Közgazdasági Szemle, LI. évf., 2004. január (66–76. o.)

BRÓDY ANDRÁS

Az átfutási idő hatása

A termékek élettartama – vagy más szavakkal átfutási, lekötési vagy megtérülési ideje – befolyásolja a gazdaság növekedését és a lehetséges ciklusok hosszát. E hatás leírására az input-output modell és ennek különféle változatai az alkalmasak, ezek teszik lehetővé a számításokat is. Világossá és mérhetőkké válnak az osztrák iskola úgynevezett „körkörös termelési útjai", ezek tartama és változásai. Mindez az egyensúly fogalmának és értelmezésének kiterjesztéséhez vezethet.
Journal of Economic Literature (JEL) kód: C5, C67, E3, E62, E68.

Tekintsük az input-output modell tőkelekötési adatait, amelyeket jelöljön a b_{ik} elemekkel bíró **B** mátrix! Osszuk ezt el cellánként az **A** folyó ráfordítási mátrix a_{ik} elemeivel (ahol tehát az indexek a megfelelő cellákat jelölő sor és oszlop mutatói)! A kapott mátrix elemei azt mutatják, hogy a *k* ágazat egységnyi termeléséhez szükséges és az *i* ágazatból származó ráfordítás mennyi ideig tartózkodik ebben az ágazatban. Az így adódó nagyságoknak, amelyeket jelöljön t_{ik}, ennek következtében [**T**] idődimenziójuk van.

Ezt az értéket az üzemgazdaságtan átfutási időnek, a készlet és – általánosabb értelemben – a befektetett tőke készletezési vagy lekötési idejének nevezi.[1] Marx megtérülési időnek tekintette, amelyet a termelés és a forgalom ideje szab meg (*Marx* [1953]). Hawkins forgási időként határozta meg, s ilyen értelemben használta Lange is (*Hawkins* [1948], *Lange* [1952]). Korábbi írásaim e szerzőkre támaszkodtak, de a megtérülés fogalmát beszámolómban általánosabban kezeltem, időtartamát a megfelelő termék vagy ráfordítás élettartamának neveztem (*Bródy* [1969]).

Ezt azért tettem, mert minden termék tőke, amíg csak el nem tűnik a fogyasztás (kopás, selejtezés) folyamataiban. A várható élettartamok jól közelíthetők exponenciális eloszlású valószínűségi változókkal, de ezt a lehetőséggel itt csak megemlítem. A tanulmány csupán ennek az időnek, illetve az időtartam hosszának azt a hatását vizsgálja, amely a termelés átlagos növekedésének rátájára, valamint a termelés menetében kialakuló ciklikus ingadozás frekvenciáira gyakorol. A termelés átlagos növekedési rátája mellett tanulmányozzuk az átlagprofit mértékét is, ez duális, értékoldali megfelelője a növekedési rátának. Az utóbbi tárgyinak, mintegy fizikainak tekinthető, az előbbi értékviszonyokon alapul. Az egyensúlyi értelmezés némi módosítása mellett érvelek. A hosszú távú infláció rátája ugyanis az elmúlt félévszázad fejlett országainak statisztikai adataiban nem zérus volt, hanem átlagában megegyezett a növekedés hosszú távú rátájával. Ezt a tényt el kell fogadni, sőt elméletileg ki kell mondani, hiszen a gyakorlatban is így számolunk. Ez a modell matematikai alakját nem változtatja, csupán a kapott eredmény értelmezését könnyíti meg.

[1] Az angolszász irodalomban használt *turnover time,* azaz forgási vagy fordulati idő kifejezés egyben jelzi azt is, hogy ennek reciprok értéke az időegységre jutó fordulatok száma.

Bródy András, az MTA Közgazdaságtudományi Kutatóközpontja (e-mail: brody@econ.core.hu).

