Közgazdasági Szemle, LIII. évf., 2006. március (235–252. o.)

HORVÁTH ÁRON

Nemlineáris, sztochasztikus differenciaegyenletek megoldása Uhlig-algoritmussal

A modern közgazdasági elemzések során gyakran alkalmaznak sztochasztikus, dinamikus modelleket. A mikroökonómiai alapokra épülő makroökonómiai modellekben például az általános egyensúlyi modellek megoldásaként adódó feltételek nemlineáris, sztochasztikus differenciaegyenlet-rendszerrel írhatók le. Receptszerű írásomban megmutatom, hogy az egyszerűbb rendszerek – a számítástechnika fejlődésének köszönhetően – már graduális szintű közgazdasági tudással megoldhatóvá és elemezhetővé váltak. A *Blanchard–Kahn* [1980] tanulmányhoz fűződő algoritmus egy mátrix-egyenletrendszer megoldásaként mutatja be a modellek rekurzív formáját. Harald Uhlig német közgazdász ezt alakította át számítógépes alkalmazás céljából (*Uhlig* [1999]), így a felhasználók körében gyakran rá hivatkoznak. A módszer alkalmazhatóságának két fontos megszorító kritériuma van: a modelleknek létezzen állandósult állapotuk, és legyenek lineárisan közelíthetők. Két példával illusztráljuk, hogy a megoldáshoz szükséges eszköztár nem haladja meg a bonyolultabb multiplikátorelemzések szintjét. A reál üzleti ciklusok (RBC) modelljén részletesen sorra vesszük a lépéseket, majd röviden egy rövid távú alkalmazkodást megjelenítő, ragadós áras modellt is bemutatunk.*

Journal of Economic Literature (JEL) kód: A23, C63.

Az írás célja, hogy bátorítsa a kutatókat, egyetemi oktatókat és hallgatókat a modern közgazdasági elméletek sztochasztikus, dinamikus rendszereinek használatára. Ennek megfelelően felhasználási útmutatót szeretnénk szolgáltatni az Uhlig-algoritmushoz, ezért az első példában lépésről lépésre haladva mutatjuk be a módszert.[1]

A modern közgazdasági modellek megoldásához gyakran nemlineáris differenciaegyenlet-rendszerrel kell megbirkóznunk. Ezek – még elméletük alapján egyszerűbb modellek esetében is – igen bonyolultak lehetnek, legtöbbször analitikusan megoldhatatlanok. Az Uhlig-algoritmus ezt a problémát úgy hidalja át, hogy az egyenleteket a Taylor-polinomjaik elsőfokú lineáris közelítésével helyettesíti, azaz lineáris rendszerré alakítja. A Taylor-közelítés során használt fókuszpont a modellek állandósult állapota *(steady state),* így a közelítés után megjelenik a változók állandósult állapottól való eltérése. A változók nagy-

* Köszönettel tartozom *Világi Balázsnak,* aki sokat segített az Uhlig-algoritmus elsajátításában. Köszönet illeti továbbá *Szilágyi Katalint* és *Major Klárát* a cikkel kapcsolatos megjegyzéseikért.

A cikkben alkalmazott vezérlőfájlok letölthetők a http://www.bkae.hu/makro/macro_main.php?id=32 címről. Igyekeztem részletes kommentárral ellátni őket, és további kérdésekre szívesen válaszolok az aron.horvath@uni-corvinus.hu címen.

[1] Bizonyításokat csak hivatkozás formájában szerepeltetek. A számítások a MATLAB programcsomag előre megírt segédprogramjának felhasználásával történik. A két példa közgazdasági tartalma szokásos egyetemi tananyag. Az eljárás használatához szükséges legbonyolultabb módszertani eszköz pedig a deriválás.

Horváth Áron a Budapesti Corvinus Egyetem makroökonómia tanszékének tanársegédje.

ságrendjének eltéréséből adódó problémák kiküszöbölésére még gyakrabban alkalmazott módszer a loglinearizálás. A változók loglinearizáltja a fókuszponttól való százalékos eltérést mutatja meg.

Felhasználva az egyensúly környezetét leíró loglinearizált egyenleteket, lehetővé válik a rendszer alakulásának rekurzív formájú meghatározása. Ehhez a meghatározatlan (determinálatlan) együtthatók módszerének alkalmazásával egy kvadratikus (másodfokú) mátrixegyenlet megoldása szükséges. Ezt az – egyébként meglehetősen bonyolult – lépést teszi mindenki számára elérhetővé a számítógépes szoftver alkalmazása.[2] A tárgyalás sorrendje megegyezik az Uhlig-algoritmus lépéseinek menetével: *1.* felírjuk az egyensúlyt jellemző egyenleteket; *2.* kiszámoljuk a változók állandósult állapotát; *3.* loglinearizáljuk az egyenleteket; *4.* meghatározzuk az egyenletrendszer mátrixalakját; *5.* megadjuk a paramétereket; *6.* megoldatjuk a számítógéppel a differenciaegyenlet-rendszert; *7.* impulzus–válasz-függvények segítségével elemezzük a megoldást. Az Uhlig-algoritmus lépéseinek bemutatását követően a gazdaság rövid távú (ragadós árak melletti) alkalmazkodását leíró hagyományos modell, az *IS–LM* modern megfelelőjét ismertetjük.

Reál üzleti ciklusok modellje

A sztochasztikus, dinamikus rendszerek egyik sokat emlegetett példája a *reál üzleti ciklusok* (RBC) modellje.[3] Itt csak röviden vázoljuk a modell alapjait, és nem részletezzük az általános egyensúlyt leíró egyenletrendszerhez vezető számításokat.

A reprezentatív háztartás optimalizálási problémája:[4]

$$\max E_t\left[\sum_{t=1}^{\infty}\beta^{t-1}U(c_t,l_t)\right], \text{ feltéve, hogy}$$

$$c_t + k_{t+1} + b_t = \Pi_t + w_t l_t + h_t k_t + (1-\delta)k_t + (1+r_{t-1})b_{t-1}.$$

A reprezentatív vállalat optimalizálási problémája:

$$\max \Pi_t = F_t(k_t,l_t) - h_t k_t - w_t l_t.$$

A piacok egyensúlyát leíró egyenletek:

– zárt gazdaságról lévén szó, nincs kölcsönállomány: $b_t = 0$;

– árupiac: $F_t(k_t,l_t) + (1-\delta)k_t = c_t + k_{t+1}$;

– a tőkepiac és a munkapiac egyensúlyát már a jelölések egyszerűsítésébe (nincs külön kereslet és kínálat) belefoglaltuk.

A fenti egyenletekben a változók standard jelölései szerepelnek: c_t a fogyasztás mennyisége a *t*-edik időszakban, l_t a munka mennyisége, k_t a tőkeállomány nagysága, b_t a kötvényállomány, Π_t a reprezentatív vállalat profitja, w_t a reálbér, h_t a tőke reálhozama, r_t a kamatláb. A későbbiekben ugyanezen változók más formái is feltűnnek majd. Az index nélküli forma az adott változó állandósult állapotbeli értékét jelöli, a hullám pedig az állandósult állapottól vett aktuális százalékos eltérést.[5]

[2] Írásunk recept a megoldáshoz, az egyensúly létezését, stabilitását, unicitását, a linearizálhatóságot nem vizsgáljuk. Bonyolultabb problémák esetén mindenképpen ajánlható a kapcsolódó irodalom mélyebb feldolgozása, kitűnő áttekintést ad például a *Marimon–Scott* [1999] cikkgyűjtemény.

[3] Szintetizáló írás a témakörben *King–Rebelo* [1999], valamint részletes tankönyvi leírást nyújt *Romer* [1996] 146–195. o.

