Közgazdasági Szemle, LI. évf., 2004. március (218–234. o.)

JANECSKÓ BALÁZS

A Bázel II. belsõ minõsítésen alapuló módszerének közgazdasági-matematikai háttere és a granularitási korrekció elmélete

E cikk az új, feltehetõen 2007-ben életbe lépõ Bázel II. tõkeegyezményben a hitelkockázatok számszerûsítésére alkalmazott közgazdasági modellt és annak matematikai hátterét mutatja be. A modell olyan leegyszerûsítõ feltevéseket használ a csõdfolyamatok modellezésére (egyetlen közös makroökonómia faktor alakítja a csõdvalószínûségeket), illetve a portfólióbeli kintlevõségek nagyságának eloszlására (minden kintlevõség elhanyagolhatóan kicsi a teljes portfólió méretéhez képest), amelynek eredményeként a részportfóliókra (tehát akár egyetlen kintlevõségre is) a kockázati hozzájárulás kiszámolható pusztán a részportfólió kockázati jellemzõinek ismeretében is. A kockázati hozzájárulásokat a hitelezõ bankoknak szabályozói tõkével kell fedezniük, amely jelen modell esetében megegyezik az ügyletek közgazdasági tõkeszükségletével. A Bázel II. modell nagy elõnye tehát az, hogy egy konkrét adós adott ügyletének tõkekövetelménye csak az adós és az ügylet kockázati jellemzõitõl függ, tehát a tõkekövetelmény meghatározásához nem szükséges az ügyletet tartalmazó portfólió összetételének részletes ismerete. Ez a tény teszi lehetõvé, hogy egy alapvetõen portfóliószemléletû közgazdasági modellt általános (portfóliófüggetlen) tõkeképzési elvek meghatározására lehet felhasználni.

A cikk azt is vizsgálja, hogy a végtelen finom szemcsézettség kritériumának elvetése milyen esetekben okoz szignifikáns kockázatnövekedést, és hogyan lehetséges ilyen esetekben egyszerû eszközökkel meghatározni a prudens tõkekövetelményt. Ezt a portfólió koncentrációjától függõ, viszonylag egyszerûen kiszámítható tõkekövetelmény-növekedést nevezik granularitási korrekciónak. Homogén csõdkockázatú és eltérõ granularitású portfóliókra a korrekciós értékek táblázatos formában is szerepelnek.

Journal of Economic Literature (JEL) kód: C10, C60, G10, G11, G21, G28, G33.

E cikknek nem célja, hogy közgazdasági, pénzügyi, illetve banki-kockázatkezelési alapokon általánosságban bemutassa a Bázel II. tõkeegyezmény legfontosabb elveit (például három pillér, választható módszerek, kockázatkezelési folyamatok stb.), célkitûzéseit, leglényegesebb pontjait.[1] Az általános megállapítások helyett a Bázel II. új szabálytervezet mögöttes közgazdasági hátterét, modelljét fogom elemezni. Ez nem feltételezi a Bázel II. anyag részletes ismeretét, de az olvasó kvantitatív érdeklõdését igen.

[1] Az e témában tájékozódni vágyók számára ajánlom a Bázeli Bizottság honlapját (www.bis.org), ahonnan maga az új tõkeegyezmény tervezet is letölthetõ, továbbá a PSZÁF (www.pszaf.hu) Bázel II. oldalát, ahol nagyon hasznos útmutatók, magyar fordítások találhatóak, illetve hasznos linkek is elérhetõk, például az EU Bázel II. anyagot leképezõ direktíva tervezetéhez. A közelmúltban jelent meg egy nagyon jó összefoglaló cikkgyûjtemény is a témában: *Ong* [2004] szerkesztésében.

Janecskó Balázs a Raiffeisen Bank Integrált Kockázatelemzési Fõosztályának fõosztályvezetõje.

Egy bank hatékony és biztonságos mûködéséhez elengedhetetlen, hogy tõkeellátottsága közgazdasági értelemben megfelelõ legyen, és a tõkét tevékenységei között optimális módon allokálja. Egy bank tõkeellátottsága akkor mondható megfelelõnek, ha a tõkéje egy elõre meghatározott biztonsági szinten fedezi az éven belül (vagy egyéb idõtávon) várható maximális hitelezési veszteségeket [ez a hitelezési kockáztatott érték *(Credit Value at Risk)*].[2]

A biztonsági szintet például úgy lehet meghatározni, hogy a bank rögzíti a saját elérendõ hiteladós minõsítését (például a Moody's *Aa* minõsítését), és ezután megcélozza az ehhez a minõsítéshez tartozó vállalattúlélési valószínûséget (például 99,97 százalékot). Ilyen historikus alapú minõsítés–túlélési esély táblázatokat olvashatunk például az évente megjelenõ Moody's tanulmányban (*Moody's* [2001]).

A tõkeallokáció során meghatározhatjuk, hogy a bank tevékenységszegmensei (például üzletágai, régiói, a hitelek egyes iparági) milyen mértékben járulnak hozzá a teljes hitelkockázathoz (a tõkeallokációs problémát számos cikk tárgyalja, például *Hallerbach* [1999], *Tasche* [1999]), és így ki lehet alakítani a közgazdasági tõkeköltséget is figyelembe vevõ teljesítményértékelési rendszert. A hatékonyabb részterületek tevékenységének fokozásával maximalizálható a bank egészének hozzáadott gazdasági értéke (a tiszta profit).

Világos tehát, hogy egy bank hatékony mûködésének megteremtésében alapvetõ fontosságú a teljes banki portfólió kockázatának és az alportfóliók kockázati hozzájárulásainak meghatározása.

A portfóliószemléletû hitelkockázati modellek lényege abban áll, hogy egy részportfólió (tevékenység, üzletág) vagy akár egyetlen tetszõleges hitel kockázati hozzájárulása sem független az egész portfólió összetételétõl. Ennek egyszerûen az a magyarázata, hogy az egyes vállalatok csõdfolyamatai összefüggnek (korrelálnak) egymással. A korrelációkból következik az is, hogy a teljes portfólió kockázata általában kisebb, mint az egyedi kockázatok összege, azaz a portfólió kockázatában diverzifikációs hatás lép fel.

Az új Bázel II. Tõkeegyezmény (*Basel Committee on Banking Supervision* [2003]) a belsõ minõsítésen alapuló módszerében (*IRB Approach: Internal Ratings Based Approach*) az egyes ügyletek tõkeigényét egy kötelezõen alkalmazandó képlettel határozza meg, amelyben csak az adott ügylet és ügyfél kockázati paraméterei szerepelnek. Egy ilyen formula létezésébõl látszólag következik, hogy a mögöttes közgazdasági elmélet nem tükrözhet portfóliószemléletet, hiszen akkor egy adott ügylet tõkekövetelménye nem lehetne portfólióinvariáns, azaz független a portfóliót alkotó többi kintlevõség jellemzõitõl. A cikkben bemutatom, hogy e következtetés ellenére a belsõ minõsítésen alapuló módszer (IRB módszer) mögött ténylegesen egy egyszerûsített portfóliószemléletû hitelkockázat modellezés húzódik meg.

Az IRB módszer matematikája

Ebben a részben részletes levezetést adok a Bázel II. belsõ minõsítésen alapuló módszerénél alkalmazott ügyfélkockázati súly képletének meghatározására. Az IRB matematikai hátterével számos cikk foglalkozik (*Gordy* [2001], *Wilde* [2001]).

[2] A tõke a hitelezési veszteségeken felül még más kockázatokat is fedez, például a piaci és mûködési kockázatokból származó veszteségeket.

