Közgazdasági Szemle, LI. évf., 2004. október (924–935. o.)

BRÓDY ANDRÁS

Leontief zárt dinamikus modellje

Megoldások és értelmezések

A zárt (homogén) dinamikus modell egyensúlyi megoldásának három módszerét ismertetem. Mindhárom megoldás azonos növekedési rátához, valamint egyazon ár- és mennyiségi arányokhoz vezet. A folyó és tőkeráfordítási együtthatók adataival végzett eltérő műveletek miatt azonban a három változat egymástól elütő mátrixokat hoz létre. A három megoldásnak más és más, egymásnak ellent nem mondó, egymást kiegészítő gazdasági és elméleti értelmezése lehetséges. Az is kiderül, hogy az egyensúlyi helyzet számítása semelyik módszer esetében sem alapul maximalizáláson. A profit vagy a növekedés maximumára való törekvés nem közelít, hanem távolít az egyensúlyi pályától. Emiatt aránytalan kapacitások halmozódnak fel.*
Journal of Economic Literature (JEL) kód: C67, D5, D57, H5, O4, O41.

Leontief modelljének első megoldása magából a klasszikus növekedési egyenletből indul ki (*Leontief és szerzőtársai* [1953]. 58. o. (3.5) egyenlet). A differenciálegyenletet Leontief inverze (az úgynevezett multiplikátor) és a tőkemátrix szorzatából eredő pozitív mátrix oldja meg. A keresett megoldás a mátrix legnagyobb sajátértékének reciproka és az ehhez tartozó sajátvektorok. Az egyensúly értelmezése a munkaérték-elmélet vagy a marginális szemlélet alapján az átlagprofitot biztosító marxi termelési ár vagy a marshalli hosszú távú egyensúlyi ár fogalmához vezet. Ezek tehát nem ellentétes kategóriák.

A második formát Rényi Alfréddal dolgoztuk ki. Az ötvenes évek elején a tervgazdaságban szükségszerűen és ismételten felmerülő hivatalos árrendezések számításának menetét modelleztük. Ennek az árrendezésnek célja az önköltséget és előírt nyereséget tartalmazó árak ismételt (körkörös) kiigazítással történő kiszámítása volt. A számítási eljárás konvergenciájának vizsgálatához a gazdaság áruforgalmát tükröző mátrixból indultunk ki. Így jutottunk annak belátásához, hogy a nyereség rátája nem írható elő tetszőlegesen. Ettől függnek a rendszermátrix sajátértékei, tehát a számítás konvergenciája (*Rényi–Bródy* [1956]). Tisztáztuk azt is, hogy a modell az akkoriban terjedő Leontief-modell duálisa, és ezért annak egy elméletileg fontos problémáját is megoldja. Kiinduló mátrixunk a később ismertté váló sraffai önhelyreállító rendszer rokonának is tekinthető (*Sraffa* [1960]). Ezért a ricardói értékstandard és standard termékhalmaz kiszámítását is megoldja. Ezt Morishima részletesen tárgyalta: a walrasi egyensúlyhoz vezető folyamatra alapozva bizonyította a piac aszimptotikus (de nem monoton) konvergenciáját. Az ilyen egyensúly azonban – még ha Walras vagy Morishima gyakorlatilag kivitelezhetetlen ár-

* Munkámat szeretettel ajánlom ifjabb pályatársaimnak *Ligeti Csáknak, Simonovits Andrásnak* és *Zalai Ernőnek,* akiknek következetes és tiszta matematikai okfejtéséből mindig erőt merítettem saját konokságaimhoz is. Lehetséges, hogy ők az itt közölt formákból más, fontosabb vagy tán ellentétes következtetéseket vonnak le, az egyenletek, az adatok és a logika tisztelete azonban mindenképp közös.

Bródy András az MTA Közgazdaságtudományi Kutatóintézetének tudományos tanácsadója.

verési előírását el is fogadjuk – a piacon csak a végtelen jövőben alakul ki (*Morishima* [1964]).[1] Közbenső eredményei viszont – mivel a konvergencia nem monoton – nem megbízhatók, hanem ciklikusan ingadozók.

A harmadik formát, amely eddig nem merült fel az irodalomban, a szimmetria kedvéért közlöm. E forma számítástechnikai szerepe csekély, de figyelmeztet arra, hogy a gazdaság jelen állapota és lehetőségei a múltban felhalmozott tőke fajtáinak arányaitól és minőségétől függnek. Ez a forma a folyó ráfordítások mátrixából alkotott multiplikátorhoz hasonló, de a tőkemátrix adataiból képzett végtelen hatványsor. Az „eszközinverz”, vagyis ennek hatványsora gyorsan konvergál. Számítása azonban az egyensúlyi növekedési ráta ismeretét igényli. E ráta azonban mindig csak közelítően ismerhető. Pontossága a számítógépnek köszönhető látszat, az adott érték nem igazán megbízható. Az inverz értelmezése mégis hasznos, mert a tőkefajták egyensúlyi kormegoszlása, illetve az ettől való eltérés is oka lehet a gazdaság sajátos ingadozásainak.

Mindhárom forma számításának matematikai konvergenciája a tőkeráfordítások helyes számbavételén és állaguk teljes felmérésén múlik. Az utóbbi időben kezdünk csak felfigyelni arra, hogy ismereteink mindig tőkék (vagyis állagok) megfigyelésén és mérésén alapulnak. Az áramlatok (tehát a folyó ráfordítások) fogalma és mértéke az állagok közvetlen, elemi megfigyelésén és ezek helyes mérésén múlik. Az áramlat fogalma azonban az állagok megállapításán túlmenő további elméleti megfontolást és feltételezéseket is igényel. A jövedelmek helyes elosztását keresve mégis gyakran elfeledkezünk a helyes tőkearányok alapvető jelentőségéről.

Ma még nem mértük fel egészében a termelés megindításához és folyamatos lebonyolításához szükséges összes – sok tekintetben eltérő sajátosságú – tőkét. Bármennyire döntő a szerepe, mégsem tudjuk – és nem is szoktuk – számba venni az emberi tőkét. Sok más lényeges eszköz és erőforrás is figyelmen kívül marad. A pénz fokozódó hatalmának alávetve a tőke és erőforrások állagai helyett csak a tőzsdéken és pénzpiacokon mutatkozó áraik illékony tükröződését és hullámait kísérjük figyelemmel, egyre rövidlátóbb buzgalommal. Pedig a hullámverés többnyire a múlt tőkeképződésének a jelenben már kiküszöbölhetetlen egyenlőtlenségéből ered. A gazdasági ciklusok ereje a múltban gyökerező torz kormegoszlásból és a tőke változó használatából fakad. Lassanként azonban már Marx Tőkéjét is a tőke fogalmának, mértékének, fajtáinak és arányainak tisztázása nélkül próbálja tárgyalni az irodalom.