Az élettartamokról

A termék vagy a gazdasági ráfordítás élettartama természete szerint csak pozitív és véges számérték lehet. Zérust bármilyen számmal osztva, zérust kapunk eredményül. A zérussal való osztás nem megengedett művelet. De a művelet kiterjesztésével az eredmény végtelennek tekinthető. Zérusnak zérussal való osztása a matematikában és a számítógépi parancs szerint már értelmezhetetlen, vagyis „nem számhoz" vezet. A gazdasági gyakorlatban minden folyó ráfordítást többé-kevésbé tartós nyersanyagként, félkész és késztermékként, alkatrészként vagy szolgáltatásként vásárlunk meg, tehát elvben kimondhatjuk, hogy ha a folyó ráfordítás cellája nem zérus, azaz van ráfordítás, akkor valamekkora tőkének is kell lennie, még akkor is, ha ez esetleg nem a vevő, hanem az eladó tulajdona marad. A könyvelési gyakorlat a termékek és szolgáltatások áramlását viszont csak az érték és tartósság bizonyos küszöbértékei felett tekinti állótőkének. E minimális érték alatt a vásárlást „folyó ráfordításként" tartja nyilván, de a gyakorlatilag létrejött készletet veszi számba, és időszakosan leltározza. A modellezésben néha elválasztják az input- és az outputkészleteket egymástól, s ilyenkor több mátrix is létrehozható, amelyek cellái esetleg más és más tulajdonoshoz tartoznak. A felmerülő kérdésekhez hozzájárul még az is, hogy ha megbízható és részletes tőkelekötési mátrix készül, ennek sok, de többnyire csak kis értéket tartalmazó cellája marad üres a statisztikai adatok gyűjtésének nehézségei és bizonytalanságai folytán. Mindezek a kisebb hiányosságok csak kevéssé torzítják az érdemi és főbb arányokat, így elméletileg elhanyagolhatók.

Ezért feltehetjük, hogy a két mátrix, **A** és **B** struktúrája azonos. Ezt úgy értjük, hogy ha ezeknek a mátrixoknak van egy vagy több zérus eleme (cellája), ami persze a nagyobb és ezért részletesebb mátrixok esetén egyre gyakrabban fordul elő, akkor ez csak ugyanazon helyen, egyazon i és k indexű cellákban adódhat. Ilyenkor a nem létező ráfordítás esetében, amellyel nem létező tőkelekötés jár együtt, az osztást nem végezzük el, és a megfelelő élettartamot zérusnak, szabatosabban azonban inkább nem létezőnek tekintjük.

A gyakorlatban így csak kétfajta feladat adódhat. Ha $b_{ik} > 0$ és $a_{ik} = 0$, akkor a (látszólag) örökéletű befektetést (licencet, találmányt, monopóliumot, előnyt) valamilyen módon amortizálni kell. Ezt gazdasági megfontolások is előírják, mert semmi se tarthat örökké, minden elkopik, elhasználódik, elévül vagy elavul egyszer. Ilyenkor az **A** mátrix megfelelő elemét kell megfelelően módosítani. Ha viszont $b_{ik} = 0$ és $a_{ik} > 0$, akkor a **B** mátrix módosítandó. Ez a helyzet például a villamos energia vagy olyan szolgáltatás felhasználása esetében, ahol látszólag nincs tőkelekötés, a fogyasztás „szinte" azonos időben történik a termeléssel. A helyesbítés – mint erről már volt szó – ilyenkor többnyire szimbolikus, és inkább a matematikai lelkiismeret megnyugtatását, mintsem a számítás valóságos eredményének javítását szolgálja.[2]

Az n szektorból álló négyzetes mátrixok elemenkénti osztása tehát általában n^2, részben esetleg zérus számértékhez vezet. Lehetséges azonban az is, hogy ezek az értékek nem teljesen függetlenek egymástól. Ha nagyságukat a termék sajátsága és felhasználásának helye már meghatározza, akkor csak $2n$ független értékünk lesz. Ez akkor áll fenn, ha közelítőleg egynemű a termék, és ezt anyagának időtállósága jellemzi, amit aztán felhasználásának sajátos célja még módosíthat. Ez a kétféle adat lehet például a termelés és az élettartam ideje. De lehetséges az is, hogy a kibocsátott termék tartósságát teljesen