A teljes portfólión realizálódó veszteség a portfólióelemeken realizálódható veszteségek összegeként fejezhetõ ki:

$$L = \sum_A L_A I_A,$$

ahol I_A egy bináris kimenetû véletlen érték (az A adós csõdindikátor függvénye):

$$I_A = \begin{cases} 1, & \text{ha } A \text{ csõdbe kerül} \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases},$$

és L_A az A adós csõdje esetén realizálódó veszteség, azaz a kihelyezés mögé elhelyezett biztosítéki értékekkel korrigált veszteség értéke. A Bázel II. terminológiájában L_A a kockáztatott kihelyezés *(EAD, Exposure at Default)* és a fedezetlen kintlevõséghányadot megadó veszteségráta *(LGD, Loss Given Default)* szorzata (L_A = *EAD* × *LGD*).

Az L hitelkockázati veszteség tehát egy valószínûségi változó, statisztikai tulajdonságainak leírásához elsõ lépésben a két legelemibb jellemzõjét: a várható értékét és a szórását határozzuk meg.

Tegyük fel, hogy minden adósra meghatározható egy hosszú távú, átlagos (feltétel nélküli) csõdvalószínûség! Bizonyos adósminõsítési *(rating)* kategóriákban például historikus adatgyûjtés segítségével lehet elemezni az éves nemfizetési gyakoriságokat:

$$Pr(I_A = 1) = \overline{p}_A.$$

Bázel II. szóhasználatában ezt a hosszú távú nem teljesítési valószínûséget jelöli a *PD* (*Probability of Default*) rövidítés. Minimumkövetelmény, hogy legalább öt év historikus tapasztalatai alapján kell a Bázel II.-t alkalmazó bankoknak *PD*-t becsülni, tehát valóban hosszú távú, átlagos *PD* becslést kell alkalmazni.

Egy adott makroökonómia konjunkturális helyzetben a tényleges csõdgyakoriság eltér a hosszú távú átlagos értéktõl. Jelöljük a feltételes csõdvalószínûséget a következõ módon:

$$Pr(I_A = 1 \mid X) = p_A(X),$$

ahol X a csõdvalószínûséget befolyásoló tényezõk, faktorok véletlen vektorát jelöli. Bázel II. feltételezi, hogy a biztosítéki érték ingadozása nem függ a makrohelyzettõl, és még ennél is továbbmenve, hogy L_A és I_A független valószínûségi változók (ez lényegében a csõd és biztosítéki egyedi kockázatok függetlenségét is jelenti). Megjegyzem, hogy ez a leegyszerûsítés elvileg hibás és felesleges is, mivel a biztosítékok értéke egyrészt érzékeny a makrokörnyezetre – gondoljunk csak például az ingatlanpiaci árak alakulására –, másrészt a „csõd–fedezet korreláció” matematikailag könnyen kezelhetõ is lenne (lásd például *Burgisser–Kurth–Wagner* [1999], [2001], *Frey* [2000*a*], [2000*b*], *Janecskó* [2002]).

Az A adós csõdje esetén a keletkezõ veszteség várható értéke:

$$\mathrm{E}(L_A) = \overline{L}_A.$$

A teljes veszteség feltételes várható értéke, kihasználva tehát a biztosítéki értékek konjuktúrafüggetlenségét (azaz L_A és I_A függetlenségét), a következõképpen származtatható:

$$\mathrm{E}(L \mid X) = \mathrm{E}\left(\sum_A L_A I_A(X) \right) = \sum_A \mathrm{E}(L_A I_A(X)) = \sum_A \mathrm{E}(L_A)\mathrm{E}(I_A \mid X) = \sum_A \overline{L}_A p_A(X).$$

Röviden tehát:

$$\mathrm{E}(L \mid X) = \sum_A \bar{L}_A p_A(X).$$

A teljes veszteség feltételes szórásnégyzetének kiszámításakor kihasználjuk, hogy X ismeretében a csõdindikátor-függvények is függetlenek:

$$\sigma^2(L \mid X) = \sigma^2\left(\sum_A L_A I_A(X)\right) = \sum_A \sigma^2(L_A I_A(X)).$$

A szórásnégyzet definíciója szerint:

$$\sigma^2(L_A I_A(X)) = \mathrm{E}(L_A^2 I_A^2(X)) - \mathrm{E}^2(L_A I_A(X)).$$

Újrafelhasználva L_A és I_A függetlenségét, a négyzetes tag várható értéke a következõ levezetéssel adódik:

$$\mathrm{E}(L_A^2 I_A^2(X)) = \mathrm{E}(L_A^2)\mathrm{E}(I_A^2(X)) = \{\sigma^2(L_A) + \bar{L}_A^2\}[p_A(X) \times 1^2 + (1 - p_A(X)) \times 0^2].$$

A várható érték négyzete triviálisan számolható:

$$\mathrm{E}^2(L_A I_A(X)) = \mathrm{E}^2(L_A)\mathrm{E}^2(I_A \mid X) = \bar{L}_A^2 p_A^2(X).$$

Mindezen számítások alapján tehát a teljes veszteség feltételes szórásnégyzetére a következõ formula adódik:

$$\sigma^2(L \mid X) = \sum_A \bar{L}_A^2 \left\{ p_A(X)(1 - p_A(X)) + p_A(X) \underbrace{\left(\frac{\sigma(L_A)}{\bar{L}_A}\right)^2}_{\tilde{\sigma}^2(L_A)} \right\}.$$

Egy ismert valószínûségszámítási tétel szerint a feltétel nélküli veszteség szórásnégyzete felírható a feltételes szórásnégyzet várható értékének [ez a tag az idioszinkratikus (egyedi vagy diverzifikálható) kockázatokat képviseli] és a feltételes várható érték szórásnégyzetének összegeként (ez a tag a szisztematikus, nem diverzifikálható kockázatot jeleníti meg):

$$\sigma^2(L) = \underbrace{E[\sigma^2(L \mid X)]}_{\sigma^2_{DIV}} + \underbrace{\sigma^2(E(L \mid X))}_{\sigma^2_{SYS}}.$$

Ezen állítás matematikai bizonyítását lábjegyzetben adjuk meg.[3] Eddig a pontig tehát sikerült meghatároznunk a veszteség várható értékét és szórását.

Az egyedi kockázatok (aszimptotikusan) végtelenül finoman szemcsézett portfólióbeli diverzifikálódása viszonylag könnyen belátható (lásd *Burgisser–Kurth–Wagner* [2001] vagy *Wilde* [2001]), mivel a nem szisztematikus és a szisztematikus varianciák aránya a portfólió elemszámával fordítottan arányosan alakul (ui. $\sigma^2_{\mathrm{DIV}} \propto N$ és $\sigma^2_{\mathrm{SYS}} \propto N^2$). Az elhanyagolás pontos feltételeirõl a következõ fejezetben lesz szó. Emiatt lényegében a veszteség valószínûségi leírása teljes egészében a veszteség feltételes várható értékének (azaz a szisztematikus veszteség) vizsgálatával ragadható meg:[4]

[3] $\mathrm{E}[\sigma^2(L \mid X)] + \sigma^2(\mathrm{E}(L \mid X)) = E_X[E_L(L^2 \mid X) - E_L^2(L \mid X)] + E_X[E_L^2(L \mid X)] - E_X^2[E_L(L \mid X)] =$
$= E_X[E_L(L^2 \mid X)] - E_X^2[E_L(L \mid X)] = E(L^2) - E^2(L) = \sigma^2(L).$

[4] Pontosabban az látható, hogy a portfólióveszteség szórása megegyezik a feltételes várható érték szórásával. Ez még nem jelenti az eloszlások egyezõségét is, ugyanakkor belátható, hogy ez is teljesül. Ennek részletes levezetését például a *Gordy* [2001] cikkben olvashatjuk.