A modellek mindegyikét az algebrai egyenletek mellett kisebb számtáblázatok is szemléltetik. Ehhez gazdaságunknak az ezredforduló táján megfigyelt közelítő, idealizált és talán túlságosan is leegyszerűsített képét vettem alapul.[2] Ez az adathalmaz a gazdaságot három szektorra tagolja: a vállalatok (tehát az üzleti élet), az állam (tehát a hatóságok) és a háztartások (tehát a társadalom és a családok, általában az emberi munkaerő) újratermelésének és bővítésének köreit különbözteti meg.

A klasszikus megoldás

Leontief zárt, homogén, dinamikus modelljét második nagy művében hozta nyilvánosságra. Alakja a következő:

$$\mathbf{x} - \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{B}d\mathbf{x}/dt. \tag{1}$$

[1] A ma oktatott „bizonyítások”, amelyek a piaci egyensúly önműködő létrejöttét kívánják igazolni, még akkor is tévesek és félrevezetők, amikor kizárólag a folyó ráfordításokra szorítkoznak, és a tőke kiemelkedő szerepét elhanyagolják. Erre a modell tárgyalása során még több ízben kitérek.

[2] Mentségemre szolgáljon, hogy az ábrázolás teljessége kedvéért olyan számokra támaszkodtam, amelyek még durva becslésnek is alig tekinthetők. A felhasznált adatokat a Függelék tartalmazza.

A modell lineáris differenciálegyenlet. Ez valós statisztikai adatokkal kitölthető rendszert ír le. Az egyenletben $\mathbf{x}$ a termelés oszlopvektora, $\mathbf{A} = \{a_{ik}\}$ a folyó ráfordítások, $\mathbf{B} = \{b_{ik}\}$ pedig a tőkebefektetések együtthatóinak mátrixa. Az egyenlet azt tételezi fel, hogy a termelésből az ehhez szükséges folyó ráfordítást levonva, a maradékot (a terméktöbbletet) a termelési kapacitások bővítésére fordítják. A termelés növekménye (idő szerinti deriváltja) $d\mathbf{x}/dt$. Az ilyen egyenletet a matematika a $d\mathbf{x}/dt = \boldsymbol{\lambda}\mathbf{x}$ feltevéssel élve (egyöntetű növekedési rátát keresve) a derivált mellett álló $\mathbf{B}$ mátrix inverziójával oldja meg. Itt azonban, mint azt a számpéldából is látni fogjuk, e mátrix szinguláris vagy közel szinguláris is lehet. Ezért vagy egyáltalán nem, vagy csak igen pontatlanul invertálható. A gazdaság erősen irreverzibilis folyamatainak mátrixaitól, mint erre Leontief az idézett mű rákövetkező fejezetében utal is, nem követelhető meg a regularitás. A termelés a szokásostól eltérő, mintegy fordított irányban csak bizonytalanul és lassan működtethető. Ezért a megoldás Leontief inverzével számol, a $\mathbf{Q} = (\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1} = 1 + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \ldots + \mathbf{A}^n + \ldots$ végtelen hatványsorral. Ennek a hatványsornak az összege többlettermék létezése esetén biztosan pozitív és véges. Segítségével a következő módon oldható meg a feladat:

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\lambda}\mathbf{QBx}. \tag{2}$$

A (2) egyenletnek a gyakorlatban (ahol minden termék termeléséhez szükséges a munka, a létrehozott termékek és szolgáltatások pedig végső soron a társadalom újratermelését szolgálják) mindig egyértelmű és pozitív a megoldása. Ez a $\boldsymbol{\lambda}\mathbf{QB}$ mátrixszal végzett transzformáció úgynevezett fixpontja, ez határozza meg a gazdasági növekedés egyensúlyi pályáját. Rögtön meg kell jegyezni azt, hogy λ, tehát az egyensúlyi növekedési ráta *nem maximális*. Értéke a $\mathbf{QB}$ pozitív mátrix egyértelmű és legnagyobb abszolút értékű, mindig pozitív és reális sajátértékének a *reciproka*. A mátrix többi sajátértéke kisebb. Ezek reciprokai nagyobb abszolút értékű, és ezért gyorsabb növekedést is eredményeznek. Az egyensúly nem maximalizálja a növekedés rátáját, az egyensúlyi ráta rövidebb távon mindig felülmúlható. Erre a mindenkori érdekek ösztönzik a gazdálkodókat, a profit, illetve a növekedés maximalizálására törekedve. Mégis csak az egyensúlyi ráta az egyetlen olyan ráta, amelynek mentén megbízhatóan pozitív és simán lebonyolítható növekedés tartható fenn. A növekedés akkor tehető ennél gyorsabbá, ha felborítjuk ezeket az egyensúlyi arányokat, de minden más megoldás irányában elmozdulva az új irány csak korlátozott ideig követhető. Ugyanis előbb-utóbb zérussá, azután pedig negatívvá válik a termelési vektor valamelyik eleme. Az egyensúlyi pálya nem vonzó. A maximálás a modellt domináló többi sajátvektor irányába löki a gazdaság pályáját.

Mindennek az elméleti következménye, hogy bár a modell elfogadhatóan, logikusan és ellentmondásoktól mentesen írja le a gazdasági egyensúlyt, sőt az adatok mindenkori megbízhatóságának mértékében lehetővé teszi számszerű megközelítését is, mégsem írja le a tényleges gazdasági mozgást. Azért nem írhatja le ezt a mozgást, mert az egyenlet megoldásait negatív elemeket is tartalmazó vektorok dominálják. A gazdaságról viszont az a tapasztalatunk, hogy bár eltávolodik az egyensúlytól, és éles eltérítő tendenciák lépnek fel benne, pályája mégis az n dimenziós tér pozitív ortánsában marad. Egyszerűbben kifejezve, habár mind az ár, mind a termelés mértéke elmozdulhat negatív irányban is, ez szinte sohasem vezet zérus árhoz vagy zérus termeléshez. A gazdaság az elméletileg igen széles és gazdag (ráadásul: változó dimenziójú) tér pozitív szögletében marad, az egyensúly „közelében”. E közelség azonban tisztán matematikai értelemben áll fenn. A gyakorlat összefér azzal, hogy egy-egy ár vagy mennyiség nemcsak többszöröse, de néha akár tízszerese-százszorosa is legyen az egyensúlyinak, habár nem állandóan és nem túl hosszú időn keresztül.