[4] A tömörség céljából most nem került ide a végponti, úgynevezett transzverzalitási feltétel.

[5] Például: c_t a fogyasztás reálmennyisége a *t*-edik időszakban; *c* a fogyasztás reálmennyisége az állandósult állapotban, a $\tilde{c}_t$ a fogyasztás százalékos formában értelmezett eltérése a *t*-edik időszakban a változó állandósult állapotbeli értékétől.

Az egyensúlyt jellemző egyenletek

Az elsőrendű feltételek felírásával és egyszerű átalakításokkal eljutunk az optimalitási feltételekhez. A fogyasztó intertemporális optimalizálását leíró elsőrendű feltétel, az Euler-egyenlet:

$$U_{ct} = \beta(1+r_t)E_t[U_{ct+1}].$$

A fogyasztó intratemporális optimalizálási feltétele (implicit munkakínálati összefüggés):

$$\frac{U_{l_t}}{U_{c_t}} = w_t.$$

A fogyasztó optimális befektetési politikáját leíró portfólióválasztási egyenlet (amely determinisztikus formában tulajdonképpen egy arbitrázsmentességi feltétel):

$$E_t\left[\frac{U_{c_{t+1}}}{U_{c_t}}(1+r_t)\right] = E_t\left[\frac{U_{c_{t+1}}}{U_{c_t}}(1+r_t-\delta)\right].$$

A termelő profitmaximalizálását leíró elsőrendű feltételek.

– tőketényezőben (implicit kereslet a tőkejószág iránt): $h_t = F_{k_t}$.

– munkában (implicit munkakereslet): $w_t = F_{l_t}$.

A termékpiac egyensúlya (GDP-azonosság):

$$c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t = F(k_t, l_t) \quad (c_t + i_t = y_t).$$

A Walras-törvény értelmében a fogyasztó költségvetési korlátja egyenlőségként teljesül. Az általános egyensúlyt leíró optimalizálási és piactisztulási feltételek némi egyszerűsítése után egy négy egyenletből álló rendszert szokás felírni.

Az Euler-egyenlet:

$$U_{c_t} = \beta E_t[(1+r_t)U_{c_{t+1}}].$$

Munkapiaci egyensúly (a fogyasztó és a termelő intratemporális optimalizálását összevonva):

$$\frac{U_{l_t}}{U_{c_t}} = F_{l_t} \quad (= w_t).$$

Tőkepiaci egyensúly (a fogyasztó lehetséges befektetések tekintetében történő optimalizálását – a portfólióválasztást – és a termelő optimális tőkefelhasználását sűrítve):

$$E_t\left[\frac{U_{c_{t+1}}}{U_{c_t}}(1+r_t)\right] = E_t\left[\frac{U_{c_{t+1}}}{U_{c_t}}(1+F_{k_{t+1}}-\delta)\right].$$

A GDP-azonosság:

$$c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t = F(k_t, l_t) \quad (c_t + i_t = y_t).$$

A továbbiakban a problémát egy additívan szeparálható hasznossági és egy Cobb–Douglas-féle termelési függvénnyel specifikáljuk:

$$U_t(c_t, l_t) = \frac{c_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{l_t^{1+\varphi}}{1+\varphi} \qquad y_t = A_t k_t^{\alpha} l_t^{1-\alpha}.$$

Ennek felhasználásával a következő négy egyenlethez jutunk:

$$c_t^{-\sigma} = \beta E_t[(1+r_t)c_{t+1}^{-\sigma}] \tag{1}$$

$$\frac{l_t^{\varphi}}{c_t^{-\sigma}} = (1-\alpha)A_t k_t^{\alpha} l_t^{-\alpha} \tag{2}$$

$$E_t\left[\frac{\beta c_{t+1}^{-\sigma}}{c_t^{-\sigma}}(1+r_t)\right] = E_t\left[\frac{\beta c_{t+1}^{-\sigma}}{c_t^{-\sigma}}(1+\alpha A_{t+1}k_{t+1}^{\alpha-1}l_{t+1}^{1-\alpha}-\delta)\right] \tag{3}$$

$$c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t = A_t k_t^{\alpha} l_t^{1-\alpha} \tag{4}$$

Ez a négy egyenlet írja le a négy endogén változó (c_t, l_t, k_t, r_t) viselkedését. A teljes rendszerhez hozzátartozik még egy exogén (sokk)változó. Az A_t technológiai paraméter mozgását leíró egyenletet a loglinearizált rendszer felírásakor (A lineáris differencia-egyenlet-rendszer című pontban) adjuk meg.

Az állandósult állapot kiszámítása

Az Uhlig-algoritmus használatának egyik kritériuma, hogy a változóknak legyen állandósult állapota.[6] Pontos meghatározásukhoz négy statikus egyenletet kell megoldani négy ismeretlennel: *r, c, l, k*. A technológiai paraméter állandósult állapotbeli értékét $A = 1$-nek definiáljuk (normalizáljuk).

Az (1)-ből: $c^{-\sigma} = \beta(1+r)c^{-\sigma} \quad \Rightarrow \quad 1 = \beta(1+r) \quad \Rightarrow \quad r = \frac{1}{\beta} - 1,$

a (3)-ból: $1 + r = 1 + \alpha\left(\frac{k}{l}\right)^{\alpha-1} - \delta \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{r+\delta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} = \frac{k}{l},$

a (2)-ből: $l^{\varphi}c^{\sigma} = (1-\alpha)\left(\frac{k}{l}\right)^{\alpha} \quad \Rightarrow \quad c = l^{\frac{-\varphi}{\sigma}}\left[(1-\alpha)\left(\frac{k}{l}\right)^{\alpha}\right]^{\frac{1}{\sigma}}$ és

a (4)-ből: $c + k - (1-\delta)k = k^{\alpha}l^{1-\alpha} \quad \Rightarrow$

$$l^{\frac{-\varphi}{\sigma}}\left[(1-\alpha)\left(\frac{k}{l}\right)^{\alpha}\right]^{\frac{1}{\sigma}} + \delta\left(\frac{k}{l}\right)l = \left(\frac{k}{l}\right)^{\alpha} l \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad l^{\frac{-\varphi}{\sigma}-1} = \frac{\left(\frac{k}{l}\right)^{\alpha} - \delta\left(\frac{k}{l}\right)}{\left[(1-\alpha)\left(\frac{k}{l}\right)^{\alpha}\right]^{\frac{1}{\sigma}}} \quad \Rightarrow \quad l.$$

Innen már visszahelyettesítéssel könnyen megkapható $k\left[=\left(\frac{k}{l}\right)l\right]$ és c.

[6] Az egyes változók ebben a pontban felvett értékét a továbbiakban index nélküli betűvel jelöljük.

Loglinearizálás

Ebben a lépésben a (1)–(4) differenciaegyenletekből álló nemlineáris rendszert az Uhlig-algoritmus részeként loglinearizált formára alakítjuk. A Taylor-sorba fejtéshez csak deriválás szükséges, kis gyakorlás esetén elsajátíthatók azok az ügyes trükkök is, amelyek tovább könnyíthetik a metódust.