$$L \approx \mathrm{E}(L \mid X).$$

Ez tehát azt jelenti, hogy a veszteség valószínûségi jellege kizárólag a makrofaktor véletlenszerûségébõl fakad. Mivel a csõdvalószínûség a konjunktúrafaktor monoton csökkenõ függvénye, ezért a feltétel nélküli veszteség percentilisének meghatározásakor a következõ összefüggés alkalmazható:

$$\mathrm{VaR}_q(L) = \mathrm{VaR}_q(E(L \mid X)) = \mathrm{E}(L \mid \mathrm{VaR}_q(X)) = \sum_A \overline{L}_A p_A(\mathrm{VaR}_q(X)).$$

Ezzel a q biztonsági szinten meghatározott közgazdasági (és egyben szabályozói) tõkeigényt felírtuk az egyes adósokra vonatkozó tõkeigények összegeként. Külön is kiírható tehát az A adós szisztematikus kockázati hozzájárulása:

$$S_A = \overline{L}_A p_A(\mathrm{VaR}_q(X)).$$

Látható, hogy a tõkekövetelmény a csõd esetén várható veszteség (*EAD* × *LGD*) és egy ügyfélkockázati súly szorzataként áll tehát elõ. A Bázel II. tervezetben a kockázati súly *(RW, risk weight)* ezen ügyfélkockázati súly 8 százalékkal osztott értéke, mivel a szabályozói logikában (Bázel I. hagyományai alapján) a tõkekövetelmény a kockázattal súlyozott eszközérték 8 százaléka. A kockázati súlyt tehát a következõ képlet határozza meg:

$$\mathrm{RW}_A = 12.5 \times p_A(\mathrm{VaR}_q(X)).$$

Ezen a ponton a továbblépéshez a feltételes csõdvalószínûség képletét kell kibontanunk. A Bázel II. modellben feltételezik, hogy az X makrofaktor standard normális eloszlást követ, és az A adós fizetési képesség folyamata (amelyet y_A-val jelölünk) $\sqrt{\rho_A}$ értékben korrelál X-szel, és szintén standard normális eloszlást követ:

$$y_A = \sqrt{\rho_A} X + \sqrt{1 - \rho_A} \varepsilon.$$

Szokás a fizetési képesség folyamata helyett az A adós vállalati eszközérték folyamatáról beszélni (*Gupton–Finger–Bhatia* [1997]). A modell szerint ha a fizetési képesség (az eszközérték) egy bizonyos küszöbérték (az idegen források értéke) alá esik, akkor az adós csõdbe jut. A küszöbértéket a hosszú távú (átlagos) feltétel nélküli csõdvalószínûség alapján lehet meghatározni:

$$Pr(y_A < K) = \overline{p}_A.$$

Mivel a fizetési képesség folyamata standard normális eloszlású, ezért a K küszöbérték kifejezhetõ az inverz kumulatív standard eloszlásfüggvény segítségével:

$$K = \Phi^{-1}(\overline{p}_A).$$

Egy konkrét makrofaktor-realizáció esetén a fizetõképességi folyamatot már csak az ε egyedi véletlen (idioszinkratikus vagy szerencse) faktor alakítja, amelynek eloszlása szintén standard normális, és természetesen független a szisztematikus faktortól. Tehát egy konkrét makrokörnyezetben a csõd akkor következik be, ha az egyedi faktor ingadozása a fizetõképességi értéket a csõdküszöb alá téríti. Ennek alapján a feltételes csõdvalószínûség levezetése a következõ lesz:

$$p_A(X) = Pr(y_A(X) < K) = Pr\left(\sqrt{\rho_A} X + \sqrt{1 - \rho_A} \varepsilon < \Phi^{-1}(\overline{p}_A)\right) =$$

$$= Pr\left(\varepsilon < \frac{\Phi^{-1}(\overline{p}_A) - \sqrt{\rho_A} X}{\sqrt{1 - \rho_A}}\right),$$

és mivel ε standard normális eloszlású, ezért a jobb szélsõ valószínûség felírható a kumulatív standard normális eloszlás segítségével:

$$p_A(X) = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(\bar{p}_A) - \sqrt{\rho_A}X}{\sqrt{1-\rho_A}}\right).$$

A konjunktúramutató magas értékei esetén a képletbõl jól látható, hogy csökken a csõd valószínûsége. Korábban láttuk, hogy a Bázel II. kockázati súlyfüggvénye lényegében egy magas q biztonsággal a maximális csõdvalószínûség értékre van beállítva. A makrofaktor percentilisét szintén az inverz standard normális eloszlásból számolhatjuk ki:

$$\mathrm{VaR}_q(X) = \Phi^{-1}(1-q).$$

Mindezeket felhasználva a fedezetlen kintlevõség (LGD × EAD) százalékában kifejezett tõkekövetelmény (*CR, Capital Requirement*) matematikai formulája a következõképpen számolható:

$$CR_A = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(\bar{p}_A) - \sqrt{\rho_A}\Phi^{-1}(1-q)}{\sqrt{1-\rho_A}}\right).$$

A bázeli ajánlás a q biztonsági szintet egységesen (minden ügyfélre) 99,9 százalékos értékre állítja be. Érdekes, hogy ezzel a szabályozás lényegében a bankok kockázatosságát egységesíti, hiszen a fenti szabályok szerint képzett tõkével rendelkezõ bankok csõdvalószínûsége egységesen 0,1 százalék lenne. Nyilván a bankok kockázatossága közötti különbséget az okozhatja, ha a jogszabályi minimumnál több tõkét képeznek.

A bázeli tervezetben a fizetõképességi (vagy eszközérték) folyamat leírásában alkalmazott korreláció értéke általában nem állandó, hanem függ a becsült feltétel nélküli $\bar{p}_A$ csõdvalószínûség értékétõl.[5] A korreláció, amely a szisztematikus kockázatnak való kitettséget kvantifikálja eltérõ a különbözõ ügyféltípusoknál. Például nagyvállalatokra 24 százalékról 12 százalékra csökkenhet a csõdvalószínûség 0 százalékról 100 százalékra növelése során. Ez azt jelenti, hogy a hosszú távú csõdvalószínûség romlása a makrogazdasági helyzetre való érzékenységet csökkenti, tehát Bázel II. feltételezése szerint a nagyon jó adósminõsítést szerzett cégek érzékenyebben reagálnak a konjunkturális ingadozásokra, mint a rosszabb besorolású vállalatok. A *PD* növekedése okozta tõkekövetelmény-növekedést tehát bizonyos mértékben a szisztematikus kockázati faktorra vonatkozó korrelációs tényezõ csökkenése kompenzálja (egy dekonjunkturális helyzetben ez éppenséggel a szabályozás prociklikusságát tompíthatja). A kis- és közepes vállalatok esetén (ahol az éves árbevétel 50 millió euró alatt marad) a korrelációs tényezõ értékét még

[5] A korrelációs függvény bázeli alakja leginkább politikai alkufolyamat, mintsem tudományos megfontolások eredménye, bár bizonyos kvalitatív érvelés hozzárendelhetõ. A bázeli korrelációs értékek valójában egy nagyságrenddel nagyobbak az empirikusan mérhetõ értékeknél (lásd *Hamerle–Liebig–Rösch* [2003]). A legáltalánosabb, vállalati méretkorrekciót is tartalmazó felírás a következõ: $\rho = \rho_1 \frac{1-e^{-50\bar{p}}}{1-e^{-50}} + \rho_2\left(1-\frac{1-e^{-50\bar{p}}}{1-e^{-50}}\right) - 0{,}04\left(1-\frac{\min(50,\max(5,S))-5}{45}\right)$, ahol S a vállalat éves árbevétele millió euróban megadva és ρ_1, ρ_2 a lehetséges korrelációs tartomány végpontjai. A képlet nagyon pontos közelítéssel a következõ egyszerûbb alakban is felírható: $\rho \approx \rho_1 + (\rho_2 - \rho_1)e^{-50\bar{p}} - 0{,}04\left(1-\frac{\min(50,\max(5,S))-5}{45}\right)$. A kis- és középvállalati szegmensben a nagyvállalatokhoz képest az elérhetõ legnagyobb vállalatméret alapú korrelációredukció mértéke tehát 4 százalék.

