Közgazdasági Szemle, LII. évf., 2005. február (130–143. o.)

RADNAI MÁRTON

Indexált alaptermék árú opciók

Indexált opcióknak nevezzük leegyszerűsítve azon opciókat, amelyek csak akkor hívhatók le nyereséggel, ha az adott részvény hozama egy bizonyos index hozamát meghaladja. Cikkünkben bemutatjuk, hogy az irodalomban eddig ismertetett konstrukciók – amelyek a kötési árfolyam indexálását végezték el – nem szüntetnek meg minden indexkockázatot. Javaslatot teszünk ezért egy új típusú indexált opcióra, amelyben az alaptermék árát indexáljuk, így minden indexkockázatot kiszűrünk. Megadjuk ezen opciók értékelési összefüggéseit, és bemutatjuk, hogy ezek nemcsak a menedzseri javadalmazás, hanem a tőzsdei kereskedés területén is alkalmazhatók.*

Journal of Economic Literature (JEL) kód: G13, M52.

A részvényopciós programok a menedzseri ösztönzés elfogadott részeivé váltak az Egyesült Államokban az 1990-es években. Ezek a programok legtöbb esetben a vezetők számára hagyományos opciókat juttattak, amelyek csak néhány tulajdonságukban tértek el tőzsdén is forgalomban lévő társaiktól. Átruházásukra nem volt lehetőség, az opciók lejártak, amint a vezető állást változtatott, és az opciókat kibocsátásukat követően egy ideig nem lehetett lehívni (részletesebben lásd *Casson* [2000]).

Az opciós programok átütő sikerét többek között az okozta, hogy a tőzsdei társaságoknak költségeik között nem kellett szerepeltetni értéküket – ellentétben a bérköltséggel –, így kibocsátásuk nem befolyásolta a társaságok publikált eredményét. A másik előnyük az volt, hogy olyan, növekedésben lévő társaságok, amelyek nem tudtak magas fix fizetéseket megengedni maguknak, a részvényopciók révén magukhoz tudtak csábítani értékes vezetőket az érett, nyereséges vállalatoktól.

Az 1997–1998-as tőzsdeválságok, majd végül az internetes „lufi” 2000-es kipukkadása azonban törést hozott az opciós programok sikerében. Egyrészt egyre nagyobb vita bontakozott ki arról, hogy az opciók költségét figyelembe kellene venni az eredmény kiszámításakor (lásd például *FASB* [1993], [1995], illetve *Jennergren–Naslund* [1993]). Másrészt viszont a cégek részvényárfolyamainak zuhanásával a vezetői opciók elértéktelenedtek, így elvesztették ösztönző hatásukat. Ez utóbbi probléma kezelésére a cégek az opciók kötési árfolyamainak csökkentésébe kezdtek.[1]

Ennek a tevékenységnek az empirikus elemzését találhatjuk meg *Carter–Lynch* [2001] cikkében, amely az amerikai nyilvános társaságok 1998. évi döntéseit elemezte. A szerzőpáros kimutatta, hogy az opciók kötési árfolyamának változtatása gyakoribbá vált a fiatal, technológiai cégek esetében, és ahol az opciók lehívási ára magasabb volt a rész-

* Értékes megjegyzéseikért köszönetem fejezem ki édesapámnak és az ismeretlen lektornak.

[1] Vajon miért nem emelték fel a kötési árfolyamokat, amikor az árfolyamok felfelé száguldottak?

Radnai Márton a Ramasoft Kft. ügyvezető igazgatója (e-mail: radnaim@ramasoft.hu).

vény áránál, tehát nem volt belső értékük. Meglepő, de arra a következtetésre jutottak, hogy a változásokat kiváltó gyenge árfolyam-teljesítmény legtöbbször csak a cégre, és nem az iparágra volt jellemző. A cégek döntő többsége úgy nyilatkozott, hogy az opciók kötési árfolyama megváltoztatásának célja a vezetők megtartása volt.

Brenner–Sundaram–Yermack [2000] cikkükben egy értékelési modellt is felépítettek a kötési árfolyam változtatására, amelyet egyfajta rejtett opcióként kezeltek az eredeti opción belül. Az amerikai nyilvános társaságok 1992 és 1995 közötti adatait elemezve, úgy találták, hogy a cégek legtöbbje úgy változtatta meg a kötési árfolyamot, hogy az az aktuális részvényárfolyammal megegyezzen, és ez a változtatás az árfolyam átlagosan 40 százalékos csökkentését jelentette. Értékelési modelljük szerint a változtatás opciója csak kismértékben módosítja az opciók eredeti, kibocsátáskori értékét, annál jobban befolyásolja viszont a változtatáskori értékét. Ők is azt találták, hogy a változtatás ténye igen erős negatív összefüggésben van a részvényárfolyam teljesítményével, még az iparág teljesítményének kiszűrése után is.

Chance–Kumar–Todd [2000] szintén az amerikai nyilvános társaságok 1985 és 1994 közötti döntéseit elemezte. Érdekes megállapítása, hogy a legtöbb esetben az eredeti opciók a változtatást követő két éven belül a kötési árfolyamok megváltoztatása nélkül is visszanyerték volna belső értéküket. A változtatások átlagosan a részvényárfolyam egyéves süllyedését követően történtek, ahol is az átlagos cég elvesztette piaci értékének negyedét. Kimutatták, hogy gyakrabban változtatták a kötési árfolyamokat a képviseleti problémákkal küzdő, kis méretű cégek, illetve ahol a vezetők többségben voltak az igazgatóságban.

Chidambaran–Nagpurnanand [2003] az iménti tanulmánnyal szemben nem talált bizonyítékot arra, hogy a változtatások oka egyértelműen a rossz és magát bebiztosító vezetés lenne. Ezt bizonyítja, hogy a változtató cégekben igen magas volt a legfelső vezetők fluktuációja, illetve hogy az esetek 40 százalékában a legfelső vezető opcióit nem érintették a változtatások.