Nézzük, mi a teendő! Az $f(x_1, x_2, \ldots, x_N) = 0$ differenciálható függvényt az $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_N)$ fókuszpont körül sorba fejtve kapjuk, hogy:

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x}_j) \cdot (x_j - \bar{x}_j) \approx 0,$$

a másodrendű hibákat kicsinynek tekintve és bevezetve $\Delta x_j \equiv x_j - \bar{x}_j$-t:

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x}_j) \cdot \Delta x_j = 0.$$

Ez az $f(\mathbf{x}) = 0$ egyenlet linearizált változata. A közgazdaságtanban a különböző változók nagyságrendje sokszor eltér egymástól, ezért inkább használatos a loglinearizált változat, amelyet a következő módon definiálunk, amennyiben x_j változó fókuszpontbeli értéke nem nulla:

$$\tilde{x}_j \equiv \frac{\Delta x_j}{|\bar{x}_j|} = \frac{x_j - \bar{x}_j}{|\bar{x}_j|}.$$

Így $\tilde{x}_j$ mutatja a változó fókuszponttól való százalékos eltérését. Fókuszpontként leggyakrabban az állandósult állapot értéke használatos, így amikor $\tilde{c}_t = 0{,}03$, akkor az aktuális fogyasztás nagyjából 3 százalékkal haladja meg az állandósult állapotbeli fogyasztás értékét. A módszer azért kapta a loglinearizálás nevet, mert kis eltérések esetén a természetes alapú logaritmus jól közelíti a százalékos eltérést: $\tilde{x}_t \equiv \dfrac{x_j - \bar{x}_j}{|\bar{x}_j|} \approx \log x_t - \log \bar{x}$.

Ezek után az eredeti egyenletünk loglinearizált formáját a fókuszponttal való szorzással és osztással kapjuk:

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x}_j) \cdot |\bar{x}_j| \cdot \tilde{x}_j = 0.$$

Szövegesen értelmezve: a következő műveleteket kell elvégezni az összes változóra:

a függvény adott változó szerinti parciális deriváltjának értéke a fókuszpontban ×
× a változó fókuszpontbeli értéke × a loglinearizált változó,

majd összegezni kell az összes változóra.

A GDP-egyenlőség. Nézzük elsőként a GDP-egyenlőségre történő alkalmazást!

$$c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t - A_t k_t^{\alpha} l_t^{1-\alpha} = 0.$$

A nullára rendezett összefüggésben öt változó van: c_t, k_{t+1}, k_t, A_t, l_t,

$$1 \cdot c \cdot \tilde{c}_t + 1 \cdot k \cdot \tilde{k}_{t+1} - (1-\delta) \cdot k \cdot \tilde{k}_t - \alpha A k^{\alpha-1} l^{1-\alpha} \cdot k \cdot \tilde{k}_t -$$
$$- k^{\alpha} l^{1-\alpha} \cdot A \cdot \tilde{A}_t - (1-\alpha) A k^{\alpha} l^{-\alpha} \cdot l \cdot \tilde{l}_t = 0.$$

Elemi módon átrendezve és felhasználva az $Ak^{\alpha}l^{-\alpha} = y$ összefüggést:

$$c\widetilde{c}_t + k\widetilde{k}_{t+1} - (1-\delta)k\widetilde{k}_t - y[\widetilde{A}_t + \alpha\widetilde{k}_t + (1-\alpha)\widetilde{l}_t] = 0,$$

azaz:

$$c\widetilde{c}_t + k\widetilde{k}_{t+1} - (1-\delta)k\widetilde{k}_t = y[\widetilde{A}_t + \alpha\widetilde{k}_t + (1-\alpha)\widetilde{l}_t].$$

Euler-egyenlet. Az Euler-egyenlet esetében szorzattípusú az összefüggés:

$$c_t^{-\sigma} = \beta E_t[(1+r_t)c_{t+1}^{-\sigma}].$$

A loglinearizálás elvégzése eredményezi a következőket:

$$-\sigma c^{-\sigma-1}c\widetilde{c}_t = \beta(1+r)c^{-\sigma}E_t[\widetilde{r}_t] - \sigma\beta(1+r)c^{-\sigma-1}cE_t[\widetilde{c}_{t+1}],$$

ahol $\widetilde{r}_t \equiv \widetilde{(1+r_t)}$ a szokásostól eltérő jelölés, mert nem a kamatláb, hanem a kamattényező százalékos eltérését mutatja. Egyszerűsítve $c^{-\sigma}$-val, és felhasználva a $\beta = 1/(1+r)$ állandósult állapotra vonatkozó összefüggést, az Euler-egyenlet loglinearizált formáját kapjuk:

$$-\sigma\widetilde{c}_t = E_t[\widetilde{r}_t - \sigma\widetilde{c}_{t+1}].$$

Munkapiaci egyenlet. A helyettesítési határrátára vonatkozó $\frac{l_t^{\varphi}}{c_t^{-\sigma}} = c_t^{\sigma}l_t^{\varphi} = (1-\alpha)A_tk_t^{\alpha}l_t^{-\alpha}$ egyenletből ehhez hasonlóan[7] kapható:

$$\sigma\widetilde{c}_t + \varphi\widetilde{l}_t = \widetilde{A}_t + \alpha\widetilde{k}_t - \alpha\widetilde{l}_t.$$

A portfólióválasztási egyenlet. Végül a portfólióválasztási egyenlet egy kicsit problémásabb átalakítása:

$$E_t\left[\frac{\beta c_{t+1}^{-\sigma}}{c_t^{-\sigma}}(1+r_t)\right] = E_t\left[\frac{\beta c_{t+1}^{-\sigma}}{c_t^{-\sigma}}(1+\alpha A_{t+1}k_{t+1}^{\alpha-1}l_{t+1}^{1-\alpha} - \delta)\right].$$

A linearizálásnál eltűnnek a kovarianciák, hiszen a másodfokú tagokat kicsinynek tekintjük, így a sztochasztikus diszkontfaktornak nevezett $\frac{\beta c_{t+1}^{-\sigma}}{c_t^{-\sigma}}$ taghoz kapcsolódó részek is eltűnnek. Ekkor pedig $1 + r_t = 1 + \alpha A_{t+1}k_{t+1}^{\alpha-1}l_{t+1}^{1-\alpha} - \delta$-ből:

$$(1+r)\widetilde{r}_t = E_t[\alpha k^{\alpha-1}l^{1-\alpha}A\widetilde{A}_{t+1} + \alpha(\alpha-1)Ak^{\alpha-2}l^{1-\alpha}k\widetilde{k}_{t+1} + \alpha(1-\alpha)Ak^{\alpha-1}l^{-\alpha}l\widetilde{l}_{t+1}] =$$

$$= \alpha Ak^{\alpha-1}l^{1-\alpha}E_t[\widetilde{A}_{t+1} + (\alpha-1)\widetilde{k}_{t+1} + (1-\alpha)\widetilde{l}_{t+1}].$$

A következőlépéshez felhasználjuk az egyenlet állandósult állapotbeli formájából kapott összefüggést:

[7] Vagy egy szorzatok esetében használatos trükk segítségével: logaritmáljuk az egyenletet: $\sigma\ln c_t + \varphi\ln l_t = \ln(1-\alpha) + \ln A_t + \alpha\ln k_t - \alpha\ln l_t$, és ebből könnyedén jön a kívánt forma:

$$\sigma\frac{1}{2}c\widetilde{c}_t + \varphi\frac{1}{l}l\widetilde{l}_t = 0 + \frac{1}{A}A\widetilde{A}_t + \alpha\frac{1}{k}k\widetilde{k}_t - \alpha\frac{1}{l}l\widetilde{l}_t \quad \Rightarrow \quad \sigma\widetilde{c}_t + \varphi\widetilde{l}_t = \widetilde{A}_t + \alpha\widetilde{k}_t - \alpha\widetilde{l}_t.$$

$$r = \alpha A k^{\alpha-1} l^{1-\alpha} - \delta \quad \Rightarrow \quad r + \delta = \alpha A k^{\alpha-1} l^{1-\alpha}$$

$$= (r+\delta) E_t[\widetilde{A}_{t+1} + (\alpha-1)\widetilde{k}_{t+1} + (1-\alpha)\widetilde{l}_{t+1}]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1+r}{r+\delta}\widetilde{r}_t = E_t[\widetilde{A}_{t+1} + (\alpha-1)\widetilde{k}_{t+1} + (1-\alpha)\widetilde{l}_{t+1}].$$