Milyen gazdasági transzformációt ír hát le a fenti $\mathbf{QB}$ mátrix? A $\mathbf{Q}$ mátrix mindig valamely végtermék előállításához szükséges teljes termelést határoz meg. Ezért a mátrixnak a **Bx** vektorral való szorzata az egyensúlyi pályát biztosító kapacitások előállításához szükséges teljes termelést adja meg. Ha a számítás azt mutatja, hogy az éves egyensúlyi növekedési ráta például három egész és egyharmad százalék nagyságú, akkor ebből az következik, hogy az éves termelés átlagosan mintegy harminc év folyamán felhalmozott tőkekészletet tart lekötve.[3] Az árak meghatározására szolgáló duális egyenletrendszer az (1) egyenlet sorvektorokkal szorzott változata:

$$\mathbf{p}' - \mathbf{p}'\mathbf{A} = \lambda \mathbf{p}'\mathbf{B}. \qquad (1^*)$$

Ha a λ tényezőt az átlagos és egyöntetű profitrátának tekintjük, akkor ez a képlet mind Marx termelési árait, mind Marshall hosszú távú egyensúly árait kifejezi. A két látszólag szembenálló, ellentétes, sőt ellenségesnek vélt nézet, az áraknak a szükséges ráfordítással, illetve a kielégítendő szükséglettel való meghatározása egyazon matematikai formához vezet.[4] Értelmezhető azonban a növekedési ráta exponenciális kitevőként is. Ez mindkét iskolát kielégítve, és ugyanakkor meg is haladva, hosszú távú egyensúlyi inflációs rátának felel meg. Ezt az értelmezési lehetőséget, amit az utóbbi évtizedek adatai nem cáfolnak, itt mégis mellőzöm. Meg kell jegyezni azonban, hogy ez az egyenlet nem egyszerűen a (2) egyenlet transzpozíciójához, hanem az ettől eltérő, de mégis azonos rátát adó

$$\mathbf{p}' = \lambda \mathbf{p}'\mathbf{B}\mathbf{Q} \qquad (2^*)$$

alakhoz vezet. Ez az alak azt is megmutatja, hogy az egyensúlyi árak rendszere az egyes termékek és szolgáltatások létrehozásához szükséges összes befektetett tőke arányait tükrözi. A mátrixszorzás azonban (egyes kitűntetett esetektől eltekintve) nem kommutatív művelet. A szorzás sorrendjének felcserélése azonban nem változtatja meg a szorzat determinánsát és sajátértékeit, viszont transzformálja a sajátvektorokat. A (2) egyenlet bal oldali sajátvektora ezért nem az árakat, hanem az egyensúlyi értéktöbbletek $\mathbf{m}' = \mathbf{p}'(\mathbf{1} - \mathbf{A})$ sorvektorral jelölhető értékeit, míg a (2*) egyenlet jobb oldali oszlopvektora nem a termelt egyensúlyi mennyiségeket, hanem a többlettermék $\mathbf{y} = (\mathbf{1} - \mathbf{A})\mathbf{x}$ oszlopvektorban összefoglalt mennyiségeit adja meg.

A függelékben szereplő adatokat úgy szerkesztettem meg, hogy az árrendszer a lehető legegyszerűbb legyen, tehát minden szektorban egységnyi. Ebben az esetben ugyanis a szektorok tevékenységének mértéke és értéke azonos. E sajátvektorok, amelyek tehát az egyensúlyi arányokat jellemzik, természetesen tetszőleges számmal megszorozva, továbbra is egyensúlyiak maradnak. A vizsgálandó **BQ,** illetve **QB** mátrixok legnagyobb sajátértéke 30, részletes alakja, négy tizedes értékre kerekítve az alábbi:

$$\mathbf{QBx} = \begin{bmatrix} 10,5634 & 18,8732 & 19,7183 \\ 2,5352 & 4,9296 & 8,7324 \\ 3,5915 & 7,9169 & 20,7042 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 90 \\ 30 \\ 60 \end{bmatrix} = 30\mathbf{x}$$

$$\mathbf{p}'\mathbf{BQ} = [1 \quad 1 \quad 1] \begin{bmatrix} 17,1831 & 16,7606 & 10,9859 \\ 0 & 0 & 0 \\ 12,8169 & 13,2394 & 19,0141 \end{bmatrix} = [30 \quad 30 \quad 30] = 30\mathbf{p}'.$$

[3] Ez nem azt jelenti, hogy az állagok értéke a folyó termelés harmincszorosa, csak azt, hogy felhalmozásuk átlagosan ennyi ideig tartott. Mivel azonban értékük a felhalmozás pillanatától kezdve fizikailag és technikailag csökkenni kezd, ezért a maradékérték, azaz a tőke nettó értéke még gyorsan növekvő gazdaságban is az eredeti beruházásnak csak mintegy fele szokott lenni.

[4] Ez hasonlít ahhoz, ahogyan Emmi Noether kimutatta (a szintén hadilábon álló) kauzális és a teleologikus érvelésen nyugvó mechanikai iskolák ekvivalenciáját. Az utóbbi bizonyítás lényegéről lásd részletesebben *Neumann* [1995].

A szorzás eltérő sorrendje feltűnően megváltoztatta az eredményül kapott mátrixot. A sajátértékek azonban azonosak maradtak, a számítás mindkét esetben a 30, 6,1972 és a zérus értékeket adja. A egyensúlyi sajátvektorok irányába eső változás ezért $[1/30] \times 100 = 3\,1/3$ százalékos. A második sajátérték azonban kisebb lévén, ennél jóval magasabb $1/6{,}1972 = 0{,}1612$ növekedési rátát tesz elméletileg lehetővé, ez több mint 16 százalékos. A zérus sajátértékhez aztán elméletileg végtelenül gyors, szinte korlátlan ugrás tartozik, ez bővebb magyarázatot igényel.