a vállalat mérete is befolyásolja. A korrelációs tényezõ kiigazítására (csökkentésére) az 5 millió euró árbevételküszöbig van lehetõség, további árbevétel-csökkenés már nem vehetõ figyelembe a korrelációs faktor csökkentésében. A küszöbértéknél ρ_A 20 százalékról maximum 8 százalékig tud lecsökkenni a csõdvalószínûség emelkedésével. A lakossági jelzáloghitelek esetében konstans 15 százalékos korrelációs értéket helyettesítenek a kockázati súlyfüggvénybe. A megújuló lakossági hitelek esetén 11 százalék és 2 százalék, az egyéb lakossági hiteleknél, például a személyi kölcsönöknél 17 százalék és 2 százalék közötti értéket vehet fel a korreláció. Érdekességként itt még újra kiemelném, hogy a fizetésiképesség-folyamat és a szisztematikus faktor közötti tényleges korreláció e most megadott korrelációs paraméterek négyzetgyökeként adódik (például a 24 százalékos nagyvállalati felsõ küszöb valójában $\sqrt{24\%} = 49\%$-os eszközérték-makrofaktor korrelációt takar!).

Összefoglalva: tehát a kockázati súlyfüggvény az adós (feltétel nélküli) csõdvalószínûségétõl, a biztonsági szinttõl és a makroérzékenységét mérõ korrelációs faktortól függ. Ezen túlmenõen a bázeli szabályozásban még egy paraméter: a kintlevõség futamideje is szerepel, ennek bevezetése azonban nem modellen, hanem empirikus, *ad hoc* érték beállításán alapul (alapesetnek a 2,5 éves lejáratot feltételezik). A tõkekövetelmény lejárati idõ szerinti alakulását részletesen *Kalkbrener–Overbeck* [2002] vizsgálták.

Szisztematikus *versus* egyedi kockázatok

Az egyedi kockázat elhanyagolása a kockázat alulbecsléséhez vezet, ezért fontos pontosan is megvizsgálni, hogy melyek az elhanyagolás lényeges kritériumai. A tõkeegyezmény második konzultációs anyagában még szerepelt az úgynevezett granularitási korrekciós tag, amellyel éppen az elhanyagolás okozta hibát próbálták korrigálni. Érdekes, hogy a harmadik konzultációs anyagban a korrekciós tag alkalmazásának követelménye már nem jelenik meg. Ennek okaként leginkább a korrekciós képlet bonyolultságára szoktak hivatkozni. Az Egyesült Államokban a korrekciós tag alkalmazása azonban továbbra is kötelezõ marad.

A következõ számítások segítségével megvizsgáljuk a nem szisztematikus kockázat diverzifikálódásának feltételeit. Elöszõr az elõzõ pontban már felírt egyedi varianciát számoljuk végig:

$$\sigma^2_{\mathrm{DIV}} = \mathrm{E}[\sigma^2(L \mid X)] = \mathrm{E}\left[\sum_A \bar{L}_A^{\,2}\{p_A(X)(1-p_A(X)) + p_A(X)\tilde{\sigma}^2(L_A)\}\right]$$

$$= \sum_A \bar{L}_A^{\,2}\mathrm{E}\{p_A(X) - p_A^2(X) + p_A(X)\tilde{\sigma}^2(L_A)^2\} = \sum_A \bar{L}_A^{\,2}\{\bar{p}_A(1+\tilde{\sigma}^2(L_A) - \bar{p}_A) - \sigma^2(p_A)\}.$$

Második lépésben a szisztematikus varianciát fejtjük ki részletesebben:

$$\sigma^2_{\mathrm{SYS}} = \sigma^2(\mathrm{E}(L \mid X)) = \sigma^2\left(\sum_A \bar{L}_A p_A(X)\right) = \sum_A \sum_B \bar{L}_A \bar{L}_B COV(p_A, p_B).$$

Ha N jelöli a portfólió elemszámát (azaz az adósok számát), akkor a részletes felírásokból látszik, hogy az egyedi variancia valóban (egyszeres összegzésként) N-nel, míg a szisztematikus szórásnégyzet (a kettõs összegzõ formula miatt) N^2 -tel arányos. Ha tehát N tetszõlegesen nagy lehetne, akkor biztos, hogy a kifejezésekben szereplõ konstansoktól függetlenül az idioszinkratikus tag elhanyagolhatóvá válna. A valóságos portfóliókban természetesen az elemszám nem végtelen nagy, ezért szükséges az szummákban szereplõ konstansok vizsgálata is.

Bár tudjuk, hogy a portfólión keletkezõ teljes veszteség szórása önmagában nem jó kockázati mérték, de a késõbbiekben kiderül, hogy bizonyos feltételezések mellett felhasználhatjuk szofisztikált kockázati mértékek becslésére is. Ezen túl Bázel II. követelmény is, hogy a megújuló lakossági termékek esetében (hitelkártya, folyószámlahitel) a bankoknak meg kell becsülniük a szórást, ugyanis bizonyos tõkekövetelmény-kedvezmények igénybevételéhez (ez maximum a várható veszteség 75 százaléka lehet) igazolni kell, hogy a jövõbeli kockázati felárból származó bevétel (*FMI, Future Margin Income*) több mint kétszer a veszteség szórásával meghaladja a várható veszteséget. E fejezetben „receptet” adunk a szórás Bázel II. konzisztens meghatározására.

A második képletbõl jól látható, hogy a szisztematikus kockázat lényegében a csõdvalószínûségek kovarianciájából fakad, tehát abból, hogy a szisztematikus kockázati faktorra a csõdvalószínûségek összefüggõ módon reagálnak. A következõekben kiszámoljuk a kovarianciákat az eddig megismert egyfaktoros CreditMetrics (*Gupton–Finger–Bhatia* [1997]), továbbá az egyfaktoros CreditRisk+ (CR+) modell (lásd *Credit Suisse Financial Products* [1997]) feltevései mellett. A CR+ a CreditMetrics portfólószemléletû hitelkockázati modell mellett a másik, a világon leginkább elterjedt aktuárius szemléletû portfóliómodell.

Az egyfaktoros CR+ modellben a csõdvalószínûség mint valószínûségi változó a következõképpen írható fel:

$$p_A(X) = \overline{p}_A[w_A X + 1 - w_A],$$

ahol az X egy várható értékû, és $\sigma(X)$ szórású Gamma-eloszlású szisztematikus kockázati faktor. Könnyen látható, hogy a csõdvalószínûség szórása arányos a csõdvalószínûséggel, annak $\alpha_A = w_A\sigma(X)$-szorosa:

$$\sigma(p_A) = w_A\sigma(X)\overline{p}_A.$$

A w_A paraméter a szektorsúly (vagy szisztematikus faktorsúly), 0 és 1 közötti értéket vehet fel és a vállalat csõdvalószínûségének a szisztematikus kockázati faktorra való érzékenységét méri (lásd *Janecskó* [2002]).

A CR+ technikai dokumentációjában α értékét tapasztalati számok alapján 2-re állítják be. *Gordy* [2000] cikkében található egy táblázat, amelyben empirikus α értékek szerepelnek. Itt az α értékek S&P adósminõsítési kategóriánként vannak meghatározva:

1. táblázat
S&P-besorolások, csõdvalószínûségek és volatilitás szorzók

S&P besorolás	P (százalék)	$\alpha = \frac{\sigma(p)}{p}$
AAA	0,01	1,4
AA	0,02	1,4
A	0,06	1,2
BBB	0,18	0,4
BB	1,06	1,1
B	4,94	0,55
CCC	19,14	0,4

Forrás: Gordy [2000], *Gupton–Finger–Bhatia* [1997].