Acharya–John–Sundaram [2000] azt vizsgálta, hogy milyen hatást gyakorol a vezetők ösztönzési rendszerére a kötési árfolyamok megváltoztatása. Megállapította, hogy bár a változások miatti várakozások negatívan befolyásolják a vezetői ösztönzést, mégis lehet pozitív szerepük, mivel ezáltal a vezető mindig megfelelően motivált marad a jobb teljesítmény elérésére.

Összefoglalásul tehát azt mondhatjuk, hogy a vállalatok általában akkor változtatják meg a részvényopciók kötési árfolyamát, ha a részvény árfolyama csökkent – függetlenül attól, hogy a csökkenés a vállalat gyenge teljesítményének vagy külső tényezőknek volt köszönhető.

Mivel a kötési árfolyamok utólagos, egyedi döntésen alapuló korrigálása mindig vitatott megoldás marad, megszületett egy új opciós termék, az indexált opció gondolata, amely ezt a változtatást objektív, külső tényezőkre bízza. Az először a *Johnson–Tian* [2000*a*], [2000*b*] cikkekben ismertetett termék az európai opció kötési árfolyamát indexálja, azaz valamely ismert index hozamának β-szorosával korrigálja. Az indexált kötési árfolyamú vételi opció lejáratkori kifizetési függvénye[2] tehát

$$b_T = \max\left[S_T - X\left(\frac{I_T}{I_0}\right)^{\beta}, 0\right], \tag{1}$$

[2] Az itt ismertetett képlet eltér a *Johnson–Tian*-szerzőpáros által ismertetett képlettől. Az eltérések oka az, hogy Johnson–Tian-szerzőpáros csak az $X = S_0$ esetet vizsgálta, másrészt a kötési árfolyam meg volt szorozva egy további $e^{\eta t}$ tényezővel.

ahol S_T a lejáratkori részvényárfolyam, I_T a lejáratkori indexérték, X a kötési árfolyam, β pedig az a paraméter, amely meghatározza, hogy a részvénynek az index hozamának hányszorosát kell elérni, hogy az opció lehíváskor értékes legyen.

Az opciót így nem akkor érdemes lehívni, ha a részvényárfolyam lejáratkor meghaladja a kötési árfolyamot, hanem akkor, ha a részvény ára jobban emelkedik, mint az adott index hozama szorozva β-val, ha tehát a részvény jobban teljesít, mint amit a piac elvár tőle. Ez könnyen előfordulhat a részvény árfolyamának csökkenése esetén is, de az is lehetséges, hogy a részvény árfolyama emelkedik, az opció mégsem hívható le nyereséggel. Ezen típusú opciók értékelését európai opciók esetére a már említett *Johnson–Tian* [2000*b*] és *Schnusenberg–McDaniel* [2000], amerikai opciók esetére pedig *Jorgensen* [2002] végezte el.

Mivel az indexált opciók értéke átlagosan 30-40 százaléka az ugyanolyan feltételű hagyományos opcióknak, sokan bennük látják az opciós programok jövőjét is, ha majd a vezetői opciók költségeit a bérköltséghez hasonlóan kell elszámolni (*Jones–Burchman* [2002]), így úgy tűnik, az indexált opciók a hagyományos vezetői opciók több problémájára is megoldást jelentenek. Nem jelentenek viszont megoldást akkor, ha az opciók kötési árfolyamát nem az iparági általános rossz teljesítmény, hanem az adott cég rossz teljesítménye miatt kell csökkenteni. Mivel az áttekintett empirikus munkák szerint igen gyakran ez az oka a kötési árfolyamok megváltoztatásának, könnyen lehet, hogy emiatt az indexált opciók nem lesznek népszerűek a vezetői javadalmazás területén. Szintén a gyakorlati alkalmazást nehezíti a hagyományos és indexált opciók adózásának, valamint számvitelének eltérő kezelése is (lásd például *Schizer* [2002]), mely egyelőre a hagyományos opciókat támogatja.

A továbbiakban bemutatjuk, hogy az indexált opciók a *Johnson–Tian* [2000*b*] által bemutatott formája – ha csökkentett mértékben is – továbbra is hordoz indexkockázatot, ha a részvényárfolyam nem egyenlő a lehívási árral. Ennek a problémának a kezelésére kidolgozzuk az indexált opciók új típusát, amelyben nem a kötési árfolyamot korrigáljuk az index hozamának β-szorosával, hanem a részvényárfolyamot, és bemutatjuk, hogy ez a termék már valóban nem tartalmaz indexkockázatot. Meghatározzuk az opciók értékét, és összehasonlítjuk az ugyanolyan feltételű, indexált kötési árfolyamú és hagyományos opciók értékével. Végül pedig rámutatunk arra, hogy az indexált alaptermék árú opciókat – mivel kötési árfolyamuk nem változik – nemcsak a vezetői javadalmazás terén lehet alkalmazni, hanem a tőzsdei termékfejlesztés során is.

Az indexált alaptermék árú és a kötési árfolyamú opciók összehasonlítása

Az imént már bemutatott indexált kötési árfolyamú vételi opció mellett definiáljuk a saját új típusú, indexált alaptermék árú vételi opciónkat is a lejáratkori kifizetési függvénnyel (a továbbiakban csak a vételi opciókat elemezzük, így a vételi megjelölést elhagyjuk):

$$c_T = \max\left[S_T\left(\frac{I_0}{I_T}\right)^{\beta} - X, 0\right], \tag{2}$$

A jelölések a korábbiakkal megegyeznek. Ezt az opciót úgy is felfoghatjuk, hogy a kapott részvények darabszámát indexáljuk. Ebben az esetben tehát nem drágábban lehet megvásárolni a részvényt, ha az index hozama pozitív, hanem kevesebb részvényt kapunk ugyanakkora árért (ehhez hasonló opciókról egyébként beszámol a *Burchman–Jones–Harper* [2003] cikk is).