Foglalkozzunk tehát először az utolsó, érthetetlennek tűnő zérus értékkel! Mit közöl itt a matematika a maga módján? Először is azt, hogy alighanem téves megfigyelés, sőt téves feltételezés került a kiinduló adatok közé. A **B** mátrix (és ezzel annak minden szorzata) azért szinguláris, mert a mátrix egyik sora zérus. A tőkemátrix e sora azért zérus, mert az állami szolgáltatások nem halmozhatók fel. Ez annak a ki nem mondott, de helytelen feltevésnek a következménye, hogy az állami apparátus végtelen sebességgel dolgozik. E tevékenység főként a jövedelem és a tőke újraelosztásában merül ki. Burkoltan feltettük hát, hogy az állam nem csak jövedelmet, hanem tőkét is késedelem nélkül átvihet a gazdaság bármely szektorából bármely másik szektorába, háztartásból vállalkozásba, avagy akár megfordítva is.[5]

Matematikailag megnyugtatóbb volna, ha a szingularitás kiküszöbölése céljából az állami intézkedések hatásának sajátosan hosszú tartamát felkutatva, valamilyen becsült nagyságokat felvennénk a kiinduló adatok közé. Ezzel megszüntethető volna a mátrix szinguláris volta. Ez azonban ne fedje el azt a fontos kérdést, amely az államnak látszólag gazdaság feletti, szinte gazdaságon kívüli képességéből és erejéből ered. E hatalom helytelen és mértéktelen alkalmazása könnyen, néha példátlanul viharos sebességgel vezet gazdasági buktatókhoz.[6]

Van azonban egy másik, nem zérus sajátértékből eredő kisiklási veszély is, amelyet több mint 16 százalékos, tehát a hosszú távú egyensúlyi növekedés sebességét több mint négyszeresen meghaladó változás kísér. Az ehhez tartozó sajátvektor értékeit a $[32\ 2\ -9]'$ oszlopvektor adja meg. Ez arra utal, hogy a háztartásokat megszorítva, a vállalatok és az állam tevékenységét pedig növelve ez az „irányzat" a következő évben több mint 16 százalékkal bővíthető. A fenti vektor persze csak arányokat és nem abszolút értékeket jelez. Az $[1\ 2/32\ -9/32]$ vektor, vagy ezzel arányos, de még kisebb abszolút értékekkel bíró mozgás is ugyanezt a sajátértéket adja, s e vektorok mentén már kimozdulhat a gazdaság az egyensúly $[3\ 1\ 2]'$ vektorából anélkül, hogy negatívvá válna bármelyik eleme.

A gazdaság erős irreverzibilitása miatt ilyen éles változás gyakorlatilag mégsem vihető végbe. Annak azonban nincs és sosem volt akadálya, hogy a háztartások tevékenységét és életszínvonalát lényegében változatlanul hagyva, a teljes többletértéket vagy annak zömét a vállalati kapacitásbővítésre fordítsák. Hozzávetőleg kiszámítható az is, hogy ez mekkora növekedést eredményezhet. A számítás egyszerű. Induljunk ki az egyensúlyi helyzetből! Ezt a $[3\ 1\ 2]'$ oszlopvektor adja meg. A létrehozott többlet ekkor 0,6 anyagi és 0,7 emberi tőke. Az állam feltételezéseink szerint nem hoz létre felhalmozható többletet, de a növekedés ezt nem is igényli.[7]

Ha most az 1,3 értékű többlet egészét a vállalati szektorra fordítjuk, akkor e szektor

[5] Feltűnő, hogy a politikusok, sőt, gyakran még a valósághoz közelebb álló újságírók is általában úgy vélekednek, hogy az elosztási problémák megoldását szolgálni vélő törvények, rendeletek és intézkedések hatása azonnali. Apparátusok, hivatalok, bankok és hatalom tevékenysége, az ezek iránti bizalom felépítése, utasításaik végrehajtása azonban általában tetemes időt igényel. A bizalom elvesztése viszont néha napok alatt is lehetséges.

[6] A történelemből ismert nagyobb válságok és forradalmak mögött ilyen elhibázott intézkedések találhatók.

[7] Az állami költségvetés hiánya persze az élénkítés pótlólagos forrása lehet.

$3\times3 = 9$ egységnyi tőkéje 1,3/9, azaz több mint 14 százalékkal bővülhet. A növekedés üteme tehát lényeges felgyorsítható. Ennek feltétele csak az, hogy a humán tőke netán felessé váló többletét exportálva, az ezért kapott ellenértéket a vállalatokba fektessük.[8] De még ha csak az anyagi tőke 0,6 egységét fordítjuk kapacitásbővítésre, ez akkor is több mint 6 százalékos lesz.

Függetlenül attól, hogy az ilyen gazdasági tevékenységet, vagyis stratégiát jónak vagy rossznak ítéljük meg, avagy kihatásait mérlegelve határozatlanná válunk, a hosszú távú egyensúlyi ráta nemcsak elméletileg, hanem gyakorlatilag is meghaladható. Ez azonban azzal jár, hogy a gazdaság módosítja pályáját. A tárgyalt megoldás alaposabb mérlegelése megkívánná, hogy a zárt rendszert kinyitva a modellt kiterjesszük a külkereskedelem, tehát legalábbis két nyílt rendszer együttműködésére. Ilyen modelleket ismertet Leontief idézett műve, de a kérdés további tárgyalása messze vezetne. Meg kellene ugyanis határozni, hogy mit értsünk két, egymással cserét folytató rendszer egyensúlyán, ha e két rendszer termelése és növekedési rátája eltér egymástól. Sőt, meg kellene mutatni, hogy vélhetően ciklikus termelésük hogyan hat egymásra. Ezért csak a zárt rendszer egyensúlyára korlátozódtunk, ahol célunk csak annak bizonyítása volt, hogy az ütem gyorsítása mindig arányváltozással jár. Hozzá kell tenni, hogy ez a pályamódosítás, a gyakorlatban is érzékelhető módon, mindig a háztartások kárára, ugyanakkor pedig a vállalatok és az állami költségvetés javára történik.

A rendszermátrix

Az (1) egyenletet kissé átrendezve az

$$(\mathbf{A} + \lambda\mathbf{B})\mathbf{x} = \mathbf{x} \tag{3}$$

alakot kapjuk. Ez $\lambda = 0$ esetén ekvivalens Marx első, egyszerű újratermelési sémájával,[9] ez esetben Sraffa önhelyreállító gazdaságának is tekinthető. A növekedést leíró modellként, pozitív növekedési rátával már felmerül Leontief idézett művében.[10] Ez a legegyszerűbb és a legkönnyebben áttekinthető forma a gazdasági növekedés több más, ismert elgondolásával áll szoros kapcsolatban.