A lineáris differenciaegyenlet-rendszer. Így a négy – immár lineáris – egyenletünk:

$$\sigma\widetilde{c}_t + \varphi\widetilde{l}_t = \widetilde{A}_t + \alpha\widetilde{k}_t - \alpha\widetilde{l}_t,$$

$$c\widetilde{c}_t + k\widetilde{k}_{t+1} - (1-\delta)k\widetilde{k}_t = y[\widetilde{A}_t + \alpha\widetilde{k}_t + (1-\alpha)\widetilde{l}_t],$$

$$-\sigma\widetilde{c}_t = E_t[\widetilde{r}_t - \sigma\widetilde{c}_{t+1}],$$

$$\frac{1+r}{r+\delta}\widetilde{r}_t = E_t[\widetilde{A}_{t+1} + (\alpha-1)\widetilde{k}_{t+1} + (1-\alpha)\widetilde{l}_{t+1}].$$

És most kerüljön ide az exogén változót jellemző egyenlet is! A technológiai sokk, A_t vektor perzisztenciáját leíró autoregressziós paramétert ρ_A jelöli.

$$\widetilde{A}_{t+1} = \rho_A\widetilde{A}_t + \varepsilon_{t+1}.$$

A mátrixalak felírása

A számítógép számára a fenti lineáris egyenletrendszert mátrixformára kell hozni:

$$0 = E_t[Fw_{t+1} + Gw_t + Hw_{t-1} + Lz_{t+1} + Mz_t]$$

$$z_{t+1} = Nz_t + \omega_{t+1}, \qquad E_t[\omega_{t+1}] = 0,$$

ahol az endogén változók összességét w_t, az exogén változókat pedig z_t vektor jelöli, utóbbiakat az ω_{t+1}-gyel jelölt sokk vezényli.

A fenti mátrixegyenletet a meghatározatlan együtthatók módszerével megoldható, a változók alakulását a következő rekurzív formában keressük:

$$w_t = Pw_{t-1} + Qz_t.$$

Nagyobb rendszerek megoldása még a számítógépek számára is nehézséget okozhat, ezért Uhlig egy kicsit kifinomultabb felírást javasol:

$$0 = Ax_t + Bx_{t-1} + Cy_t + Dz_t \tag{5}$$

$$0 = E_t(Fx_{t+1}) + Gx_t + Hx_{t-1} + E_t(Jy_{t+1}) + Ky_t + E_t(Lz_{t+1}) + Mz_t \tag{6}$$

$$z_{t+1} = Nz_t + \omega_{t+1}. \tag{7}$$

Az átalakítás nem teljesen mechanikus, mert csoportosítani kell az egyenlet változóit és egyenleteit. Az egyenletek három részre csoportosítása értelemszerű módon a következőképpen történik:

– várakozás nélküli (5),

– várakozásos (6),
– sokk (7) egyenletek.[8]
A változókat pedig kevésbé triviálisan
– endogén állapot (x_t),
– egyéb endogén (y_t) és
– exogén változók (z_t) csoportjára kell osztani.[9]

A mátrixegyenlet megoldhatóságának rangfeltételeiből adódó, a felosztásra vonatkozó szabály a következő:

várakozás nélküli egyenletek száma (a sokkegyenlet nem értendő bele) ≥ egyéb endogén változók száma,

ami egyet jelent a következő feltétellel:

a várakozásos egyenletek száma ≤ endogén állapotváltozók száma.

Érdemes az egyenlőség fenntartására törekedni, mert ekkor a mátrixegyenlet megoldása egyszerűbb. *Az Uhlig-algorimusban a periódus mindig az új információ érkezésével kezdődik*, ezért a jelölések némileg eltérhetnek a modellek másfajta didaktikus célú indexeléseitől. Jelen esetben a t-edik periódusban felhalmozott, majd a $t+1$-edik periódusban a termelésbe bevont tőkejószág logaritmált változóját szokásosan $\widetilde{k}_{t+1}$-gyel jelölik, de a mátrixegyenletünkben az előbbiek értelmében az x_t vektorba tartozik. Ebben az esetben két darab várakozásos egyenletünk van, és láthatjuk, hogy $\widetilde{k}_{t+1}$ biztosan endogén állapotváltozó, mert késleltetettje szerepel a várakozás nélküli egyenletben, ami csak x_t esetében lehetséges. A helyes felíráshoz még legalább egy endogén állapotváltozó szükséges, a megoldásban a kamatlábat ($\widetilde{r}_t$) választottam (de $\widetilde{c}_t$-t vagy az $\widetilde{l}_t$-t is lehetne).

Segítséget nyújthat még a csoportosításban a következő hüvelykujjszabály is: a periódus elején adott változókat célszerű endogén állapotváltozóknak választani.[10]

A z_t vektor tartalmazza az exogén változókat, ami esetünkben egyetlenként a technológiai paraméter, az $\widetilde{A}_t$. Mindezek következtében a következő egyenletrendszer adódik:

$$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ -k & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\widetilde{k}_{t+1}\\ \widetilde{r}_t\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\alpha & 0\\ \alpha y+(1-\delta)k & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\widetilde{k}_t\\ \widetilde{r}_{t-1}\end{bmatrix}+$$

$$+\begin{bmatrix}-\sigma & -\alpha-\varphi\\ -c & (1-\alpha)y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\widetilde{c}_t\\ \widetilde{l}_t\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ y\end{bmatrix}\widetilde{A}_t$$

$$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}E_t\begin{bmatrix}\widetilde{k}_{t+2}\\ \widetilde{r}_{t+1}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 1\\ \alpha-1 & -\dfrac{1+r}{r+\delta}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\widetilde{k}_{t+1}\\ \widetilde{r}_t\end{bmatrix}+$$

[8] Látható, hogy a várakozás nélküli egyenletek speciális formájú várakozásos egyenletek.

[9] Hasonlóképpen látható, hogy az egyéb endogén változók speciális endogén állapotváltozók, hiszen előbbieknek nem szerepel késleltetettje az egyenletekben.

[10] Több időszakos késletetés esetén hasznos trükk lehet még új (ál)változók bevezetése (például $j_{t-1}\equiv g_{t-2}$), amelyek segítségével elérhető a fenti – egy időszakos késleltetésű – forma.

$$+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\widetilde{k}_t\\ \widetilde{r}_{t-1}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\sigma & 0\\ 0 & 1-\alpha\end{bmatrix}E_t\begin{bmatrix}\widetilde{c}_{t+1}\\ \widetilde{l}_{t+1}\end{bmatrix}+$$

$$+\begin{bmatrix}\sigma & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\widetilde{c}_t\\ \widetilde{l}_t\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}E_t[\widetilde{A}_{t+1}]+\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}E_t[\widetilde{A}_{t+1}]$$

$$\widetilde{A}_{t+1}=\rho_A\widetilde{A}_t+\varepsilon_{t+1} \qquad E_t[\varepsilon_{t+1}]=0$$

A fenti, általános formában az (5)–(7) egyenletekkel felírt rendszer megoldásához a következő lineáris rekurzív mozgásszabály együtthatóit keressük meg meghatározatlan együtthatók módszerével.[11]

$$x_t = Px_{t-1}+Qz_t$$
$$y_t = Ry_{t-1}+Sz_t.$$

Ekkor a változók kezdeti értékeinek és az exogén (sokk)változók alakulását leíró egyenletek a (7) felhasználásával kapott sztochasztikus rendszert könnyen vizsgálhatjuk.