Két adós csõdvalószínûségének kovarianciája megegyezik a két szórás szorzatával, mivel az egyfaktoros modellben a csõdvalószínûségek korrelációja 1 (tökéletesen korrelálnak a csõdvalószínûségek, ugyanis egyetlen közös szisztematikus kockázati faktor determinálja az értékeiket):

$$\mathrm{COV}(p_A, p_B) = \overline{p}_A \overline{p}_B \alpha_A \alpha_B .$$

Az egyfaktoros CreditMetrics-modellben a csõdvalószínûségek kovarianciájának meghatározása valamivel bonyolultabb. A levezetésben *Gordy* [2000] cikkének függelékében található trükköt alkalmazzuk. Amennyiben ismerjük a szisztematikus kockázati faktor értékét, akkor az együttes csõd (dupla default) valószínûségét a következõképpen írhatjuk fel:

$$\Pr(y_A(X) < \Phi^{-1}(\overline{p}_A), y_B(X) < \Phi^{-1}(\overline{p}_B)) = p_A(X) p_B(X),$$

mivel X ismeretében a fizetésiképesség-folyamatok csak idioszinkratikus kockázatokat hordoznak magukban, tehát függetlenek. A kovarianciát definíciója alapján e képlet bal oldalának várhatóérték-képzésével határozzuk meg, ugyanis:

$$\mathrm{COV}(p_A, p_B) = \mathrm{E}[p_A(X) p_B(X)] - \overline{p}_A \overline{p}_B .$$

Mivel az y_A és y_B eszközérték-folyamatok standard normális eloszlásúak, és közöttük a korreláció értéke $\sqrt{\rho_A \rho_B}$,[6] továbbá feltételezve, hogy a fizetési folyamatok együttes eloszlása is kétváltozós normális eloszlású,[7] a kovarianciára a következõ kifejezés adódik:

$$\mathrm{COV}(p_A, p_B) = F\left(\Phi^{-1}(\overline{p}_A), \Phi^{-1}(\overline{p}_B), \sqrt{\rho_A \rho_B}\right) - \overline{p}_A \overline{p}_B ,$$

ahol $F_1(x_1, x_2, r)$ a kétváltozós kumulált standard normális eloszlás r korrelációs paraméterrel.[8] Látható, hogy amíg a CreditMetrics-modellben a csõdvalószínûségek kovarianciájára viszonylag bonyolult kifejezés adódott (például standard Excel-függvény nem létezik rá), addig a CreditRisk+ modellben egyszerû a számolás. Nem véletlen, hogy a Bázel II. korábbi változatában is a granularitási korrekció meghatározásához áttértek a CreditRisk+ metodikájára. Ha az IRB módszer (CreditMetrics-alapú) korrelációs paraméterével konzisztensek akarunk maradni, akkor például α_A (CreditRisk+) paramétert megválaszthatjuk úgy, hogy az A adós csõdvalószínûségének varianciájára mindkét modellben ugyanaz az érték adódjon:

$$\alpha_A = \sqrt{\frac{F(\Phi^{-1}(\overline{p}_A), \Phi^{-1}(\overline{p}_A), \rho_A) - \overline{p}_A^2}{\overline{p}_A^2}} .$$

[6] Ez az összefüggés triviálisan adódik abból, ha két eszközérték-folyamatot összeszorzunk, és képezzük a várható értéket.

[7] Megjegyzem, hogy az együttes eloszlás normalitása nem következik semmibõl, általánosságban a marginális eloszlásokból kopulák segítségével lehet együttes eloszlásfüggvényeket konstruálni, lásd például az *Embrechts–Kluppelberg–Mikosch* [1997] könyvben.

[8] Lásd például *Pál* [1995] 301. oldal: $F(y_1, y_2, r) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}} \int_{-\infty}^{y_1} \int_{-\infty}^{y_2} e^{-\frac{x_1^2 - 2r x_1 x_2 + x_2^2}{2(1-r^2)}} dx_1 dx_2$. A konkrét számításokat MATLAB-ban a DBLQUAD numerikus kettõs integrálás segítségével végeztem el, az integrálás alsó határát –5-re választottam, mivel a korreláció értékétõl függetlenül a standard 2 dimenziós normális eloszlás –5 és 5 között már nagy pontossággal egyre normált.

Eddigi eredményeink alapján most már felírhatjuk a diverzifikálható és szisztematikus szórások hányadosát:

$$\frac{\sigma_{\mathrm{DIV}}}{\sigma_{\mathrm{SYS}}}=\sqrt{\frac{\sum_A \overline{L}_A^{\,2}\{\overline{p}_A(1-\overline{p}_A(1-\tilde{\sigma}^2(L_A)+\alpha_A^2))\}}{\sum_A\sum_B \overline{L}_A\overline{L}_B\overline{p}_A\overline{p}_B\alpha_A\alpha_B}}.$$

Itt további egyszerûsítésként feltételezem, hogy az *LGD* × *EAD* paraméter szórása elhanyagolhatóan kicsi a várható értéke körül:

$$\tilde{\sigma}^2(L_A)=0.$$

Feltételezve a homogenitást, azaz hogy minden adós azonos (feltétel nélküli) csõdvalószínûségû, tehát:

$$\forall A\text{-ra }\ \overline{p}_A=p$$

a varianciakifejezések a következõ alakra egyszerûsödnek.

$$\sigma_{\mathrm{DIV}}^2=p(1-p(1+\alpha^2))\sum_A \overline{L}_A^{\,2},$$

$$\sigma_{\mathrm{SYS}}^2=p^2\alpha^2\sum_A\sum_B \overline{L}_A\overline{L}_B.$$

A szórások aránya tehát:

$$\frac{\sigma_{\mathrm{DIV}}}{\sigma_{\mathrm{SYS}}}=\sqrt{\frac{(1-p(1+\alpha^2))}{p\alpha^2}\,\frac{\sum_A \overline{L}_A^{\,2}}{\sum_A\sum_B \overline{L}_A\overline{L}_B}}.$$

Még tovább egyszerûsítve a hányadost, feltételezem, hogy minden kintlevõség azonos nagyságú, vagyis:

$$\forall A\text{-ra }\ \overline{L}_A=l.$$

Mindezen egyszerûsítésekkel a szóráshányadosa a következõ kifejezés adódik:

$$\frac{\sigma_{\mathrm{DIV}}}{\sigma_{\mathrm{SYS}}}=\sqrt{\frac{(1-p(1+\alpha^2(p,\rho)))}{p\alpha^2(p,\rho)}\,\frac{1}{N}}.$$

Ezt az eredményt az úgynevezett finom szemcsézettség kritériumával is közelítõleg elérhetjük. Ilyenkor a kintlevõségek nem azonos nagyságúak, hanem csak egyenként elhanyagolhatóan kis méretûek a teljes portfólió méretéhez képest. A bizonyítás a következõ észrevételre épít:

$$\frac{\sum_A \overline{L}_A^{\,2}}{\sum_A\sum_B \overline{L}_A\overline{L}_B}=\frac{\sum_A \overline{L}_A^{\,2}}{\left(\sum_A \overline{L}_A\right)^2}=\sum_A\left(\frac{\overline{L}_A}{\sum_A \overline{L}_A}\right)^2=\sum_A \varepsilon_A^2\approx\sum_A\frac{1}{N^2}=N\frac{1}{N^2}=\frac{1}{N}.$$

E levezetés bal oldalán szereplõ kifejezés a *Basel Committee on…* [2001] második konzultációs anyagában is feltûnik. Koncentrációs *H*-mutatóként említik (Herfindahl-index), finom szemcsézettség esetén e fenti levezetés alapján $\frac{1}{N}$ szerint tart a nullához, a másik szélsõséges esetben pedig, amikor egyetlen nagy kintlevõség dominálja a portfólió értékét, a H egyhez tart. Ha $M < N$ darab azonos méretû kintlevõségen oszlik meg a teljes portfólió és $N - M$ darab elhanyagolható kintlevõség van, akkor a Herfindahl-index értéke éppen M.