Annak bemutatása érdekében, hogy az indexált kötési árfolyamú típusú opciók indexkockázatot tartalmaznak, vegyük azt a speciális esetet, ha a részvényárfolyam megegyezik az indexértékkel ($S_t = I_t$) és $\beta = 1$.

Az indexált kötési árfolyamú esetben ekkor

$$b_T = \max\left[S_T - X\left(\frac{I_T}{I_0}\right)^{\beta},0\right] = \max\left[I_T - X\left(\frac{I_T}{I_0}\right),0\right] = \max\left[I_T\left(1-\frac{X}{I_0}\right),0\right]. \tag{3}$$

Ez a kifejezés 0, ha $X > I_0$, más esetben viszont értéke

$$b_T = I_T\left(1-\frac{X}{I_0}\right), \tag{4}$$

amiből következően az opció értéke lejárat előtt

$$b = I\left(1-\frac{X}{I_0}\right), \tag{5}$$

az indexérték szerinti első deriváltja pedig

$$\frac{\partial b}{\partial I} = 1-\frac{X}{I_0} > 0, \tag{6}$$

azaz az opció továbbra is pozitív indexkockázatot tartalmaz, annál nagyobb mértékben, minél alacsonyabb a kötési árfolyam az induláskori indexértékhez képest.

Ezzel szemben az indexált alaptermék árú opció esetében

$$c_T = \max\left[S_T\left(\frac{I_0}{I_T}\right)^{\beta} - X,0\right] = \max\left[I_T\left(\frac{I_0}{I_T}\right) - X,0\right] = \max(I_0 - X,0). \tag{7}$$

Ez a kifejezés akkor 0, ha $X > I_0$, a többi esetben pedig

$$c_T = I_0 - X. \tag{8}$$

Az opció értéke lejárat előtt így

$$c = e^{-r(T-t)}(I_0 - X), \tag{9}$$

amelynek indexérték szerinti első deriváltja nyilván 0, így nem tartalmaz indexkockázatot.

Az iménti speciális esettel bemutattuk, hogy az indexált kötési árfolyamú opciók tartalmaznak indexkockázatot, azonban az indexált alaptermék árú opciók esetében nem mutattuk be, hogy ez rájuk sohasem igaz. Ennek belátása érdekében is szükségünk van az opciók értékének meghatározására, amelyet a következő pontban végzünk el.

Az indexált alaptermék árú opciók értékelése

Modellünkben a piac dinamikáját kockázatmentes mérték mellett a (10)–(11) sztochasztikus folyamatokkal jellemezhetjük:

$$dS_t = (r - q_S)S_t dt + \sigma_S S_t dZ_{St} \tag{10}$$

$$dI_t = (r - q_I)I_t dt + \sigma_I I_t dZ_{It}\,, \tag{11}$$

ahol S a részvényárfolyam, q_S a részvény által fizetett éves osztalékhozam, I az indexárfolyam, q_I az index által fizetett éves osztalékhozam, t az idő évben, Z_S és Z_I pedig Wiener-folyamatok, amelyek között a (12) összefüggés áll fenn:

$$Z_{St} = \rho Z_{It} + \sqrt{1-\rho^2}W_t, \tag{12}$$

ahol Z_I és W független Wiener-folyamatok. A függetlenség miatt igaz, hogy

$$dZ_{St} = \rho dZ_{It} + \sqrt{1-\rho^2}dW_t. \tag{13}$$

Vezessük be a $H_T = S_T\left(\frac{I_0}{I_T}\right)^{\beta}$ jelölést. Feladatunk az, hogy meghatározzuk annak az opciónak az értékét, amelynek lejáratkori értéke

$$c_t = \max(H_T - X,\ 0). \tag{14}$$

Vizsgáljuk meg a H_T-t leíró sztochasztikus folyamatot! Ennek meghatározásához először határozzuk meg az $f(I_t) = \left(\frac{I_0}{I_t}\right)^{\beta} = I_0^{\beta} I_t^{-\beta}$ folyamatot az Itô-formula segítségével (lásd például *Baxter–Rennie* [1997] 95. o.):

$$df(I_t) = \left(\mu_t \frac{\partial f(I_t)}{\partial I_t} + \tfrac{1}{2}\sigma_t^2 \frac{\partial^2 f(I_t)}{\partial I_t^2} + \frac{\partial f(I_t)}{\partial t}\right)dt + \left(\sigma_t \frac{\partial f(I_t)}{\partial I_t}\right)dZ_{It} =$$

$$= ((r-q_I)I_t(-\beta)I_0^{\beta}I_t^{-\beta-1} + \tfrac{1}{2}(\sigma_I I_t)^2\beta(\beta+1)I_0^{\beta}I_t^{-\beta-2} + 0)dt + (\sigma_I I_t(-\beta)I_0^{\beta}I_t^{-\beta-1})dZ_{It} =$$

$$= ((r-q_I)(-\beta)I_0^{\beta}I_t^{-\beta} + \tfrac{1}{2}(\sigma_I)^2\beta(\beta+1)I_0^{\beta}I_t^{-\beta})dt + (\sigma_I(-\beta)I_0^{\beta}I_t^{-\beta})dZ_{It}. \tag{15}$$

Másrészt a korábbiak behelyettesítésével a részvényárfolyamot leíró folyamat

$$dS_t = (r-q_S)S_t dt + \sigma_S S_t\left(\rho dZ_{It} + \sqrt{1-\rho^2}dW_t\right). \tag{16}$$