A paraméterek kiválasztása

Az egyenletrendszer megoldása analitikus formában kezelhetetlen. A numerikus megoldáshoz pedig szükséges az együtthatók számszerűsítése, a paraméterek megadása. Nézzük röviden, melyiknek mi a jelentése ebben a modellben, mi adhat támpontot a nagyságrendjükre vonatkozóan!

– $0<\sigma<1$ a fogyasztás intertemporális helyettesítési rugalmasságát jellemző paraméter,
– $0<\varphi$ a munka intertemporális helyettesítési rugalmasságát jellemző paraméter,
– $0<\alpha<1$ a tőke kitevője a termelési függvényben (a tőkejövedelem aránya a GDP-ben),
– $\beta<1$ a szubjektív diszkontráta,
– $\delta<1$ a tőke amortizációs rátája,
– $0\le\rho_A\le 1$ a technológiai sokk perzisztenciája (tartóssága).

Ezek felhasználásával és az állandósult állapot kiszámításakor leírtak segítségével számszerűsíthetők a változók állandósult állapotbeli értékei is, amelyek a mátrixegyenletekben mint paraméterek szerepelnek.

Megoldás MATLAB programcsomaggal

A számítógépek megadják a lehetőséget egyenletrendszerünk megoldására. Egy előre gyártott szoftvernek **A**, **B**, **C**, **D**, **F**, **G**, **H**, **J**, **K**, **L**, **M**, **N** mátrixokból kell kiszámítania a változók rekurzív alakulását leíró **P**, **Q**, **R**, **S** mátrixokat. A megoldáshoz szükséges mátrixegyenletek és a hozzájuk kapcsolódó bizonyítás megtalálható *Uhlig* [1997] cikké-

[11] Más néven: determinálatlan együtthatók módszere. A metódus lényege, hogy amennyiben tudjuk egy egyenletrendszer megoldásának általános alakját (és ebben az esetben tudjuk: egy lineáris, rekurzív mozgásegyenlet), akkor a megoldás tulajdonképpen az együtthatók meghatározására korlátozódik.

ben. Itt a közgazdászok által közkedvelt MATLAB szoftverhez Uhlig által kínált programcsomagot használjuk.[12]

A programcsomag *do_it.m* fájlja kiszámoltatja **P** mátrix együtthatóit a *solve.m*-mel, majd ennek felhasználásával a *calc_qrs.m*-mel a **Q**, **R** és **S** mátrixokat. A számos felkínált lehetőségről az *options.m* fájlban tájékozódhatunk, és 1/0 paraméterkapcsolással kérhetjük vagy nem kérhetjük őket. A *hp_filter.m* a Hodrick–Prescott-filtert alkalmazza egy idősorra. Az *impresp.m* egy tetszőleges (exogén, endogén) változó állandósult állapottól való 1 százalékos elmozdulása esetén mutatja a többi változó reakcióját. A *moments.m*-mel varianciákat, kovarianciákat és autókorrelációkat számoltathatunk. Modellünkön alapuló szimulációt könnyedén készíthetünk a *simul.m* segítségével.

A programcsomagban szereplő és – tanulmányunkhoz kapcsolódóan – letölthető példavezérlő fájlok ugyanabban a struktúrában épülnek fel és a következő lépéseket követik:

- a megoldandó modell meghatározása,
- rövid leírás,
- paraméterek megadása,
- állandósult állapot kiszámítása,
- bemeneti mátrixok felírása,
- a kívánt opciók beállítása,
- megoldás a *do_it.m* hívásával,
- a megoldás elemzése, például impulzus-válasz függvények rajzolásával.

Az itt alkalmazott vezérlő fájlokat letölthetővé tettem, és részletes kommentárral láttam el őket.

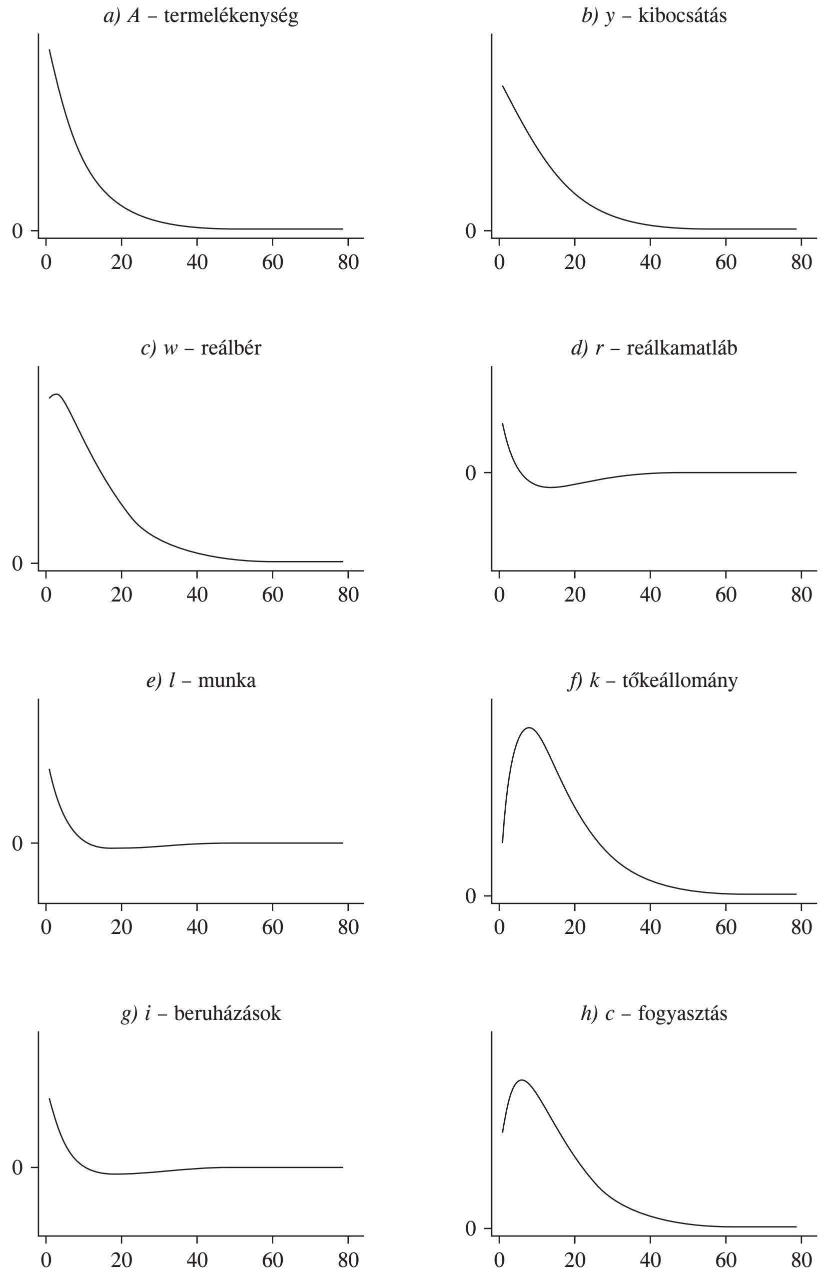
A technológiai sokk hatásának elemzése impulzus–válasz-függvénnyel

A megoldott modelleket az exogén változók alakulásának specifikálásával lehet elemezni. Az impulzus–válasz-függvények megmutatják, hogy amennyiben az egyik változó kimozdul az állandósult állapotból (azaz a loglinearizált változó a 0 pontból), akkor az idő múlásával hogyan reagál a többi. Tulajdonképpen ennek az elemzésnek a lehetősége a modern, dinamikus makroökonómiai modellek egyik legfontosabb hozzájárulása. Gondoljunk csak arra, hogy az alapszintű tananyagok hagyományos modelljeiben végzett dinamikus vizsgálat tulajdonképpen egyáltalán nem dinamikus, csak komparatív statika! Az *IS*-görbe nem eltolódik, hanem átugrik egy másik állapotba. Az itt példaként megoldott modell esetében viszont valóságos dinamikát lehet megjeleníteni: a változók időbeli alakulását vizsgálhatjuk. Az *1. ábrán* az RBC modell változóinak az $\widetilde{A}_t$ technológiai paraméter (állandósult állapotból való) 1 százalékos növekedésére adott impulzusok válaszait követhetjük nyomon.