[2] Régebbi számításaimban nemegyszer szegtem meg ezt a szabályt, bár észrevehetően zavaró következmények nélkül. Például az állami szektor szolgáltatásait gyakran „nem felhalmozhatónak" minősítettem. Így a tőkelekötési mátrix egész megfelelő sora zérussá vált. Ez természetesen szingulárissá tette e mátrixot, de mind a növekedési ráta, mind pedig a ciklusok számítására használt algoritmusok működésképesek maradnak.

meghatározza az, hogy milyen anyagból készül. A készletek és a gyári féltermékek szokásos élettartama általában néhány hónap, a gépek és berendezések fizikai és technikai avulása (egyes kivételektől eltekintve) mintegy évtizednyi nagyságú. Az épületek és építmények várható tartóssága ötventől száz évig terjedhet.

Az első számításokat – a múlt század hatvanas éveiben a tőkemátrixok hiánya miatt – ilyen durván becsült termékélettartamok alapján végeztem. Aránylag jól értelmezhető és nagyságrendileg helyes eredményekhez jutottam olyan mátrix segítségével is, amelyet külön adatgyűjtés nélkül, pusztán a folyó mátrixokból nyertem. Úgy szerkesztettem meg, hogy az n ágazat kibocsátását rendre megszoroztam termékeik hozzávetőleges élettartamával.[3] A még sokáig fennmaradó statisztikai nehézségek miatt az ilyen megoldások, bár elvileg kifogásolhatók, gyakorlatilag még nem kerülhetők el. Ezért nyilván csak hozzávetőleges, pontatlan, pusztán nagyságrendi eredményeket várhatunk, de még ezek is hasznosak, ha pontosan még nem is lehet számolni.

Alapvető összefüggések

Általánosan igaznak tűnik az, hogy minél hosszabbra nyúlik az élettartam, annál alacsonyabb a növekedési ráta, és annál hosszabbak a ciklusok. Ha az élettartamok hosszát valamely pozitív r számmal megszorozzuk, például megduplázzuk, akkor a növekedési ráta r-ed részre – például felére csökken –, és a ciklusok hossza is ugyanezzel a számmal szorzódik, például kétszeresére nő.

Ez annak alapján látható be, hogy mindkét számításban szerepel a $\mathbf{B} = \{t_{ik} \times a_{ik}\}$ mátrix. Ha ebben a mátrixban minden t_{ik} időtartam azonos számmal szorzódik, akkor ez úgy hat, mintha a mátrix egészét szoroztuk volna meg ezzel a számmal. Ármost a növekedés egyensúlyi rátáját az

$$(\mathbf{1} - \mathbf{A})\mathbf{x}^* = \lambda \mathbf{B}\mathbf{x}^* \qquad (1)$$

egyenlettel szokás meghatározni, ahol λ a növekedési ráta és $\mathbf{x}^*$ az egyensúlyi termelés vektora. (A két mátrixot már az előbbiekben meghatároztuk, $\mathbf{1}$ az egységmátrix.) Az egyenlet bal oldala a terméktöbbletet, jobb oldala a növekedést szolgáló kapacitásbővítést fejezi ki. E két mennyiség egyenlősége az egyensúly követelménye. Az egyenletet az $(\mathbf{1} - \mathbf{A})$ Leontief-mátrix inverzével, vagyis a „multiplikátorral”, tehát a $\mathbf{Q} = (\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1}$ mátrixszal szorozva az

$$\mathbf{x}^* = \lambda \mathbf{Q}\mathbf{B}\mathbf{x}^* \qquad (2)$$

sajátérték-egyenlethez jutunk. A növekedési ráta, λ, a pozitív $\mathbf{QB}$ mátrix mindig létező, egyértelmű és szimpla legnagyobb sajátértékének reciproka. A $\mathbf{B}$ mátrix skalárral való szorzása viszont ugyanezzel az értékkel növeli $\mathbf{QB}$ sajátértékeit, s ezért fordított arányban hat a növekedési rátára. Vegyük észre mindjárt, hogy a skalárral való szorzás nem módosítja az egyensúlyi termelés vektorát, csupán a növekedési rátát változtatja meg.