A független sztochasztikus folyamatok differenciáljainak lineáris kombinációjából álló differenciálú folyamatok szorzására igaz úgynevezett szorzatszabály (lásd *Baxter–Rennie* [1997] 185. o.) felhasználásával

$$dH_t = d(S_t I_0^{\beta} I_t^{-\beta}) = S_t d(I_0^{\beta} I_t^{-\beta}) + I_0^{\beta} I_t^{-\beta} d(S_t) + (\sigma_{S,Z_I}\sigma_{f(I),Z_I} + \sigma_{S,W}\sigma_{f(I),W})dt =$$

$$= S_t\sigma_I(-\beta)I_0^{\beta}I_t^{-\beta}dZ_{It} + S_t I_0^{\beta}I_t^{-\beta}(-(r-q_I)\beta + \tfrac{1}{2}\sigma_I^2\beta(\beta+1))dt +$$

$$+ I_0^{\beta}I_t^{-\beta}\sigma_S S_t(\rho dZ_{It} + \sqrt{1-\rho^2}dW_t) + I_0^{\beta}I_t^{-\beta}S_t(r-q_S)dt +$$

$$+ (\sigma_S S_t \rho\sigma_I(-\beta)I_0^{\beta}I_t^{-\beta} + \sigma_S S_t\sqrt{1-\rho^2}\,0)dt =$$

$$= (\sigma_S\rho - \sigma_I\beta)H_t dZ_{It} + \sigma_S\sqrt{1-\rho^2}H_t dW_t +$$

$$+ (r - q_S - (r-q_I)\beta + \tfrac{1}{2}\sigma_I^2\beta(\beta+1) - \rho\sigma_S\sigma_I\beta)H_t dt. \tag{17}$$

Vegyük szemügyre ezt a folyamatot. Először is látható, hogy β szerencsés megválasztásával az egyik sztochasztikus folyamat együtthatója nullává válik:

$$\beta^* = \rho \frac{\sigma_S}{\sigma_I}. \tag{18}$$

Ez nem más, mint a kovariancia és variancia hányadosa, ahogy azt várhattuk is. Ebben az esetben tehát H árában sikeresen megszüntetjük az indexkockázatot.

Most megpróbáljuk visszavezetni az értékelési problémát a klasszikus *Black–Scholes* [1973] opcióértékelési problémára. Vegyük szemügyre a fenti sztochasztikus folyamatot. Az első és a második tag összegét – mivel független Wiener-folyamatok – helyettesíthetjük egy közös, mondjuk W^* Wiener-folyamattal. Együtthatójának meghatározásához határozzuk meg a korábbi két folyamat összegének varianciáját, amely a függetlenség miatt éppen a két variancia összege:

$$\sigma_{W^*}^2 = (\sigma_S \rho - \sigma_I \beta)^2 H_t^2 + \left(\sigma_S \sqrt{1-\rho^2}\right)^2 H_t^2 = (\sigma_S^2 - 2\beta\rho\sigma_S\sigma_I + \beta^2\sigma_I^2) H_t^2. \tag{19}$$

A másik, amit észrevehetünk, hogy dt együtthatója nem rH_t, így a H folyamattal jellemezhető termék nem kereskedhető, hiszen kockázatmentes mérték mellett nem a kockázatmentes hozamot biztosítja (másképpen fogalmazva diszkontált árfolyama nem martingál). Ennek biztosítására definiáljuk a $H_t^* = H_t e^{\lambda t}$ terméket. Az Itô-formula ismételt alkalmazásával

$$\begin{aligned} dH_t^* &= (\sigma_t e^{\lambda t}) dW_t^* + (\mu_t e^{\lambda t} + \lambda H_t e^{\lambda t}) dt = \\ &= \sqrt{\sigma_S^2 - 2\beta\rho\sigma_S\sigma_I + \beta^2\sigma_I^2}\, H_t^* dW_t^* + \\ &+ (r - q_S - (r - q_I)\beta + \tfrac{1}{2}\sigma_I^2 \beta(\beta+1) - \rho\sigma_S\sigma_I\beta + \lambda) H_t^* dt. \end{aligned} \tag{20}$$

A dt együtthatója akkor lesz egyenlő rH_t^*-gal, ha

$$\lambda = q_S + (r - q_I)\beta - \tfrac{1}{2}\sigma_I^2\beta(\beta+1) + \rho\sigma_S\sigma_I\beta. \tag{21}$$

Ebben az esetben H_t^* kereskedhető, így a rá vonatkozó európai opció értéke már a közismert Black–Scholes-képlettel értékelhető. Mivel azonban

$$c_T = \max(H_T - X, 0) = e^{-\lambda T}\max(H_T e^{\lambda T} - X e^{\lambda T}, 0) = e^{-\lambda T}\max(H_T^* - X e^{\lambda T}, 0), \tag{22}$$

ezért H_t^* értékének ismeretében már az eredeti, H-ra vonatkozó opció értéke is meghatározható.

A Black–Scholes-képletbe a megfelelő paramétereket behelyettesítve:

$$c_t = He^{-\lambda(T-t)}N(d_1) - Xe^{-r(T-t)}N(d_2) \tag{23}$$

$$p_t = Xe^{-r(T-t)}N(-d_2) - He^{-\lambda(T-t)}N(-d_1) \tag{24}$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{H}{X}\right) + (r - \lambda + \frac{1}{2}\sigma_H^2)(T-t)}{\sigma_H\sqrt{T-t}} \tag{25}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_H\sqrt{T-t} \tag{26}$$

$$\sigma_H = \sqrt{\sigma_S^2 - 2\beta\rho\sigma_S\sigma_I + \beta^2\sigma_I^2} \tag{27}$$

$$\lambda = q_S + (r - q_I)\beta - \tfrac{1}{2}\sigma_I^2\beta(\beta + 1) + \rho\sigma_S\sigma_I\beta. \tag{28}$$

Abban a speciális esetben, ha $\beta^* = \rho\dfrac{\sigma_S}{\sigma_I}$,

$$\sigma_H^* = \sqrt{\sigma_S^2(1 - \rho^2)} \tag{29}$$

$$\lambda^* = q_S + (r - q_I)\rho\frac{\sigma_S}{\sigma_I} - \frac{\rho\sigma_S\sigma_I - \rho^2\sigma_S^2}{2}. \tag{30}$$

Visszatérve az előző pontban megfogalmazott problémához, vizsgáljuk meg az indexált alaptermék árú és a kötési árfolyamú opciók indexkockázatát immár sztochasztikus modellben is.