A pozitív technológiai sokk *(1.a ábra)* következtében emelkedik a kibocsátás is *(1.b ábra)*. A termelékenység lassan áll vissza eredeti szintjére *(1.a ábra),* ezért átmenetileg érdemes többet felhasználni a termelési tényezőkből: a munkából *(1.e ábra)* és a tőkéből is. Így a nagyobb kereslet miatt nő a termelési tényezők reálköltsége, azaz a reálbér *(1.c ábra)* és a reálkamatláb *(1.d ábra)*. A tőke felhalmozása azonban időbe telik, a tőkeállomány alakulását leíró függvény *(1.f ábra)* kicsit púpos lesz. A tőkeállomány felhalmozásához szükséges beruházások nagy mértékben nőnek *(1.g ábra)*. A többletkibocsátás egy részét természetesen elfogyasztják, de a fogyasztási függvény is púpos egy kicsit *(1.h ábra),* mert kezdetben az intertemporális helyettesítési hatás erősebb (a reálkamatláb

[12] Letölthető a http://www.wiwi.hu-berlin.de/wpol/html/toolkit.htm címről. Ugyanitt találhatók a szoftverhez kapcsolódó további segítségek, letölthető írások, fórum a felhasználók tapasztalatairól.

1. ábra
Impulzus–válasz-függvények



jobban nő, ezért „drágább" a jelenbeli fogyasztás), a beruházások a fontosak. A változók hosszú távú alkalmazkodásában még a beruházások és a reálkamatláb völgymenetét érdemes megfigyelni. A jelenség magyarázata a tőkeállomány tehetetlenségében keresendő. A felhalmozott tőkeállományt a technológiai sokk múlása után „vissza kell állítani" a hosszú távú egyensúlyi szintre. Ebben az esetben az amortizáció automatizmusa sem elég, el kell fogyasztani valamennyit a korábban felhalmozott tőkeállományból (egyszerű modellünkben a tőke reverzibilis). A nagyobb tőkeállomány pedig a technológiai fellendülés múlásával kisebb reálhozamot hoz, azaz átmenetileg a reálkamatláb is alacsonyabb lesz hosszú távú egyensúlyi szintjénél.

Modell ragadós árakkal

A továbbiakban vázlatosan bemutatjuk, hogy a gazdaság rövid távú alkalmazkodását statikusan leíró *IS–LM* modell hogyan helyettesíthető modern, optimalizáláson alapuló, dinamikus modellel.

A monetáris politika hatásának vizsgálatához szükség van a pénz modellbe illesztésére. A pénz a hasznossági függvényben *(money-in-the-utility)* típusú megközelítés szerint a pénzmennyiség explicit módon megjelenik a hasznossági függvényben: a fogyasztónál lévő reálpénzmennyiség hasznos (lehet használni valamilyen jó dologra, a pénz „szolgáltatása" hasznos).

$$U_t\left(c_t, l_t, \frac{M_t}{P_t}\right) = \frac{c_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{l_t^{1+\varphi}}{1+\varphi} + \frac{(M_t/P_t)^{1-v}}{1-v}.$$

Az egyenletrendszer

A számítások elvégzése után a *Függelékben* részletezett egyenletekből a következőkben felsorolt loglinearizált egyenleteket kapjuk. Már tizenkét egyenletünk van, így a kezelhetőség érdekében csoportosítjuk őket.

Aggregált kereslet. A fogyasztó intertemporális optimalizálását leíró Euler-egyenlet:

$$-\sigma\tilde{c}_t = +E_t[\tilde{i}_t - \pi_{t+1} - \sigma\tilde{c}_{t+1}], \tag{8}$$

ahol $\Pi_t \equiv \dfrac{P_t}{P_{t-1}} - 1$ és $\pi_t \equiv \widetilde{(1+\Pi_t)}$

(Felhasználva a Fisher-egyenletet, $\tilde{i}_t - \pi_{t+1} = \tilde{r}_t$ láthatjuk, hogy az előző modellbeli egyenletről van szó.)

A portfólióválasztási feltétel (ahol a $\tilde{h}_{t+1}$ a tőkebefektetések reálhozama):

$$E_t[\tilde{i}_t - \pi_{t+1}] = \frac{i+\delta}{1+i} E_t[\tilde{h}_{t+1}]. \tag{9}$$

A termékpiaci kereslet (a GDP-egyenlet):

$$y\tilde{y}_t = c\tilde{c}_t + k\tilde{k}_{t+1} - (1-\delta)k\tilde{k}_t. \tag{10}$$

Pénzkereslet:

$$-\frac{\tilde{i}_t}{i} + \sigma\tilde{c}_t = v(\tilde{M}_t - \tilde{P}_t). \tag{11}$$

Aggregált kínálat. A monetáris politika hatásának elemzéséhez szükség van valamekkora mértékű árragadósságra is. A gyakran használt Calvo-egyenlet monopolisztikusan versenyző vállalatok profitmaximalizálási feltételeiből vezeti le az aggregált árszínvonalat. A ragadós árakhoz vezető kulcsfeltevés az, hogy – a fellépő menüköltség (az árváltoztatásnak önmagában is van költsége) miatt – a vállalatok közül nem mindegyik árazza át termékét minden periódusban (részletesebben lásd *Walsh* [2003] 225. o.). A Calvo-egyenlet beépítésével így az árszínvonal–reálhatárköltség összefüggés:

$$0 = \beta E_t[\pi_{t+1}] + \upsilon\pi_{t-1} + \xi\,\widetilde{mc}_t - (1+\beta\upsilon)\pi_t. \tag{12}$$

A reálhatárköltség nagysága:

$$\widetilde{mc}_t = \alpha\widetilde{h}_t - (1-\alpha)\widetilde{w}_t - \widetilde{A}_t. \tag{13}$$

Munkakínálat:

$$\widetilde{w}_t = \sigma\widetilde{c}_t + \varphi\widetilde{l}_t. \tag{14}$$

Munkakereslet:

$$\widetilde{l}_t = \widetilde{mc}_t - \widetilde{w}_t + \widetilde{y}_t. \tag{15}$$

Tőkejószág iránti kereslet:

$$\widetilde{k}_t = \widetilde{mc}_t - \widetilde{h}_t + \widetilde{y}_t. \tag{16}$$

Az infláció definíciója:

$$0 = \widetilde{P}_t - \widetilde{P}_{t-1} - \pi_t. \tag{17}$$

Exogén változók. Immár két exogén változónk van: a technológia szintje és a monetáris politika eszköze, a pénzmennyiség:

$$\widetilde{A}_{t+1} = \rho_A\widetilde{A}_t + \varepsilon_{1,t+1} \qquad E_t[\varepsilon_{1,t+1}] = 0. \tag{18}$$

$$\widetilde{M}_{t+1} = \rho_M\widetilde{M}_t + \varepsilon_{2,t+1} \qquad E_t[\varepsilon_{2,t+1}] = 0. \tag{19}$$

A monetáris politika egyenletében ρ_M paraméter jelöli a monetáris sokk tartósságát.