Hasonló a helyzet a ciklusok esetében is. Ezek frekvenciái szintén sajátértékek kiszámításával határozhatók meg, habár valamivel bonyolultabb modell segítségével. Ha a rendszer teljes mátrixát $\mathbf{C} = (\mathbf{1} - \mathbf{A} - \lambda\mathbf{B})$ alakra hozzuk, akkor az (1) egyenlet egyensú-

[3] Ennek korai példája *Bródy* [1966]. Ebben az Egyesült Államok vélhető „egyensúlyi” termelési arányait és növekedési rátáját számítottam. Az utóbbi jól jelezte előre a hatvanas és hetvenes években észlelt körülbelül 4 százalékos átlagos növekedést, és a termelés arányai sem mutattak túl nagy eltérést a ténylegesen tapasztalttól. Az adatok azonban nem voltak használhatók az egyensúlyi termelési árak számítására, mert az oszloponként adódó tőkeigény (a tőke/termelés arány) már jócskán eltért a statisztikailag megfigyelt adatoktól.

lyi vektora $\mathbf{Cx}^* = 0$ alakban írható. Szükség van még egy $\mathbf{C'p}^* = 0$ alakú duális egyensúlyi árvektorra is. Ez esetben a ciklusokat gerjesztő mátrixok a következő egyenletben foglalhatók össze:

$$\begin{bmatrix} \langle \mathbf{Bx}^* / \mathbf{p}^* \rangle & -\mathbf{B} \\ -\mathbf{B}' & \langle \mathbf{B'p}^* / \mathbf{x}^* \rangle \end{bmatrix} \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & -\mathbf{C} \\ \mathbf{C}' & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Ennek a modellnek a sajátértékei határozzák meg a ciklusok frekvenciáit.[4] Itt a bal oldali szimmetrikus mátrixot szorozzuk meg az adott *r* skalárral. Ennek sajátértékei az előbbihez hasonlóan változnak, hiszen minden értékében szerepel a **B** tőkelekötési mátrix. Ezért ugyanúgy változik a ciklusok hossza is. Frekvenciáik ugyanazzal a szorzóval csökkennek, hullámhosszuk tehát e szorzóval szorzódik. A szorzás a ciklusok alakját és mintázatát (a modell sajátvektorait) itt sem változtatja meg.

Az általános szabály tehát azért áll fenn, mert mind a növekedési rátát, mind a ciklusok hosszát olyan sajátértékek adják meg, amelyek a tőkemátrix szorzásával arányosan változnak. Ugyanakkor a szorzás nem érinti a sajátértékekhez tartozó sajátvektorokat. Az egyensúlyi és ciklikus pályákat az élettartamok egyöntetű változása, tehát a tárgyalt szorzás érintetlenül hagyja.

Tétel és ellentétel

Az összefüggés további vizsgálatához vegyük szemügyre a bemutatott törvényszerűséget egyetlen szektorra összevont modell segítségével. Ez a modell nem más, mint a növekedés Harrod és Domar által kifejtett elméletének ismert matematikai alakja. A változatlan sajátvektorokkal történő összevonás hibátlan, az összevont modell tehát nem torzít. Ismeretes, hogy a növekedés λ rátája az s megtakarítási ráta és a b tőkeigényesség hányadosa, $\lambda = s/b$.

A múlt század második felében, amikor a fenti adatok statisztikai megfigyelése megbízhatóbbá vált, körülbelül háromszázalékos átlagos növekedés mutatkozott a fejlett országokban. Ebből $1/\lambda$ értéke 33 évnek adódik. Talán jobb becslés volna egy mintegy 25 és 40 év között szóródó érték, és valóban az egyes országok hosszú távú növekedési rátája körülbelül 2,5 és 4 százalék közt szóródott. Az éves termelés egységnyi bővítése a vállalati szektorban viszont körülbelül 3 egységnyi befektetést kívánt, a b tőkeigényesség tehát mintegy 3 év körül mozgott. A tiszta, nettó megtakarítás: s, a felhalmozás rátája a teljes termelés 10 százaléka körül adódott.