A következőkben adom meg a előbbi Leontief-modell alapján ugyanazon kiinduló adatokra támaszkodó számpéldá~~já~~t. Ez egyszerre mutatja be az egységnyi árak miatt éppen száz százalékra összegeződő oszlopokat és a modell egyensúlyi arányait is. Utóbbiakban Ricardo standard termékhalmazát ismerhetjük fel. Ennek a standard halmaznak az a tulajdonsága, hogy termelésének arányai megegyeznek a termékek előállításához szükséges tőke arányaival. Az árváltozás ezért nem változtatja meg a gazdaság tőkeigényét, ahogy a többlettermék arányainak változása vagy eltolódása sem változtathatja meg a profitrátát. A ráta szabatos kiszámításához elégséges az, ha valamelyik (akár a bal oldal, akár a jobb oldal, akár az árak, akár a mennyiségek) vektora a megfelelő sajátvektor arányait tükrözi.[11]

[8] Ilyen cseréket régóta bonyolítunk. A humán tőke jól jövedelmező exportját a tervező rendszer állami monopóliumai intézték. Ezek forgalmát összegezve pontosabban is megismerhető a „humán export" alakulása. Európához csatlakozva ez a jövőben növekedni fog. Minden jel arra mutat, hogy ez a terület az orvosok, pedagógusok, menedzserek külföldi munkavállalásától a lány- és csecsemőkereskedelemig, sőt a humán szervek forgalmáig bővülőben van, ennek minden jó és rossz következményével együtt.

[9] Első ötszektoros változatát lásd *Marx* [1953] 345. o. Marx alapgondolata hasonlít a Markov-láncok következőkben leírt „átmenetvalószínűségi" mátrixának elméletéhez is.

[10] I. m. 59. o. 4. lábjegyzet. Az 58. oldal hivatkozik a zárt statikus input-output modellre is (*Leontief* [1951]).

[11] A nyeregfelület szintvonalai az úgynevezett Neumann-sugarak mentén konstans értéket vesznek fel. Ez

$$\mathbf{Cx} = (\mathbf{A} + \lambda\mathbf{B})\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}3\dot{6} & 0{,}2\dot{6} \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}\dot{3} & 0{,}5\dot{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \mathbf{x}.$$

Az egységnyire összegződő oszlopok ugyanakkor valószínűségi eloszlásoknak is tekinthetők. Ekkor úgynevezett stochasztikus mátrixszal van dolgunk, ahol a mátrix elemei az egyik állapotból (szektorból) a másik állapotba (szektorba) való átmenet valószínűségét adják meg.[12] Ebben az esetben biztosra vehető a mátrix segítségével leírható véges állapotú Markov-folyamat konvergenciája a stacioner $[3/6\ 1/6\ 2/6]'$ eloszláshoz. Ez egy ergodikus folyamat stacioner állapotának valószínűségi eloszlása.[13] A ráfordítás együtthatói tehát várható értékként is felfoghatók. Ez jelentősen enyhíti azt az elméleti gondot, amit az együtthatók köztudomású bizonytalansága és ingadozása okoz. A stacioner állapot szórása természetesen függ az együtthatók lehetséges szórásának mértékétől, de várható értéke csak az együtthatók várható értékétől függ. Ez azért van, mert a független valószínűségi változókkal végzett lineáris műveletek mind a várható értékek, mind pedig a szórásnégyzeteket azonosan változtatják meg. (A szórásnégyzetek összeadása vezet aztán ahhoz a fontos eredményhez, hogy az eredmény szórása az n számú változó négyzetgyökének arányában csökken).

Az igazi konvergencia azonban a gyakorlatban mégsem mindig érvényesül. A mátrix együtthatói a folyó és a tőkeráfordítások együtthatóinak keverékéből állnak, ezeket λ, a csak pontatlanul megismerhető növekedési ráta köti össze. A ráta persze a kiinduló mátrixok ismeretében elméletileg pontosan számítható, a gyakorlatban azonban mégis bizonytalan nagyság. Ez a tőkefajták pontosabb leírásának elméleti gondjaiból és statisztikai mérés gyakorlati nehézségeiből ered. De akár nagyobb, akár kisebb a becsült érték a ténylegesnél, a folyamat divergál. Ezt bizonyítottuk be annak idején. Márpedig a pontos ráta közvetlenül nem figyelhető meg, ráadásul folytonosan változik.

A forma a tervhivatal és az árhivatal által végzett iteratív számítások modellje. A $\mathbf{C}$ mátrix a gazdasági rendszer pozitív strukturális/technikai arányait leíró táblázat. Az adatok az árukapcsolatok egyszerű statisztikai megfigyelésén alapulnak.[14] A $\mathbf{p}'_{k+1} = \mathbf{p}'_k\mathbf{C}$ árszámítási és az $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{Cx}_k$ mérlegkészítési eljárás a tervgazdálkodás két alapvető tervezési módját írta le.[15] De ez a modell sem a gazdaság tényleges vagy kívánatos mozgása, csak hasznos, bár gyakorlatilag elégtelennek bizonyult utópikus konstrukció. Ez a forma azonban mégis jobban közelít a logikailag helyesen elgondolt, habár rosszul alkalmazott tervezési eljárásokat. Végső tendenciája a gyakorlatban ugyanis félrevezetőnek bizonyult.

---

a konstans érték éppen a maximális növekedés és minimális kamatráta találkozásának „fixpontja”. Ez azonban nemcsak fixpont, hanem a fázistér egy jól meghatározott halmaza is.

[12] Ez a folyamat tehát elképzelhető a fizetések áramlatainak a felhasznált termékek és szolgáltatások áramlataival ellentétes irányban lefolyó és ezekkel egyenértékű áramlataiként is.

[13] Ehhez hasonló folyamat játszódott le Magyarországon 1957 folyamán, amikor terv és profitérdekeltség átmeneti hiánya miatt a termelést csak a megszokott arányok követése mozgatta. A gazdaság ennek ellenére (vagy talán éppen ezért) kielégítően helyreállt, s nyugalmából csak a később „tervszerűen” megindított új 12 éves beruházási ciklus mozdította ki.

[14] Első gyakorlati alakja a Szovjetunió Popov által szerkesztett „sakktáblamérlege” (*Popov* [1926]).