A finoman szemcsézett portfóliókra vonatkozó *2. táblázatban* tipikusnak mondható csõdvalószínûségekre (vállalatokra az *1. táblázat* S&P csõdvalószínûségeket, illetve lakossági termékekre a banki gyakorlatból vett, tipikusnak mondható valószínûségeket használtunk) megadjuk a Bázel II. anyagban feltételezett korrelációs függvénnyel kiszámolt korrelációértékékeket, továbbá az α implikált CR+ volatilitásszorzót, a szóráshányadost (vállalatokra N = 3000, lakossági portfóliókra N = 5000 feltételezéssel), továbbá azt a kritikus portfólióméretet (elemszámot), amelynél nagyobb elemszámú portfólió esetében az idioszinkratikus szórás nem haladja meg a szisztematikus szórás 10 százalékát (azaz az egyedi szórás egy nagyságrenddel kisebb a szisztematikus szórásnál).

2. táblázat

Kritikus nagyvállalati és kis- és középvállalati (5 millió euró árbevétel) portfólióméret

Besorolás	p (százalék)	ρ		α		$\frac{\sigma_{DIV}}{\sigma_{SYS}}$, N = 3000		N^*	
		nagy-vállalat	kis- és közép-vállalat (százalék)	nagy-vállalat	kis- és közép-vállalat	nagy-vállalat	kis- és közép-vállalat	nagy-vállalat	kis- és közép-vállalat
AAA	0,01	23,9	19,94	4,54	3,60	0,40	0,51	48 464	77 149
AA	0,02	23,9	19,88	3,97	3,19	0,32	0,40	31 626	48 897
A	0,06	23,6	19,65	3,17	2,61	0,23	0,28	16 447	24 352
BBB	0,18	23,0	18,97	2,48	2,07	0,17	0,21	8 952	12 784
BB	1,06	19,1	15,06	1,47	1,25	0,12	0,14	4 201	5 907
B	4,94	13,0	9,02	0,81	0,66	0,10	0,12	2 816	4 331
CCC	19,14	12,0	8,00	0,50	0,41	0,07	0,09	1 559	2 426

Érdekes megfigyelni, hogy a Bázel II. korrelációs paraméterekbõl visszakövetkeztetett volatilitásszorzók egész közel esnek az *1. táblázatbeli* empirikus értékekhez. E táblázatok segítségével egy konkrét portfólió esetében közelítõleg megítélhetõ, hogy a Bázel II. tõkekövetelmény összhangban van-e a valós kockázatokkal, vagy esetleg granularitás korrekciót kellene alkalmazni. Például egy homogén *BB* minõsítésû ügyfelekbõl álló vállalati portfólió esetében, ha az ügyfelek száma több mint 4200, akkor az idioszinkrartikus kockázat valóban elhanyagolhatónak tûnik, kisebb portfóliók esetén az egyedi kockázatok diverzifikációja nem tökéletes.

A következõ fejezetben azt vizsgáljuk meg, hogy a nem diverzifikálódó egyedi kockázatok miatt hogyan kell módosítani a tõkekövetelmény meghatározását.

Granularitás-korrekció

A valós portfóliók természetesen nem homogének, és nem végtelenül finoman szemcsézettek. Ilyen esetben a portfóliót alkotó elemek tõkekövetelménye nem határozható meg egyedi módon, a portfólió tõkekövetelménye nem egyezik meg az elemek portfóliófüggetlen tõkekövetelményeinek összegével. Ennek fõ oka tehát az, hogy az egyedi (idioszinkratikus) kockázatok nem diverzifikálódnak.

3. táblázat

Kritikus lakossági portfólióméret jelzáloghitelek, megújuló hitelek (folyószámlahitel, hitelkártya) és egyéb hitelek (személyi kölcsön) kategóriákban

p (százalék)	ρ			α			$\frac{\sigma_{\mathrm{DIV}}}{\sigma_{\mathrm{SYS}}}$, $N = 5000$			N^*		
	jelzálog	megújuló	egyéb	jelzálog	megújuló	egyéb	jelzálog	megújuló	egyéb	jelzálog	megújuló	egyéb
1	15	7	13	1,26	0,80	1,12	0,11	0,17	0,13	6165	15 214	7 855
2,5	15	5	8	1,04	0,52	0,73	0,08	0,17	0,12	3508	14 191	7 306
5	15	3	5	0,88	0,35	0,46	0,07	0,18	0,13	2352	15 624	9 019
7,5	15	2	3	0,79	0,28	0,34	0,06	0,17	0,15	1890	15 205	10 769
10	15	2	2	0,72	0,25	0,28	0,06	0,17	0,15	1631	13 847	11 579
15	15	2	2	0,63	0,22	0,23	0,05	0,15	0,15	1346	11 475	11 060
20	15	2	2	0,56	0,20	0,20	0,05	0,14	0,14	1191	10 035	9 968

A szakirodalomban *Wilde* [2001], *Martin–Wilde* [2002] és a második konzultációs anyagban (*Basel Committee on …* [2001]) részletesen megtalálható az egyedi kockázatokat is figyelembe vevõ granularitási korrekció meghatározásának metódusa.

Az elõzõ fejezet levezetései alapján triviálisan adódnak az eredmények. Adósminõsítési kategóriánként homogén portfóliót feltételeznek, és az egyedi kockázatokat a Herfindahl-index segítségével írják le, továbbá az egyfaktoros CreditMetrics-modellhez most nem a csõdvalószínûségek szórásainak, hanem percentiliseinek egyenlõvé tételével illesztik az egyfaktoros CreditRisk+ modellt (azaz az α_A paramétert). Ez a fajta modellillesztés matematikailag egyszerûbb feladat, mint amely az elõzõ fejezetben szerepelt.

Mivel viszonylag hosszadalmas levezetésrõl (és terjedelmes képletekrõl) van szó, ezért egy kevésbé pontos, de annál szemléletesebb számítást mutatunk be a granularitási korrekció meghatározására. Ezelõtt azonban még bemutatjuk az $\alpha_A = w_A\sigma(X)$ paraméter illesztésének újfajta megközelítését.

A csõdvalószínûség q-adik percentilise a CreditMetrics-modellben megegyezik a korábban már levezetett *CR* függvénnyel:

$$\mathrm{VaR}(p_A(X), q) = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(\overline{p}_A) - \sqrt{\rho_A}\,\Phi^{-1}(1-q)}{\sqrt{1-\rho_A}}\right),$$

az egyfaktoros CreditRisk+ modellben pedig triviálisan adódik:

$$\mathrm{VaR}(p_A(X), q) = \mathrm{VaR}(\overline{p}_A[w_A X + 1 - w_A], q) = \overline{p}_A[w_A \mathrm{VaR}(X, q) + 1 - w_A],$$

ahol az X q-adik percentilisét az egy várható értékû és $\sigma(X)$ szórású Gamma-eloszlás segítségével lehet kiszámolni.[9] A bázeli ajánlás (hasonlóan a CR+ modellhez) $\sigma(X) = 2$ feltevéssel él, és w_A-t e fenti két percentilis egyenlõvé tételével határozza meg. Ezek után $\sigma(p_A) = w_A\sigma(X)\overline{p}_A$ összefüggést helyettesíti be az egyedi és szisztematikus varianciák képleteibe. A számításokban a továbbiakban azt sem feltételezi, hogy az ügyletek *LGD* × *EAD* paramétere determinisztikus lenne, hanem a következõ kifejezés szerint szóródhat a várható érték körül:

$$\tilde{\sigma}^2(L_A) = \frac{L_A(1-L_A)}{4L_A^2}.$$

Ezen a ponton rátérek a granularitási korrekció szemléletes bemutatására.

