\begin{bmatrix}\tilde{\ddot{\mathbf{E}}} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}\end{bmatrix}\right]\cdot(\mathbf{I}-\mathbf{A})\cdot\mathbf{Y}.$$

Utolsó lépésben a kapcsos zárójelben lévő kifejezésben a λ-hoz tartozó mátrixot alakítjuk egységmátrixszá. Ezt is két úton tehetjük, jobbra, vagy balra kiemelve a mátrixot:

$$\mathbf{Y}^{-1}\left[\lambda\cdot\begin{bmatrix}\tilde{\ddot{\mathbf{E}}} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}\end{bmatrix}\right]\cdot(\mathbf{I}-\mathbf{A})\cdot\mathbf{Y} = \mathbf{Y}^{-1}\cdot\begin{bmatrix}\tilde{\ddot{\mathbf{E}}} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}\end{bmatrix}\cdot\left[\lambda\cdot\begin{bmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\tilde{\ddot{\mathbf{E}}}^{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}\end{bmatrix}\right]\cdot(\mathbf{I}-\mathbf{A})\cdot\mathbf{Y},$$

vagy

$$\mathbf{Y}^{-1}\left[\lambda\cdot\begin{bmatrix}\tilde{\ddot{\mathbf{E}}} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}\end{bmatrix}\right]\cdot(\mathbf{I}-\mathbf{A})\cdot\mathbf{Y}=\mathbf{Y}^{-1}\cdot\left[\lambda\cdot\begin{bmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\tilde{\ddot{\mathbf{E}}}^{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}\end{bmatrix}\right]\cdot\begin{bmatrix}\tilde{\ddot{\mathbf{E}}} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}\end{bmatrix}\cdot(\mathbf{I}-\mathbf{A})\cdot\mathbf{Y}.$$

Ezzel a lehetséges négy kanonikus alakot előállítottuk. Foglaljuk most össze ezeket a **P** és **Q** mátrixokkal jelölt alakokat!

P	**Q**
$(\mathbf{I}-\mathbf{A})\cdot\mathbf{X}^{-1}\cdot\begin{bmatrix}\tilde{\ddot{\mathbf{E}}} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}\end{bmatrix}$	$\mathbf{X}$
$(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}^{-1}$	$\begin{bmatrix}\tilde{\ddot{\mathbf{E}}} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}\end{bmatrix}\cdot\mathbf{X}$
$\mathbf{Y}^{-1}\cdot\begin{bmatrix}\tilde{\ddot{\mathbf{E}}} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}\end{bmatrix}$	$(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{Y}$
$\mathbf{Y}^{-1}$	$\begin{bmatrix}\tilde{\ddot{\mathbf{E}}} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}\end{bmatrix}\cdot(\mathbf{I}-\mathbf{A})\cdot\mathbf{Y}$

Ebből a formából azonnal látható, hogy az általánosított sajátérték-feladat jobb oldali sajátvektorai az egyik felírásban megegyeznek az $(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$ mátrix nem nulla sajátértékhez tartozó sajátvektoraival; míg a bal oldali sajátvektorok megegyeznek a $\mathbf{B}(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}$ mátrix nem nulla sajátértékhez tartozó sajátvektoraival. Az általánosított sajátvektor-probléma sajátértékei megegyeznek e két mátrix nem nulla sajátértékeinek reciprokával.