[15] Ezeket a számításokat sajnos egymástól elszakítva és más-más rendszerben, két egymással torzsalkodó hivatal végezte el, amivel persze mindkét számítás egyensúlya még kérdésesebbé vált. Ráadásul az ismert növekedési prioritások (amelyek részletesebben a szolgáltatások visszaszorítását, az ipar, és főként a hadiipar lehető leggyorsabb fejlesztését írták elő) még tovább rontották az ésszerű gazdaságpolitika esélyeit.

Igaz, ez nem vezethet végül negatívvá váló pályához, mint az (1) egyenlet, de a tervezés során az iteráció, ha **C** legnagyobb sajátértéke nagyobb egynél, akkor a végtelen, ha kisebb egynél, akkor a zérus felé divergál.

A számításba beépíthető negatív visszacsatolás (például az állandó „normálás”, vagyis az árak vagy mennyiségek összegének konstanssá tétele) konvergenssé változtatja a számítást, és el is vezethet az elméleti egyensúlyhoz. A valóságos piacokon azonban erősen pozitív a visszahatás, ez pedig fokozza a gyakorlati eltéréseket. Ha például valamely gazdaság gyorsabban növekszik a vártnál, azaz $\mathbf{x}_{k+1} > \mathbf{x}_k$, akkor a tervező fellendülést észlel. Ilyenkor azt hiszi, hogy a felhalmozás üteme tovább növelhető, holott éppen mérsékelnie kellene. Ha pedig lassulásra vagy csökkenésre következtet, mert $\mathbf{x}_{k+1} < \mathbf{x}_k$, akkor további visszaeséstől félve, még óvatosabbá válik, holott éppen az ellenkező irányban keresendő az igazi egyensúly. Röviden szólva: a modell a számítógépen konvergens (pontosabban kifejezve: konvergenssé tehető), de a gyakorlatban nem, mert a piac más erőknek engedelmeskedik. Az általános túltermelés, amire mind a piaci, mind pedig a tervezett gazdaság hajlamosnak bizonyul, eleinte túlkeresletet, vagyis hiányokat, egyre erősebben botladozó ellátást okoz. Ha ezt a termelés ütemének fokozásával próbálják meg kielégíteni, akkor még jobban kimélyítik a megindult ciklust. A kereslet hiányát viszont nem a termelési ütem növelésével, hanem csökkentésével szokták kiküszöbölni. Ezt a csapdát az eddig ismeretes szabályozó rendszerek nem tudták elkerülni. Ezért is ingadoznak a gazdaságok mindig és mindenütt. A növekedési ütem a gazdasági rendszertől függetlenül a világ minden országában bizonytalan, szórása pedig általában meghaladja várható értékét.

Mindezeket a hibákat csak akkor lennénk képesek kiküszöbölni, ha egyetlen gazdasági ágens sem lenne különösen érdekelt a profit vagy növekedés alakulásában. Ez csak akkor lehetne így, ha a munka önmagában és önmagáért való elvégzése, tehát magának a munkának a szeretete és öröme mozgatná a gazdaságot, nem pedig a gazdagodni vágyás. A közfelfogás ilyen változása (eltekintve attól, hogy nem látszik kikényszeríthetőnek), viszont csökkenthetné a műszaki-technikai haladást, háttérbe szorítva a versenyt a munka nyugalmas, szép és kellemes elvégzéséhez nélkülözhetetlen együttműködéssel szemben.

Az eszközinverz

Leontief alapmodellje az (1) egyenlet másféle átrendezésével is megoldható. A szokásos és fentebb leírt inverz hatványsorához hasonlóan a lekötött tőke együtthatóinak **B** mátrixából is képezhetünk végtelen hatványsort a növekedési ráta segítségével

$$\mathbf{R} = (\mathbf{1} - \lambda\mathbf{B})^{-1} = 1 + \lambda\mathbf{B} + \lambda^2\mathbf{B}^2 + \ldots + \lambda^n\mathbf{B}^n + \ldots \tag{4}$$

Ezt a hatványsort eszközinverznek nevezem. A sor mindig konvergens, mert $\lambda\mathbf{B}$ legnagyobb sajátértéke kisebb az egységnél. Közelítő értéke az input-output mérlegek és a nemzeti számvitel statisztikai adatai alapján becsülhető meg. Ezekben az egyensúlyi növekedési ráta néhány százalékos, a termelés közvetlen tőkeigényessége viszont átlagában három és öt év közt mozog. Szorzatuk, az akkumuláció vagy megtakarítás átlagos rátája mintegy 10 százalékos. Még ha ennél magasabb volna is, elvileg nem érheti el az egységnyi értéket, mert a többlettermék csak része, többnyire csak töredéke lehet a termelésnek. A modell többi adatához, az állam és a háztartások megtakarításainak és felhalmozásának jellemzésére többnyire becsléseket használtam. A nemzeti számvitel mutatja, hogy mindkét szektor megtakarítása és beruházása magas. Az adatgyűjtés ezekre a fontos területekre azonban még nem, vagy csak alig terjed ki.[16] Az mégis biztos, hogy a hatványsor összege véges, és a kapott mátrix pozitív.

Az **A** mátrix segítségével az egyensúlyi termelési mennyiségeket most az

$$\mathbf{RAx} = \mathbf{x} \tag{5}$$

egyenlet fejezi ki. Itt is egységnyi sajátértékű mátrixhoz érkeztünk. De a növekedési ráta az eszköz-inverz „belsejében” rejtőzködik. A szorzat egységnyi sajátértékét viszont mégis csak e ráta pontos megválasztása teszi lehetővé. Ez itt is csak a (2) egyenlet által felkínált értékeket veheti fel. Megfelelő hasonlósági transzformációval (ami csak a mértékegységek és az árak változtatását jelenti, és ezért mindig végrehajtható) sztochasztikussá tehető. A mátrixnak akár a sor-, akár az oszlopösszegei azonossá és egységnyi értékűvé transzformálhatók. A sorok összegei balról az egyensúlyi termelés **x** vektorából képzett diagonális mátrixszal (és jobbról ennek inverzével) megszorozva egységnyi értékűvé válnak. Az oszlopösszegek egységnyi értékét pedig az egyensúlyi önköltségből képzett diagonális mátrix (és ennek inverze) segítségével végzett transzformáció teszi egységnyivé.