A bázeli harmadik konzultációs anyag feltételezte, hogy a portfólió tõkekövetelménye (a veszteség eloszlásfüggvényének percentilise) megegyezik a várt *(EL, Expected Loss)* és nem várt veszteségek *(UL, Unexpected Loss)* összegével. Intuitíve feltehetõ, hogy *UL* arányos a veszteség szórásával (nyilván az arányossági tényezõ függ a megcélzott biztonsági szinttõl):

$$UL = \beta\sigma(L).$$

[9] Excelben a GAMMAINV (probability, alpha, beta) függvény használható. Az α és β megadható a várható érték és a szórás paraméterekkel: $\alpha = \left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^2$ és $\beta = \frac{\sigma^2}{\mu}$. Most $\mu = 1$ és $\sigma = 2$, tehát a GAMMAINV (0,999; 0,25; 4) függvényt kell használni. Értékére 17,5-nek adódik.

Eredetileg a szisztematikus kockázatokat fedezõ tõkekövetelményt számoltuk:

$$CR_{\mathrm{SYS}} = EL + UL_{\mathrm{SYS}} = EL + \beta\sigma_{\mathrm{SYS}}$$

Az egyedi kockázatokat is fedezõ tõkekövetelmény a következõ lenne:

$$CR_{\mathrm{TOTAL}} = EL + UL_{\mathrm{TOTAL}} = EL + \beta'\sigma'_{\mathrm{TOTAL}}$$

Természetesen a szórásarányossági tényezõk eltérõk, pontosan csak a veszteség eloszlásfüggvényének ismeretében lehet meghatározni ezeket. Korábban már láttuk, hogy a teljes varianciát egyedi és szisztematikus varianciák összegére bontottuk fel:

$$\sigma^2_{\mathrm{TOTAL}} = \sigma^2_{\mathrm{DIV}} + \sigma^2_{\mathrm{SYS}}.$$

Mindezek alapján – továbbá feltéve, hogy a várható veszteség elhanyagolható a nem várt veszteséghez képest (illetve a Bázeli Bizottság 2003. októberi sajtónyilatkozata alapján is megtehetõ az elhanyagolás, mivel elfogadták, hogy a bankok a tõkekövetelmény *EL* részét céltartalékolással és kockázati felár képzésével oldják meg, tehát a *CR*-nek csak az *UL*-t kell fedeznie), illetve a β arányossági tényezõk közelítõleg egyenlõk – a teljes és a szisztematikus tõkekövetelmények arányára, azaz a granularitási korrekcióra a következõ összefüggés adódik:

$$G = \frac{CR_{\mathrm{TOTAL}}}{CR_{\mathrm{SYS}}} - 1 \approx \frac{\sigma_{\mathrm{TOTAL}}}{\sigma_{\mathrm{SYS}}} - 1 = \frac{(\sigma^2_{\mathrm{DIV}} + \sigma^2_{\mathrm{SYS}})^{\frac{1}{2}}}{\sigma_{\mathrm{SYS}}} - 1 = \left(1 + \left(\frac{\sigma_{\mathrm{DIV}}}{\sigma_{\mathrm{SYS}}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} - 1 \approx \frac{1}{2}\frac{\sigma^2_{\mathrm{DIV}}}{\sigma^2_{\mathrm{SYS}}}.$$

Felhasználva a korábban már – homogén portfóliófeltételezés mellett – levezetett varianciaarányt, a granularitási korrekció a következõ közelítõ képlettel adható meg:

$$G \approx \frac{1 - p(1 + \alpha^2(p,\rho))}{2p\alpha^2(p,\rho)}\frac{1}{\tilde{N}},$$

ahol $\tilde{N} = \frac{1}{H}$ a Herfindahl-index reciproka, egyfajta effektív ügyfélszám.[10] Valós banki vállalati portfólión tesztelve, 3000 ügyfél mellett az effektív ügyfélszámra 150 adódott (150 nagy ügyfélen oszlott szét a teljes *EAD* × *LGD* 70 százaléka). A *2.* és *3. táblázatban* a különbözõ eszközszegmensekre megadott kritikus portfólióméretekbõl most triviálisan származtathatóak azok az effektív portfólióméretek, amely felett a granularitási korrekció például 1 százaléknál kisebb (azaz a tõkekövetelmény-növekmény két nagyságrenddel kisebb az eredeti tõkekövetelményhez képest). A szóráshányadosoknál alkalmazott 10 százalékos nagyságrendû korrekció itt már jelentõsnek lenne mondható, hiszen az a mûködési kockázat tõkekövetelményének nagyságrendjébe esne. Az 1 százalékos és 10 százalékos elhanyagolási küszöbértékek megválasztása esetén triviálisan adódik: $\tilde{N} = \frac{N^*}{2}$, azaz a granularitás szempontjából kritikus effektív ügyfélszám éppen a fele a korábban már a szórás szempontjából meghatározott kritikus tényleges ügyfélszámnak. Tehát például a *3. táblázat* alapján egy 5 százalékos átlagos csõdvalószínûségû

[10] Itt tehát (*PD*-ben) homogén portfóliót feltételeztem, de a kockáztatott kintlevõségek nem feltétlenül azonosak. Tehát ismétlésképpen az effektív ügyfélszám a Herfindahl-index reciprokával egyezik meg, azaz:

$$\tilde{N} = \frac{1}{H} = \left(\frac{\sum_A \bar{L}_A^{\,2}}{\sum_A \sum_B \bar{L}_A \bar{L}_B}\right)^{-1}.$$

homogén jelzáloghitel-portfólióban legalább 2352/2 = 1176 darab effektív ügyfélnek kell szerepelni, hogy a granularitási korrekció elhanyagolható legyen. Érdekes azt is megvizsgálni, hogy rögzített (effektív) elemszámok mellett milyen nagyságrendû a korrekció. Ezeket az eredményeket a *4.* és *5. táblázat* tartalmazza.

4. táblázat

Granularitási korrekció (tõkekövetelmény-növekmény) különbözõ effektív ügyfélszámú nagyvállalati és kis- és középvállalati portfóliókra

Besorolás	*PD*	Nagy-	Kis- és közép-	Nagy-	Kis- és közép-	Nagy-	Kis- és közép-
		vállalat					
		10 000	10 000	1000	1000	200	200
AAA	0,01	2,4	3,9	24,2	38,6	121,2	192,9
AA	0,02	1,6	2,4	15,8	24,4	79,1	122,2
A	0,06	0,8	1,2	8,2	12,2	41,1	60,9
BBB	0,18	0,4	0,6	4,5	6,4	22,4	32,0
BB	1,06	0,2	0,3	2,1	3,0	10,5	14,8
B	4,94	0,1	0,2	1,4	2,2	7,0	10,8
CCC	19,14	0,1	0,1	0,8	1,2	3,9	6,1

5. táblázat

Granularitási korrekció (tõkekövetelmény-növekmény) különbözõ effektív ügyfélszámú lakossági portfóliókra jelzáloghitelek, megújuló hitelek (folyószámlahitel, hitelkártya) és egyéb hitelek (személyi kölcsön) kategóriákban (százalék)

p	Jel- zálog	Meg- újuló	Egyéb	Jel- zálog	Meg- újuló	Egyéb	Jel- zálog	Meg- újuló	Egyéb
	10 000	10 000	10 000	5000	5000	5000	1000	1000	1000
1	0,3	0,3	0,3	0,6	0,6	0,6	3,1	3,1	3,1
2,5	0,2	0,2	0,2	0,4	0,4	0,4	1,8	1,8	1,8
5	0,1	0,1	0,1	0,2	0,2	0,2	1,2	1,2	1,2
7,5	0,1	0,1	0,1	0,2	0,2	0,2	0,9	0,9	0,9
10	0,1	0,1	0,1	0,2	0,2	0,2	0,8	0,8	0,8
15	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,7	0,7	0,7
20	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,6	0,6	0,6

Látható, hogy például egy nagyon jó minõségû *AAA* nagyvállalati ügyfelekbõl álló, de koncentrált portfólióra ($\tilde{N} = 200$) a valós tõkekövetelmény 121,2 százalékkal nagyobb a csak szisztematikus kockázatokat figyelembe vevõ Bázel II. tõkekövetelménynél. Persze igaz, hogy a IRB módszerben a *AAA*-s ügyfelek 0,01 százalékos csõdvalószínûségére nagyon kicsi 0,6 százalékos tõkekövetelmény adódik (egyébként minimum 0,03 százalék csõdvalószínûség értéket kell egy besorolási kategóriához rendelni). Nagyon gyenge minõségû portfólióknál a granularitási korrekció mértéke nem jelentõs. Reális méretû és kockázati összetételû vállalati portfóliókon azonban szignifikáns korrekciót igényelne a nem diverzifikálódó egyedi kockázat, ugyanakkor reális méretû lakossági portfóliókra a granularitási korrekció elhanyagolható. Ezek a megállapítások ténylegesen egybeesnek a közgazdasági intuícióval is.