A lineáris differenciaegyenlet-rendszer. Tíz egyenletet [(8)–(17)] írtunk fel tíz endogén változóval:[13]

$$\widetilde{c}_t,\ \widetilde{y}_t,\ \widetilde{k}_t,\ \widetilde{l}_t,\ \widetilde{h}_t,\ \widetilde{w}_t,\ \widetilde{mc}_t,\ \pi_t,\ \widetilde{i}_t,\ \widetilde{P}_t.$$

És a két exogén változót $(\widetilde{A}_t, \widetilde{M}_t)$ leíró két egyenletet: (18)–(19).

[13] Ha az árak rugalmasak, akkor a (8)–(17) egyenletrendszerben (12) helyett $\widetilde{mc}_t = 0$ szerepelne. A helyettesítést megejtve, látható a reál- és a nominális szféra kettőssége: a reálmennyiségek (köztük a reálpénzmennyiség és a reálkamatláb) meghatározódik függetlenül a nominális pénzmennyiségtől. A pénzmennyiség alakulása csak az inflációt (és így a nominális kamatlábat), illetve az árszintet határozza meg.

A megoldás

A *Függelékben* megtalálható az egyenletrendszer mátrixformája. A reálváltozók állandósult állapotbeli értékének kiszámítása a klasszikus dichotómia értelmében az előző fejezetbeli *A mátrixalak felírása* című ponthoz hasonlóan történhet. Hosszú távú egyensúlyban nincs pénzmennyiség-változás, így infláció sem, tehát a nominális és a reálkamatláb állandósult állapotbeli értéke megegyezik. A paraméterek közül az előző fejezetbeli *A paraméterek választása* című pontban szereplők kiegészülnek a következőkkel:

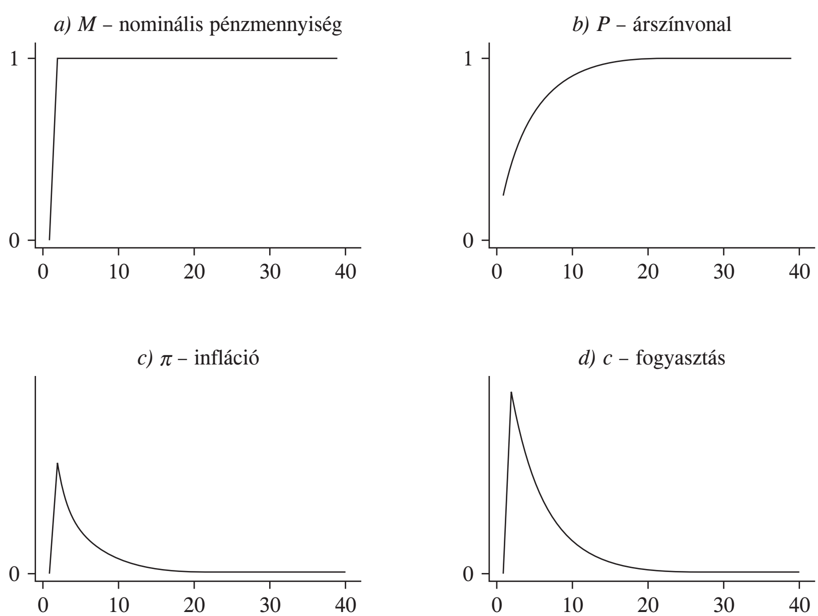
– v: a reálpénztartás intertemporális helyettesítési rugalmasságát meghatározó paraméter,
– υ: az inflációs perzisztencia (az árszínvonal második momentumának ragadóssága),
– ξ: az árragadósság mértéke,
– $0 \le \rho_M \le 1$: a monetáris politika perzisztenciája, amikor $\rho_M = 1$, akkor a monetáris hatóság nem gyűjti vissza a kibocsátott pénzt.

A rendszert ismét megoldja a számítógép.[14]

Az elemzés

A *2. ábrán* látható egy tartós monetáris politikai sokk hatása: a monetáris hatóság 1 százalékkal bővíti a pénzmennyiséget *(2.a ábra)*. A pénzmennyiség hirtelen növekedésére az árszínvonal csak lassan tud reagálni *(2.b ábra)*, sőt még a második momentumban, az inflációban *(2.c ábra)* is van perzisztencia. A pénzmennyiség növekedésével a pénz határhaszna csökken, így – az árszínvonal lassú alkalmazkodása miatt – a fogyasztás *(2.d ábra)* és a (tőke)felhalmozás (beruházások: *2.e ábra*) is emelkedik (az emberek szabadul-

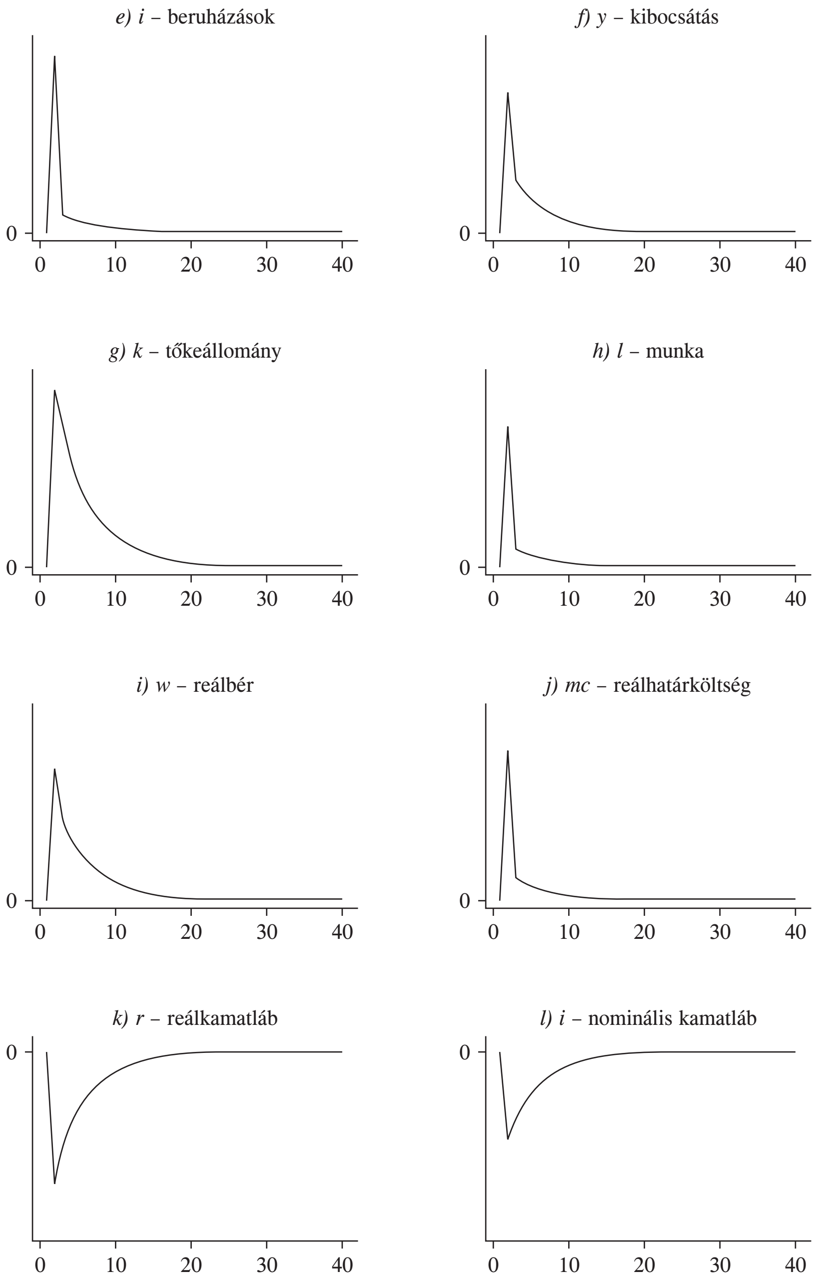
2. ábra
Monetáris expanzió hatása a második modellben



[14] Az általunk alkalmazott program szintén letölthető.