Mivel lejáratkor az opció értéke éppen a kifizetés értékével egyenlő, annak a szükséges feltétele, hogy az opciók értékéből az indexkockázat teljesen megszüntethető legyen, az, hogy a lejáratkori kifizetés se tartalmazzon indexkockázatot. Ez a feltétel azonban elégséges is, hiszen ha lejáratkor a kifizetés (K) nem tartalmaz indexkockázatot, az azt jelenti, hogy

$$E_P(K|I) = E_P(K), \tag{31}$$

vagyis a kockázatmentes mérték mellett vett I szerinti feltételes várható érték megegyezik a várható értékkel. Mivel azonban esetünkben útfüggetlen opciókról van szó, az eszközárazás tételéből következően az opció mai értéke ennek a várható értéknek a kockázatmentes hozammal diszkontált értéke,

$$c = E_P(e^{-r(T-t)}K) = e^{-r(T-t)}E_P(K) = e^{-r(T-t)}E_P(K \mid I) = E_P(e^{-r(T-t)}K \mid I), \tag{32}$$

ebből következően az opció értéke sem tartalmaz indexkockázatot.

A lejáratkori kifizetés nyilván nem tartalmaz indexkockázatot abban az esetben, ha az opciót nem érdemes lehívni (nullát fizet), így csak a pozitív belső értékkel kell foglalkoznunk.

Az *indexált alaptermék árú opciók* esetében, mivel X értéke sem S, sem I, sem pedig t függvénye

$$d(H_T - X) = dH_T - dX = dH_T. \tag{33}$$

Így a (17)-ből következik, hogy

$$d(H_T - X) = (\sigma_S\rho - \sigma_I\beta)H_T dZ_{It} + \dots. \tag{34}$$

Az indexkockázat tehát továbbra is megszüntethető $\beta^* = \rho\dfrac{\sigma_S}{\sigma_I}$ megválasztásával.

Az indexált kötési árfolyamú opció esetében azonban

$$d\left(S_T - X\left(\frac{I_T}{I_0}\right)^\beta\right) = dS_T - d\left(X\left(\frac{I_T}{I_0}\right)^\beta\right). \tag{35}$$

A kifejezés első tagja megegyezik a (16)-tal. A második tag az Itô-formula segítségével meghatározható:

$$d\left(X\left(\frac{I_T}{I_0}\right)^{\beta}\right) = (\sigma_I \beta X I_0^{-\beta} I_T{}^{\beta})dZ_{IT} + ((r-q_I)\beta X I_0^{-\beta} I_T{}^{\beta} + \tfrac{1}{2}\sigma_I^2 \beta(\beta-1) X I_0^{-\beta} I_T{}^{\beta} + 0)dt. \quad (36)$$

Visszahelyettesítve

$$d\left(S_T - X\left(\frac{I_T}{I_0}\right)^{\beta}\right) = (\sigma_S \rho S_T - \sigma_I \beta X I_0^{-\beta} I_T^{\beta})dZ_{IT} + \ldots. \quad (37)$$

Az indexkockázat ebben az esetben tehát akkor szüntethető meg, ha

$$\sigma_S \rho S_T - \sigma_I \beta X I_0^{-\beta} I_T^{\beta} = 0. \quad (38)$$

Ennek az egyenletnek megoldása β-ra

$$\beta = \frac{W\left(\dfrac{\sigma_S \rho S_T (\ln(I_T) - \ln(I_0))}{\sigma_I X}\right)}{\ln(I_T) - \ln(I_0)}, \quad (39)$$

ahol $W(.)$ az úgynevezett Lambert-féle $W(z)$ függvény, amely a $z = we^w$ egyenlet megoldásait adja meg.

A megoldásból nyilvánvaló, hogy ebben az esetben nem határozható meg olyan, S-től és I-től független β, amely biztosítja az indexkockázat megszüntetését. A szokásos $\beta^* = \rho \dfrac{\sigma_S}{\sigma_I}$ alkalmazása esetén

$$\sigma_S \rho (S_T - X I_0^{-\beta^*} I_T^{\beta^*}) = 0. \quad (40)$$

Ez a feltétel akkor teljesül, ha $S_T = X I_0^{-\beta^*} I_T^{\beta^*}$, azaz az opció lejáratkor (tehát nem az opció vételekor) éppen nulla belső értékű, vagy ha $\rho = 0$. Beláttuk tehát, hogy a speciális esetektől eltekintve, a lejáratkori kifizetés értéke tartalmaz indexkockázatot, így ebből következően az opció értéke is. Mivel a vizsgált tartományban az opció belső értéke nem negatív, a szórás pedig definíció szerint nem negatív, ezért dZ_{IT}, vagyis az indexkockázat előjele a korrelációs együttható előjelével egyezik meg.

Opcióértékek összehasonlítása

Az *1. táblázatban* néhány hagyományos, indexált kötési árfolyamú és az indexált alaptermék árú vételi opció értékét hasonlítjuk össze (az osztalékhozamokat nullának feltételezve). A táblázatban S az alaptermék árát jelöli (ez H-val a kezdeti időpontban megegyezik), X a kötési árfolyam, σ jelöli S, I, valamint H hozamának szórását, azaz volatilitását. A ρ a két hozam közti korrelációs együtthatót, míg β^* az alkalmazott (optimális) β értékét mutatja. A $T-t$ a lejáratig hátralévő idő, r pedig a folytonos kockázatmentes kamatláb.