Itt is a két mátrix fordított sorrendben végzett szorzása adja meg az egyensúlyi árakat meghatározó mátrixot, amelynek egyenlete e megoldás szerint

$$\mathbf{p}'\mathbf{AR} = \mathbf{p}'. \tag{6}$$

Ez az utóbbi forma világosan rámutat az **R** mátrix értelmére és feladatára. A $\mathbf{p}'\mathbf{A}$ szorzat a termelés önköltségét adja meg, egyensúlyi árakon mérve. Az önköltség nem más, mint a $\mathbf{p} - \mathbf{m}$ vektor, a költségeknek az értéktöbblet hozzáadása előtti aránya. Az **R** mátrix tehát „felszorozza” az önköltségeket a piaci árak szintjére, hozzáadva mindazon tőkék sorozatának profitját, amelyek szükségesek voltak az adott termékek előállításához.[17] Az **AR** mátrix jobb oldali sajátvektorát az egyensúlyi termelésből történő közvetlen ráfordítások vektora adja meg.

Az **RA** mátrix tehát a közvetlen ráfordítások mennyiségeit alakítja át teljes termeléssé. Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$ vektor a folyó ráfordítás. Ez az „outputhoz” szükséges „input”, különbségük az **y** többlettermék. Mivel $\mathbf{R(x - y)} = \mathbf{x}$, ebből következik, hogy $(\mathbf{R} - \mathbf{1})\mathbf{x} = \mathbf{Ry}$. Az $\mathbf{R} - \mathbf{1} = \lambda\mathbf{BR} = \lambda\mathbf{RB}$ mátrix (a $\lambda\mathbf{B}$ mátrix nyilván azonosan hat a belőle készült hatványsorra, akár jobbról, akár balról szorozzuk vele) a $\lambda\mathbf{B}$ mátrix végtelen hatványsorának összege, azaz

$$\mathbf{R} - 1 = \sum_{\mathbf{k}=1}^{\mathbf{k}=\infty} \lambda^{\mathbf{k}}\mathbf{B}^{\mathbf{k}}. \tag{7}$$

Ez a végtelen sor írja le az egyensúlyi pályán növekvő gazdasági rendszer kapacitásbővítéseinek időbeli menetét. Ilyen értelemben hasonlít a teljes folyó ráfordítás végtelen sorához, amely a folyó **A** ráfordítást, az ennek előállításához szükséges $\mathbf{A}^2$ ráfordítást és a további, egyre csökkenő, végtelen, de korlátos értékű sort határozza meg.

[16] Még arra is nehezen tudnék kimerítően válaszolni, hogy az egyelőre csak becsült adatoknak például tartalmazniuk kellene-e az állami stratégiai tartalékok vagy a fegyverek arzenáljának költségét, s netán a tudás megszerzéséhez szükséges időráfordítás (azaz maga a tanulási idő) beletartozik-e a számbavételbe (szerintem igen). Csak remélni lehet, hogy a becslések nagyságrendileg elfogadhatók maradnak, ha végre e kérdésekre is több figyelmet fordítunk.

[17] Nem véletlen, hogy a tervgazdálkodás e téren követte el legnagyobb vétkeit a gazdaság normális, célszerű és egészséges növekedése ellen. Itt büntette (és bünteti ma is), amit luxusfogyasztásnak vél, itt nyomja el és hozza hátrányos helyzetbe (és teszi ezt még ma is) mindazt, amit valamilyen ideológia alapján nem tekint hasznosnak. Ez az a terület, ahol egykor az árképzés, ma pedig az adóztatás a szabályozás orgiáit váltja ki. Mai gazdaságunkban itt került feloldhatatlan ellentétbe a piac általában vallott szabadságát kinyilvánító általános beszéd a piac működésére húzott különböző kényszerzubbonyokkal.

A gazdaság azonban egyetlen pillanatban, héten, hónapban vagy évben sincs teljes egyensúlyban. A bővítés menete, a tőkék akkumulációja általában még a folyó ráfordításoknál is jóval erősebben ingadozik. Mégis fontos rámutatni, hogy mennyire eltér egymástól az anyagi és humán kapacitások bővülésének menete még az egyensúlyi növekedés sima pályáján is. Tényleges alakulásukra persze a ciklusok befolyásán kívül még a technika, tehát a tőkeigényesség és a mindenkori gazdasági struktúra változása is hat.

Tudjuk, hogy a fejlett országok fejlettségüket elsősorban annak köszönhetik, hogy a felhalmozás folyamatában a humán tőke növekedése a döntő. Több emberi, mint tárgyi tőkét gyűjtünk össze, és e tőkét általában sokkal hosszabban működtetjük. De még az is elkerülte eddig a figyelmet, hogy e két felhalmozási folyamat közt fontos eltérések tapasztalhatók. Ezeket a különbségeket Leontief modellje nem is tükrözi, mert egyszerű és elvonatkoztatott formája ezt nem teszi lehetővé.

Az újratermelés eddig ismert modelljei egyébként is mindig csak a tárgyi eszközök használatát vették figyelembe. A különbség pedig éppen abból ered, hogy a felhalmozás másképp alakul a termelés e két területén. Míg a tárgyi-anyagi tőke viszonylag gyorsan bővíthető, sőt ez a gyorsaság a technika fejlődésével fokozható, addig az emberi tőke bővítésének a természet világos korlátokat szab. A felhalmozás folyamatára itt biológiai összefüggések hatnak, és ezek nem könnyen befolyásolhatók. Hogy világos példát említsek: az 50-100 évig szolgáló lakóépület vagy műhelycsarnok ma néhány hónap vagy néhány év alatt felépíthető. Létrehozásának időtartama rövid és rövidíthető. Az ugyancsak 50-100 évig élő ember megszületéséhez, neveléséhez, feje tudással való megtöltéséhez ennél jelentősen hosszabb időtartam szükséges. A kihordási idő 9 hónap, ez meg nem kurtítható, iskolai tanulás 5-6 éves korban kezdhető, és 10-20 évig is eltarthat. A tudás nem tölthető tölcsérrel a fejbe, ahhoz nemcsak a tanár, hanem a diák munkája, sőt jó együttműködése kell. Valószínű hát, hogy a bővített újratermelés matematikai modelljeit előbb-utóbb megfelelően át kell alakítanunk, hogy ezt az egyre lényegesebbé váló minőségi és nagyságrendi különbséget képesek legyenek helyesen befogadni.