2. ábra (folytatás)

Monetáris expanzió hatása a második modellben



ni akarnak többletpénzüktől). Az emelkedő kereslet hatására a kibocsátás bővül *(2.f ábra)*, amelyet a vállalatok csak nagyobb tényezőfelhasználással tudnak elérni. A tőke *(2.g ábra)* és a felhasznált munka *(2.h ábra)* mennyisége emelkedik. A fogyasztók csak nagyobb bérek *(2.i ábra)* mellett hajlandók többet dolgozni, a reálhatárköltség nő *(2.j ábra)*. A tőkejószág emelkedő szintjével csökken a hozam, azaz a reálkamatláb *(2.k ábra)*. Ez az összefüggés ismerős: a monetáris expanzió rövid távon csökkenti a reálkamatlábat (*LM* görbe jobbra tolódik a hagyományos modellben).

Hivatkozások

Blanchard, O. J.–Kahn, Ch. M. [1980]: The Solution of Linear Difference Models under Rational Expectations. Econometrica, Vol. 48. No. 5. 1305–1311. o.

King, R. G.–Rebelo, S. T. [1999]: Resuscitating Real Business Cycles. Megjelent: *Taylor, J. B.–Woodford, M.* (szerk.): Handbook of Macroeconomics. Elsevier Science, Amszterdam.

Marimon, R.–Scott, A. (szerk) [1999]: Computational Methods for the Study of Dynamic Economies. Oxford University Press, New York.

Romer, D. [1996]: Advanced Macroeconomics. McGraw-Hill, California, Berkeley.

Uhlig, H. [1999]: A Toolkit for Analyzing Nonlinear Dynamic Stochastic Models Easily. Megjelent: *Marimon–Scott* [1999], és letölthető a http://www.wiwi.hu-berlin.de/wpol/html/toolkit/toolkit.pdf címen.

Walsh, C. E. [2003]: Monetary Theory and Policy. The MIT Press. London, második kiadás.

A felhasznált MATLAB szoftverhez kapcsolódó programcsomag elérhetőaz Uhlig-algoritmus honlapján: http://www.wiwi.hu-berlin.de/wpol/html/toolkit.htm

A két példa vezérlőfájlja pedig a Budapesti Corvinus Egyetem Makroökonómia tanszékének honalpján: http://www.uni-corvinus.hu/makro/macro_main.php?id=32.

Függelék

A rövid távú modell egyenletei

Aggregált kereslet

Euler-egyenlet: $c_t^{-\sigma} = \beta E_t\left[\frac{1+i_t}{1+\pi_{t+1}}c_{t+1}^{-\sigma}\right].$

A portfólióválasztás feltétele: $\frac{1+i_t}{1+\pi_{t+1}} = h_{t+1} + 1 - \delta.$

Árupiaci kereslet: $y_t = c_t + k_{t+1} + (1-\delta)k_t.$

Pénzkereslet: $\left(\frac{M_t}{P_t}\right)^{v} = \left(\frac{1+i_t}{i_t}\right)c_t^{\sigma}.$

Aggregált kínálat

Árupiaci kínálat: $y_t = A_t k_t^{\alpha} l_t^{1-\alpha}.$

Tőkejószág implicit kereslete: $\frac{H_t}{P_t} = A_t\alpha\left(\frac{l_t}{k_t}\right)^{1-\alpha}.$

Implicit munkakereslet: $\dfrac{W_t}{P_t} = A_t(1-\alpha)\left(\dfrac{k_t}{l_t}\right)^{\alpha}$.

Implicit munkakínálat: $\dfrac{W_t}{P_t} = \dfrac{l_t^{\varphi}}{c_t^{-\sigma}}$.

Az infláció definíciója: $\pi_t = \dfrac{P_t}{P_{t-1}} - 1$.

Az aggregált kínálatot némileg más formában írjuk fel. Profitmaximalizálási feltétel rugalmas árak esetén (ár = határköltség):[15] $P_t = MC_t \quad \Rightarrow \quad 1 = \dfrac{MC_t}{P_t} = mc_t$.

A határköltség definíciója: $MC_t = \dfrac{H_t^{\alpha} W_t^{1-\alpha}}{A_t \alpha^{\alpha}(1-\alpha)^{1-\alpha}} \quad \Rightarrow \quad mc_t = \dfrac{h_t^{\alpha} w_t^{1-\alpha}}{A_t \alpha^{\alpha}(1-\alpha)^{1-\alpha}}$.

A tőkejószág kereslete: $k_t = \alpha \dfrac{MC_t}{H_t} y_t = \alpha \dfrac{mc_t}{h_t} y_t$.

Munkakereslet: $l_t = (1-\alpha)\dfrac{MC_t}{W_t} y_t = (1-\alpha)\dfrac{mc_t}{w_t} y_t$.

A ragadós áras rendszert leíró egyenletrendszerből (8)–(19) kapott mátrixegyenletek $\widetilde{l}_t$ kiejtése után [beírva (15)-t a (14)-be]:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v & -1/i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{k}_{t+1} \\ \pi_t \\ \widetilde{P}_t \\ \widetilde{i}_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -(1-\delta)k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{k}_t \\ \pi_{t-1} \\ \widetilde{P}_{t-1} \\ \widetilde{i}_{t-1} \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1-\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ \sigma & \varphi & \varphi & -1-\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & -y & 0 & 0 \\ \sigma & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{c}_t \\ \widetilde{mc}_t \\ \widetilde{y}_t \\ \widetilde{w}_t \\ \widetilde{h}_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{A}_t \\ \widetilde{M}_t \end{bmatrix}$$

[15] Ragadós árak esetén ezt helyettesíti a Calvo-képlet.

$$\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0 & 0\\0 & -1 & 0 & 0\\0 & \beta & 0 & 0\end{bmatrix}E_t\begin{bmatrix}\widetilde{k}_{t+2}\\\pi_{t+1}\\\widetilde{P}_{t+1}\\\widetilde{i}_{t+1}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 1\\0 & -1-\beta\upsilon & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\widetilde{k}_{t+1}\\\pi_t\\\widetilde{P}_t\\\widetilde{i}_t\end{bmatrix}+$$

$$+\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & \upsilon & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\widetilde{k}_t\\\pi_{t-1}\\\widetilde{P}_{t-1}\\\widetilde{i}_{t-1}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\sigma & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & -\dfrac{1+r}{r+\delta}\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}E_t\begin{bmatrix}\widetilde{c}_{t+1}\\\widetilde{mc}_{t+1}\\\widetilde{y}_{t+1}\\\widetilde{w}_{t+1}\\\widetilde{h}_{t+1}\end{bmatrix}+$$

$$+\begin{bmatrix}\sigma & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & \xi & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\widetilde{c}_t\\\widetilde{mc}_t\\\widetilde{y}_t\\\widetilde{w}_t\\\widetilde{h}_t\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}E_t\begin{bmatrix}\widetilde{A}_{t+1}\\\widetilde{M}_{t+1}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\widetilde{A}_t\\\widetilde{M}_t\end{bmatrix}.$$