Záró megjegyzések

A Bázel II. tõkeegyezmény közgazdasági modellje a granularitási korrekción túl egy másik nagyon fontos kockázati elemet is figyelmen kívül hagy: nevezetesen a biztosítékok értékének szisztematikus kockázati faktorra való érzékenységét. Ez egy újabb szisztematikus, nem diverzifikálható elemet hoz be a veszteség szórásnégyzetébe. *Frye* [2000*a*], [2000*b*] cikkeiben egy az adós fizetésiképesség-folyamatához nagyon hasonló egyszerû modellt vezet be a biztosítéki érték alakulásának leírására is. A csõd utáni kintlevõségre vetített százalékos veszteség, azaz az *LGD* a várható értéke körül normális eloszlás szerint ingadozhat. A várható értéktõl való eltérést a fizetõképességet is alakító szisztematikus kockázati faktor és az idioszinkratikus tag lineáris kombinációja határozza meg. Az *LGD* és a szisztematikus kockázati faktor közötti korreláció 40 százalék és 60 százalék között változik. Frye modellje segítségével a Bázel II. *CR* függvénynél szigorúbb módosított *CR* függvény a tanulmányban bemutatott levezetések segítségével könnyen kiszámolható.

A garanciával fedezett követelések Bázel II. kezelése rendkívül konzervatív. Bázel II. szerint garanciával teljesen lefedezett kintlevõség tõkekövetelménye megegyezik a garantõrre számolt tõkekövetelménnyel, ha a garantõr *PD*-je alacsonyabb az eredeti adós *PD*-jénél, egyéb esetben a garanciának nincs beszámítható kockázatcsökkentõ hatása. Ez a metódus nyilvánvalóan téves, hiszen bármilyen rossz minõsítésû is a garantõr, az általa nyújtott garancia mindenképpen kockázatcsökkentõ, hiszen az egyenes adós és a garantõr szimultán csõdjének (nem fizetésének) a valószínûsége biztos, hogy kisebb vagy egyenlõ, mint az eredeti adós *PD*-je. A kettõs csõd valószínûsége elvileg meghatározható az alapmodell segítségével. *Heitfield* [2003] cikkében megtalálható a pontos levezetés. A cikk alapfeltevése, hogy az egyenes adós és a garantõr fizetési képesség folyamataiban szereplõ idioszinkratikus tagok egymással korrelálnak, továbbá hogy a folyamatok együttes eloszlása is normális (itt a kopulák irányába általánosítható lenne a modell). E feltevésekkel a tõkekövetelmény az együttes csõdvalószínûség 99,9 százalékos percentilise és az adósra, valamint a garantõrre is meghatározható *EAD* × *LGD*-k szorzataként áll elõ. Az idioszinkratikus tagok közötti korrelációs paraméter 0 és 1 értékei mellett a végsõ képlet egyszerûen interpretálható formát ölt, de ennek részletes kifejtése már egy új tanulmány témája lehet. A garantált követelések e szofisztikáltabb kockázati modellezése technikai okokból tûnik nehezen bevezethetõnek, mivel például a kétváltozós normális eloszlás viszonylag nehezen elõállítható függvény.

Hivatkozások

BASEL COMMITTEE ON … [2001]: The New Basel Capital Accord. 2nd Consultative Document. Basel Committee on Banking Supervision. Bank for International Settlements, Bázel.

BASEL COMMITTEE ON … [2003]: The New Basel Capital Accord. 3rd Consultative Document. Basel Committee on Banking Supervision. Bank for International Settlements, Bázel.

BURGISSER, P.–KURTH, A.–WAGNER, A.–WOLF, M. [1999]: Integrating Correlations. Risk, Vol. 12. No. 7. 57–60. o.

BURGISSER, P.–KURTH, A.–WAGNER, A.[2001]: Incorporating Severity Variations into Credit Risk. Journal of Risk, Vol. 3. No. 4. 5–31. o.

CREDIT SUISSE … [1997]: CreditRisk+, A Credit Risk Management Framework. Credit Suisse Financial Products, London, http://www.csfb.com/creditrisk/

EMBRECHTS, P.–KLUPPELBERG, C.–MIKOSCH, TH. [1997]: Modelling Extremal Events. number 33. Applications of Mathematics, Springer-Verlag, Berlin.

ONG, M. K. [2004]: The Basel Handbook: A guide for Financial Practitioners. Risk Books. London.

FRYE, J. [2000*a*]: Collateral Damage: A Source of Systematic Credit Risk. Risk, Vol. 13. No. 4. 91–94. o.

FRYE, J. [2000*b*]: Depressing Recoveries. Risk, Vol. 13. No. 11. 108–111. o.

GORDY, M. B. [2000]: A Comparative Anatomy of Credit Risk Models. Journal of Banking and Finance, 24. 1–2. 119–149. o.

GORDY, M. B. [2001]: Credit VaR and Risk-Bucket Capital Rules: A Reconciliation. Proceedings of the 36th Annual Conference of Bank Structure and Competition. New York.

GUPTON, G. M.–FINGER, CH. C.–BHATIA, M. [1997]: CreditMetrics-Technical Document. J. P. Morgan & Co. Incorporated, New York.

HEITFIELD, E. [2003]: Using guarantees and credit derivatives to reduce credit risk capital requirements under the new Basel Capital Accord. Megjelent: *J. Gregory* (szerk.): Credit Derivatives: the Definitive Guide. Risk Books. Hardcover.

MOODY'S [2001]: Historical Default Rates of Corporate Bond Issuers, 1920-1999. Moody's Investors Service, Global Credit Research. www.moodyskmv.com

HALLERBACH, W. G. [1999]: Decomposing portfolio value-at-risk: A general analysis. Discussion paper TI 99-034/2, Tinbergen Institute Rotterdam.

TASCHE, D. [1999]: Risk contributions and performance measurment. Working Paper, Technische Universitat München.

WILDE, T. [2001]: IRB approach explained. Risk, Vol. 14. No. 5. 87–90. o.

MARTIN, R.–WILDE, T. [2002]: Unsystematic credit risk. Risk, Vol. 15. No. 11. 123–128. o.

PYKHTIN, M.–DEV, A. [2002]: Analytical approach to credit risk modelling. Risk, Vol. 15. No. 3. 26–32. o.

KALKBRENER, M.–OVERBECK, L. [2002]: The maturity effect on credit risk capital. Risk, Vol. 15. No. 7. 59–63. o.

HAMERLE, A.–LIEBIG, T.-RÖSCH, D. [2003]: Benchmarking asset correlations. Risk, Vol. 16. No. 11. 77–81. o.

PÁL LÉNÁRD [1995]: A valószínûségszámítás és a statisztika alapjai. Akadémia Kiadó, Budapest. 297-302. o.