Összefoglalás

Bár mindhárom módszer oksági viszonyt leíró (kauzális) differenciálegyenletből ered, ezek mégsem igazi mozgásegyenletek, tehát nem a gazdaság mozgását leíró, annak ingadozását követő és leíró modellek. Felhasználhatók azonban az egyensúlyi növekedés pályájának elméleti meghatározására. Az elemzés és tájékozódás megbízhatósága természetesen függ a statisztikai megfigyelés mindenkori teljességétől, minőségétől és pontosságától. Az eddig csak mikrogazdasági (vállalati adatokon nyugvó) input-output ábrázolást tanulmányomban megpróbáltam a nemzetgazdaság teljes egészére kiterjeszteni (a nemzeti elszámolás adatainak felhasználásával, illetve a még hiányzó adatok becslésével). Bár a továbbhaladás ezen az úton fáradságosnak és nehéznek ígérkezik, a fent összefoglalt megoldások, értelmezések és elemzési lehetőségek indokolják a két szemlélet (az input-output módszer és a nemzeti számlák rendszere) lehető teljes összekapcsolását és kidolgozását. Statisztikai hivatalunk határozottan erre az útra lépett, és ezzel (mint annak idején a 19. század végén) ismét a társadalmi számvetés nemzetközileg elismert és figyelembe vett megújító műhelyévé válhat.

Ami a kimutatott gyakorlati tendenciákat illeti, amelyek az utóbbi idők társadalmaiban nemcsak nálunk, hanem minden országban megnyilvánulnak, a profit vagy a növekedés kergetése mindenütt a vállalatok és az államapparátus bővítése felé tereli a gazdaságot. A háztartások jövedelme és vagyona csak lassan, a vállalatoké gyorsabban növekszik, s az igazi sikerágazat mindenütt az állami tevékenység, amely mindkettejüknél lényegesen gyorsabban bővül. Hajlok arra, hogy ezt a mindenütt kimutatható statisztikai tendenciát részben a jelen vizsgálat fényében, részben tudva azt, hogy ez a fajta egyenlőtlenség nem mindig és mindenütt jelentkezett a korábbi társadalmakban, ne tartsam a „dolgok természetes rendjének”.

Mindez megerősíti bennem a gyanút, hogy korunk piaci és tervezett gazdaságai egyaránt téves irányba tartottak és tartanak. A beszámolóban említett adatoknak nemcsak mértékét és változását hanyagolják el, hanem fejlődésüket sem figyelik meg jól, s ezért valószínűleg fejlesztésüket sem erőltetik, vagy nem kellő mértékben gyakorolják. Maga a „kellő mérték” fogalma sem alakulhatott ki. Különösen élesen mutatkozik ez mostanában az úgynevezett jóléti rendszerek kiigazítása során. Magyarán: a mutatkozó gazdasági nehézségeket mindig és mindenütt a háztartások terhére, a kulturális, egészségügyi és oktatási kiadások kellően meg nem fontolt megszorításával hozzák „egyensúlyba”. Az egyensúlyt pedig azért tettem itt idézőjelbe, mert az a véleményem, hogy az így kialakuló növekedési pályák nem jelentenek igazi egyensúlyt. Korunkra kártékony, gazdaságilag, erkölcsileg és társadalmilag egyaránt elítélendő balfogások és kisiklások jellemzők.

Függelék

F1. táblázat

Az együtthatók nagyságrendje az ezredfordulón

Megnevezés	Folyó ráfordítás **A** mátrix			Tőkelekötés **B** mátrix (év)		
Vállalatok	0,6	0,2	0,2	3	5	2
Állam	0,1	0,3	0,2	0	0	0
Háztartások	0,2	0,3	0,2	0	1	10

Forrás: Bródy [2003].

A tőkelekötési mátrix második sora csupa zérus, mivel az állami szolgáltatást nem tekintettem felhalmozhatónak. Ezért a **B** mátrix itt szinguláris.

Az $(1 - \mathbf{A} - \lambda\mathbf{B})\mathbf{x} = 0$ általánosított sajátérték-feladat megoldása λ tekintetében a következő három értéket, azaz növekedési rátát adja: $1/30 = 0{,}03333\ldots$, $0{,}1614$ és végtelen. A végtelen értékhez tartozó sajátvektor egyben a $\mathbf{Bx} = 0$ homogén egyenlet megoldása. Ez a $[16\ -10\ 1]'$ értékekkel arányos vektorhoz tartozik. Gazdasági értelme szerint ez az állam által birtokolt erőforrásoknak a vállalatok és a háztartások által történő elsajátítása. Ugyanez negatív előjellel a vállalatok és a háztartások által használt eszközök államosítása. Feltűnő, hogy az állam kifosztása az egyensúlyi (egyenlő) árakkal számítva pozitív eredménnyel kecsegtet, az államosítás pedig ugyanekkora veszteséggel.

A tulajdoni állapot forradalma a növekedés végtelen lehetőségeivel kápráztat el. Az ezeknek megfelelő matematikai „árrendszer” ugyanis a $[0\ 1\ 0]$ értékeléshez vezet, vagyis csak az állami tevékenységet tekinti értékalkotónak, illetve a negatív előjel megválasztása esetén végletesen kártékonynak. Bár az értelmezés és a gyakorlati megoldás meghökkentő, de rámutat a megfelelő vektorok irányában történő elmozdulás és értékítélet végső, tehát az összefüggések logikájából folyó következményeire.

Hivatkozások

Bródy András [2003]: Arány, ütem és forma. A ciklusok alaktanához. Közgazdasági Szemle, 1. sz. 480–497. o.

Leontief, W. [1951]: The Structure of American Economy, 1919-1939. Oxford University Press, New York.

Leontief és szerzőtársai [1953]: Studies in the Structure of the American Exconomy. Oxford University Press, New York.

Marx, K. [1953]: Grundrisse der Kritik der Politischen Ökonomie. (Rohentwurf). Dietz Verlag. Berlin. A kézirat 1857–1858-ban készült.

Morishima, M. [1964]: Equilibrium, Stability and Growth. Clarendon Press, Oxford.

Neumann, G. [1955]: The Role of Mathematics in the Sciences and in Society. Megjelent: *Bródy Ferenc–Vámos Tibor* (szerk.): The Neumann Compendium. World Scientific Series. 640–653. o.)

Popov, P. I. [1926]: Balansz narodnovo hozjajsztva SZSZSZR 1923–1924 goda. TCSZU, Moszkva.

Rényi Alfréd–Bródy András [1956]: Az árrendezés problémája. A MTA Matematikai Kutatóintézetének Közleményei, 1. évf. 3. sz. 325–335. o.

Sraffa, P. [1975]: Áruk termelése áruk révén. Közgazdasági Jogi Könyvkiadó, Budapest.