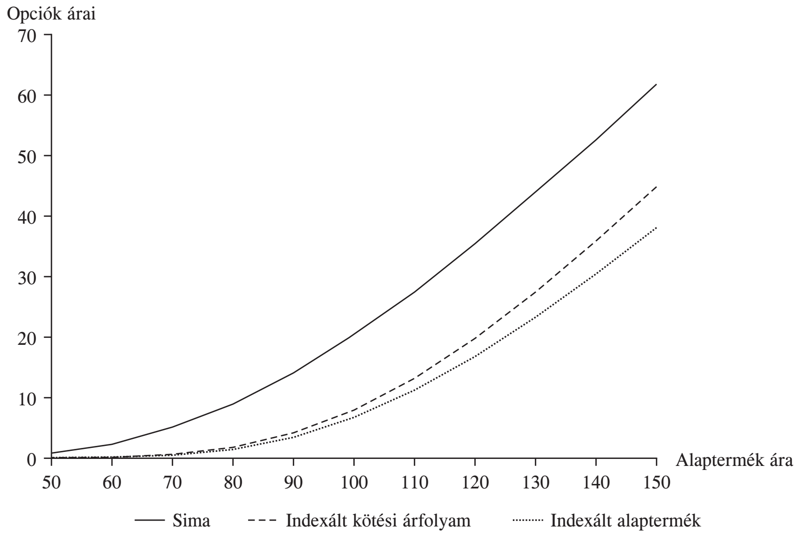
Az *1. táblázatból* megállapítható, hogy a hagyományos opciók értékéhez képest az alaptermékáron indexált opciók értéke annál alacsonyabb, minél magasabb az alaptermék és az index hozamának korrelációja, minél inkább nyereséggel még nem lehívható

1. táblázat

Hagyományos és az indexált alaptermék árú opcióértékek összehasonlítása

S	X	σ		ρ	β	$T-t$	r	σ	Hagyományos	b – indexált kötési	c – indexált alaptermék	b	c
		S	I					H				hagyományos opció százalékában	
		százalék					százalék			árfolyam			
100	100	40	20	0,75	1,5	1	10	26,5	20,32	7,84	6,65	38,6	32,7
100	100	40	20	0,5	1	1	10	34,6	20,32	13,75	12,44	67,7	61,2
100	100	40	20	0,25	0,5	1	10	38,7	20,32	17,77	16,99	87,4	83,6
100	120	40	20	0,75	1,5	1	10	26,5	12,59	2,80	2,38	22,3	18,9
100	120	40	20	0,5	1	1	10	34,6	12,59	7,15	6,47	56,8	51,4
100	120	40	20	0,25	0,5	1	10	38,7	12,59	10,47	10,01	83,2	79,6
100	80	40	20	0,75	1,5	1	10	26,5	31,60	18,75	15,90	59,3	50,3
100	80	40	20	0,5	1	1	10	34,6	31,60	24,82	22,46	78,5	71,1
100	80	40	20	0,25	0,5	1	10	38,7	31,60	28,90	27,63	91,5	87,4
100	100	40	20	0,75	1,5	0,5	10	26,5	13,58	6,04	5,56	44,5	40,9
100	100	40	20	0,5	1	0,5	10	34,6	13,58	9,75	9,27	71,8	68,3
100	100	40	20	0,25	0,5	0,5	10	38,7	13,58	12,15	11,88	89,5	87,5
100	100	30	20	0,75	1,125	1	10	19,8	16,73	7,22	6,43	43,1	38,4
100	100	30	20	0,5	0,75	1	10	26,0	16,73	11,67	10,87	69,7	64,9
100	100	30	20	0,25	0,375	1	10	29,0	16,73	14,72	14,24	87,9	85,1

1. ábra
A hagyományos, az indexált kötési árfolyamú és az indexált alaptermék árú opciók értékének alakulása az alaptermék árának függvényében



(OTM) az opció, minél nagyobb a lejáratig hátralévő idő, és minél nagyobb az alaptermék és az index szórásának a különbsége.

Az indexált alaptermék árú opciók értéke mindig alacsonyabb, mint az indexált kötési árfolyamú opciók értéke. Belátható (az indexált kötési árfolyamú opciók értékének levezetését lásd például *Johnson–Tian* [2000*b*] cikkében), hogy a két opció értékének a hányadosa mindig $e^{\lambda t}$.

Az *1. ábra* grafikusan is bemutatja a három opció értékének változását az alaptermék árának függvényében (minden más változatlansága mellett).

Az alaptermék árán indexált opciók további felhasználási területei

Az alaptermékáron indexált opcióknak nagy előnye az indexált kötési árfolyamú opciókkal szemben az, hogy kötési árfolyamuk változatlan az opció lejártáig. Ez igen hasznosnak bizonyul abból a szempontból, hogy bevezethetővé válnak standardizált tőzsdei kereskedésbe is – itt ugyanis általában egy kontraktus állandó jellemzője a kötési árfolyam, a lejárat és az opció típusa. Ugyanakkor mivel az indexált alaptermék árú opció a gyakorlatban csak úgy lenne kivitelezhető, ha a szállítandó részvények darabszámát változtatnánk meg általában törtszámú darabra, az opció alaptermékének fizikai szállítása csak körülményesen, részleges készpénzes teljesítéssel összekötve valósítható meg.

Az indexált alaptermék árú opciók esetén a kontraktus egy további jellemzővel bővülne: ez a β értéke. Mivel ezt az értéket a kontraktus élete során nem lehet változtatni, valamilyen történelmi átlag alapján kell beállítani, bár meglehet, hogy sok esetben az egyszerűség kedvéért érdemes $\beta = 1$-t alkalmazni.

Noha az alaptermékáron indexált opciók technikai előnye nem feltétlenül biztosítja a termék sikerét is, úgy véljük, hogy az indexált alaptermék árú opciók a tőzsdei termékfejlesztés során is sikerre számíthatnak a későbbiekben. A következőkben néhány olyan stratégiát mutatunk be, amelyek az indexált alaptermék árú opciók nélkül csak igen költségesen valósíthatók meg.

Spekuláció bizonyos iparágak relatív erősödésére a teljes piaci átlaghoz képest

Amennyiben valaki például az amerikai technológiai szektor erősödésére számít, vehet egy olyan Nasdaq-indexre vonatkozó opciót, amely az S&P 500 szerint indexált. Mivel a Nasdaq és az S&P 500 hozamainak korrelációja igen magas, ez az opció sokkal olcsóbb lesz, mint egy egyszerű Nasdaq-opció. A *2. táblázatban* egy, a valós piaci adatok alapján készült példát láthatunk, amelyben összehasonlítjuk a hagyományos és az indexált opciók jellemzőit.

2. táblázat

A NASDAQ-indexre szóló indexált alaptermékárú és hagyományos opciók elméleti árai

(Alaptermék: NASDAQ , index: S&P 500; alaptermékár: 1894,31; dátum: 2004.szeptember 10.; lejárat: 2004. december 10.; kamatláb: 2 százalék; osztalékhozam: NASDAQ 0,33 százalék, S&P 500: 1,83 százalék)

Lehívási ár	Alaptermék volatilitás	Index volatilitás	Korreláció	β	λ	H volatilitása	Egyszerű opció díja	Indexált opció díja	Százalék
	százalék				százalék				
1850	18,75	11,42	0,83	1,35	0,9	10,6	98,72	68,87	69,8
1900	18,75	11,42	0,83	1,35	0,9	10,6	71,73	39,69	55,3
1950	18,75	11,42	0,83	1,35	0,9	10,6	50,27	20,18	40,2
2000	18,75	11,42	0,83	1,35	0,9	10,6	33,97	8,98	26,4
2050	18,75	11,42	0,83	1,35	0,9	10,6	22,12	3,48	15,7

Láthatjuk, hogy a három hónapos, ATM *(at the money)* indexált opció díja megközelítőleg fele a hagyományos opcióénak. Ha azonban 156 pont emelkedésre fogad valaki (vagyis hogy a Nasdaq 11,1 százalékkal túlteljesíti az S&P-t a vizsgált időszakban), az indexált opció díja a hagyományos opció díjának 15,7 százaléka.

Spekuláció bizonyos részvények relatív erősödésére a teljes piaci átlaghoz képest

Hasonlóképpen az előző példához, amennyiben valaki egy adott amerikai részvény kiemelkedő teljesítményét várja, vehet egy adott részvényre vonatkozó opciót, amelynek ára az S&P 500 szerint indexált. Ez az opció is olcsóbb lesz, mint a hagyományos opció, bár hogy mennyivel, az az adott részvény és az index korrelációjától függ. A *3. táblázatban* ismét néhány, a valós piaci adatok alapján készült példát láthatunk.

Az indexált opció díja ezekben az esetekben is kisebb a hagyományosnál, bár nem olyan mértékben, mint az indexek esetében. Ennek látható oka a részvények hozamának alacsonyabb korrelációja az S&P 500-zal, hiszen a két részvény β-ja igencsak eltérő, de korrelációjuk az index hozamával nagyjából megegyezik.

3. táblázat

Egyedi részvényekre szóló, indexált alaptermék árú és a hagyományos opciók elméleti árai

(Alaptermék: PFIZER, index: S&P 500; alaptermékár 31,86; dátum: 2004.szeptember 10.; lejárat: 2004. december 10.; kamatláb: 2 százalék; osztalékhozam: PFIZER 2,13 százalék, S&P 500: 1,83 százalék)

Lehívási ár	Alaptermék volatilitás (százalék)	Index volatilitás (százalék)	Korreláció	β	λ (százalék)	H volatilitása (százalék)	Egyszerű opció díja	Indexált opció díja	Százalék
30	18,91	11,42	0,51	0,84	2,2	16,3	2,30	2,17	94,4
32	18,91	11,42	0,51	0,84	2,2	16,3	1,12	0,96	85,1
34	18,91	11,42	0,51	0,84	2,2	16,3	0,45	0,32	71,0
36	18,91	11,42	0,51	0,84	2,2	16,3	0,15	0,08	54,4
38	18,91	11,42	0,51	0,84	2,2	16,3	0,04	0,01	38,3

(Alaptermék: CISCO, index: S&P 500; alaptermékár: 20,46; dátum: 2004.szeptember 10.; lejárat: 2004. december 10.; kamatláb: 2 százalék; osztalékhozam: CISCO 0,00 százalék, S&P 500: 1,83 százalék)

Lehívási ár	Alaptermék volatilitás (százalék)	Index volatilitás (százalék)	Korreláció	β	λ (százalék)	H volatilitása (százalék)	Egyszerű opció díja	Indexált opció díja	Százalék
18	33,45	11,42	0,58	1,69	1,0	27,3	2,94	2,73	93,1
20	33,45	11,42	0,58	1,69	1,0	27,3	1,64	1,37	83,3
22	33,45	11,42	0,58	1,69	1,0	27,3	0,81	0,56	69,0
24	33,45	11,42	0,58	1,69	1,0	27,3	0,35	0,19	52,7
26	33,45	11,42	0,58	1,69	1,0	27,3	0,14	0,05	37,4

Devizakosár-centrum körül sávosan lebegtetett devizákra szóló opciók

Számos ország olyan árfolyamrendszerrel rendelkezik, amelyben a központi bank egy devizakosár által rögzített centrumárfolyam körül egy bizonyos sávban történő lebegést enged az egyes devizáknak, és ha a deviza a sáv szélére kerül, beavatkozik. Ilyen deviza például 2004 novemberében az izraeli sékel, amelynek centrumárfolyamát 1999. december 31-e óta egy amerikai dollárból, euróból, angol fontból és japán jenből számított devizakosár értéke határozza meg (lásd *IMF* [2003]).

Ebben az esetben az adott deviza és a devizakosár egyik összetevője közti keresztárfolyam változása két tényezőre bontható: az adott deviza a centrumárfolyamhoz képesti elmozdulására, és a devizakosár-összetevő árának elmozdulására a devizakosár többi résztvevőjéhez képest.

Hogy ez a felbontás világosabb legyen, vegyünk egy példát. Korábban a magyar forint egy olyan centrumárfolyam körül mozoghatott $\pm 2{,}25$ százalékos sávban, amelynek összetétele 50 százalékban dollár és 50 százalékban euró volt. Ez azt jelentette, hogy ha a dollár 1 százalékkal erősödött az euróhoz képest, akkor a dollár–forint árfolyam 0,5 százalékkal nőtt, az euró–forint árfolyam pedig 0,5 százalékkal csökkent. Ha viszont a forint egy rossz makrogazdasági hír miatt gyengült 1 százalékot a devizakosárhoz képest, mind a dollár–forint árfolyam, mind pedig az euró–forint árfolyam növekedett 1 százalékkal. A dollár–forint árfolyam relatív változása ezért két tényező összege volt: a dollár centrumárfolyama relatív változásának, valamint a forint relatív változásának a centrumhoz képest.

Egy egyszerű dollár–forint opció vásárlásával a spekuláns lényegében mindkét tényezőre fogadott. Egy olyan indexált dollár–forint opció segítségével, amely a dollár centrumárfolyamával indexálta volna az opciót, a spekuláns függetleníthette volna magát a dollár–euró árfolyam változásaitól, és csak a sávon belüli elmozdulásra kockáztathatott volna.

*

Cikkünkben az indexált opciók egy új típusát mutattuk be. Megállapítottuk, hogy míg az irodalomban korábban elterjedt indexált kötési árfolyamú opciók – ha mérsékelten is – hordoznak indexkockázatot, az általunk definiált indexált alaptermék árú opciók a β megfelelő megválasztása esetén nem tartalmaznak indexkockázatot. Levezettük az általunk definiált opciók elméleti árát meghatározó képleteket. Végül pedig bemutattuk, hogy ezek az opciók nemcsak a vezetői javadalmazás terén, hanem a tőzsdei termékfejlesztésben is jól felhasználhatók.

Hivatkozások

ACHARYA, V. V.–JOHN, K.–SUNDARAM, R.K. [2000]: On the optimality of resetting executive stock options. Journal of Financial Economics, Vol. 57. 65–101. o.

BAXTER, M.N–RENNIE, A. [1997]: Financial Calculus. Cambridge University Press.

BLACK, F.–SCHOLES, M. [1973]: The Pricing of Options and Corporate Liabilities. Journal of Political Economy, május, 637–654. o.

BRENNER, M.–SUNDARAM, R.K.–YERMACK, D. [2000]: Altering the terms of executive stock options. Journal of Financial Economics, Vol. 57. 103–128. o.

BURCHMAN, S.–JONES, B.–HARPER, D. [2003]: Haves stock options run their course? Directors & Boards, tavaszi szám, 39–42. o.

CARTER, M. E.–LYNCH, L. J. [2001]: An examination of executive stock option repricing. Journal of Financial Economics, Vol. 61. 207–225. o.

CASSON, P. [2000]: Company Share Options. John Wiley & Sons.

CHANCE, D. M.–KUMAR, R.–TODD, R. B. [2000]: The 'repricing' of executive stock options. Journal of Financial Economics, Vol. 57. 129–154. o.

CHIDAMBARAN, N. K.–NAGPURNANAND, R. P. [2003]: Executive stock option repricing, internal governance mechanisms and management turnover. Journal of Financial Economics, Vol. 69. 153–189. o.

FASB [1993]: Accounting for stock-based compensation, Exposure draft. Financial Accounting Standards Board, június.

FASB [1995]: Accounting for stock-based compensation. Financial Accounting Standards Board, Financial Accounting series, No. 154-C.

HULL, J.–WHITE, A. [2004]: Accounting for employee stock options: a practical approach to handling the valuation issues, Journal of Derivatives Accounting, 2004, Vol. 1, No. 1., 3–9. o.

HULL, JOHN C. [1996]: Options, Futures and Other Derivative Securities, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1996.

IMF [2003]: Annual Report on Exchange Rate Arrangements and Exchange Restrictions. International Monetary Fund, 2003.

JENNERGREN, L.–NASLUND, B. [1993]: A comment on Valuation on executive stock options and the FASB proposal. The Accounting Review, 68. 179–183. o.

JOHNSON, S. A.–TIAN, Y. S. [2000*a*]: The value and incentive effects of nontraditional executive stock option plans. Journal of Financial Economics, Vol. 57. 3–34. o.

Johnson, S. A.–Tian, Y. S. [2000*b*]: Indexed executive stock options. Journal of Financial Economics, Vol. 57. 35–64. o.

Johnson, S. A.–Tian, Y. S. [2004]: Risk-averse executives, multiple common risks, and the efficiency and incentives of indexed executive stock options. Journal of Derivatives Accounting, Vol. 1. No. 1., 11–28. o.

Jones, B.–Burchman, S. [2002]: How to salvage stock options? Forbes.com, 2002. július 30. http://www.forbes.com/2002/07/30/0730opinion.html.

Jorgensen, P. L. [2002]: American style indexed executive stock options. European Finance Review, Vol. 6. 321–358. o.

Margrabe, W. [1978]: The value of an option to exchange one asset for another. The Journal of Finance, Vol. 33. No. 1. 177–186. o.

Schizer, D. M. [2002]: Reducing the tax costs of indexed options. Columbia Law School Working Paper, No. 208.

Schnusenberg, O.–McDaniel, W. R. [2000]: How to value indexed executive stock options. Journal of Financial and Strategic Decisions, Vol. 13. No. 3. 45–48. o.