Az egyes évek adataiban azonban a modell összefüggései nem érvényesültek a várt pontossággal. Ennek oka vélhetően a termelés ingadozása, valamint az a tény, hogy az adott év megtakarítása csak lassan és később válik beruházássá, s az ennek hatására létrejövő többletkapacitás is csak a termelés felfutása és az elosztásának befejezése után növelheti meg a termelést. Hosszabb időszak átlagát tekintve azonban az elméleti modell nagyságrendileg jól tájékoztatott.

A tőkeigényesség (b) a **B** mátrix összevont értéke. Ez az előbbi jelölések alapján at alakban írható, ahol az indexekre most nincs szükség, mert a szektorokat összevontuk. Az s megtakarítási ráta, a tiszta többlet hányada pedig $1 - a$ formájú. Világos hát, hogy

[4] Itt a / jel vektorok elemenkénti osztását kívánja meg, < > pedig diagonális mátrix képzését. A modellt *Bródy* [2000] mutatta be. A képlet a piaci keresztszabályozás egyszerű feltevéseit írja le. A termelés növelését a mindenkori ágazati profitráta szabja meg, az árak mozgását pedig a mindenkori túlkínálat (vagy túlkereslet).

a Harrod–Domar-modell csak akkor felel meg a Leontief-modell összevont alakjának, ha a személyi fogyasztást, tehát az ember termelése és fenntartása során felmerülő egyéni fogyasztást is termelőfogyasztásnak tekintjük. Ebben az esetben a növekedési ráta reciprokára azt kapjuk, hogy

$$1/\lambda = at/(1-a) = t(a + a^2 + \ldots + a^n + \ldots). \qquad (4)$$

A (4) egyenlet jobb oldalának számtani haladványa (az időszorzó vagy multiplikátor) végtelen sor ugyan, a megtérülés mégis véges.[5] Itt elérkeztünk Achilles és a teknősbéka versenyének látszólagos ellentmondásaihoz, amelyet a görögök nem tudtak feloldani. Mialatt Achilles ledolgozza a teknősbéka előnyét, addig a teknősbéka is halad valamennyit előre, tehát még mindig előtte jár Achillesnek. Mialatt ezt az újabb előnyt befutja, a teknősbéka megint megtesz valamicske utat, és így tovább, a végtelenségig. A nehézség annak belátásában áll, hogy a végtelen haladvány összege véges idő alatt kialakul, és véges úthosszhoz tart. A mi esetünkben, bár a haladvány itt is végtelen, véges idő alatt végéhez ér, és véges összeg térül meg.

A multiplikátor tehát véges idő alatt véges összeghez tart, habár nem feltétlenül kis összeghez és rövid idő alatt. Keynes hangsúlyozta ugyan a beruházás élénkítő hatását, de azzal nem foglalkozott, hogy milyen hosszú idő alatt térül meg a termelésbe befektetett pótlólagos tőke. Ezt a kérdést az osztrák iskola vetette fel, de számításokat ők sem végeztek. Erre fogunk itt kísérletet tenni.

Itt a végtelen sor az ismert multiplikátor $1/s$ értékét, illetve (az a-val való szorzás miatt) az eredeti befektetéssel csökkentett értékét adta. A t élettartam szorzója a közvetett befektetések vagy ráfordítások végtelen sora. Ezek akár a jövőbe kiterjesztve képzelhetők el (mint a majdan gerjesztendő új befektetések), akár pedig a múlt láncolatából adódhattak (mint a múltbeli ráfordítások). A folyamat az összevont modellben megfordíthatónak tűnik, az idő nyila egyaránt mutathat a múltba vagy a jövőbe. Látni fogjuk, hogy a többszektoros modellekben e nézetet óvatosabban kell kezelni.

Az élettartam és a növekedési ráta inverz viszonya a képletben mindenesetre szabatosan érvényesül. Az élettartam és a növekedési ráta fordított aránya a Harrod–Domar-modellnek is alapvető sajátossága. Ennek az állításnak viszont ellentmond, ha a lekötött tőke b értékéből indulunk ki. Ekkor a ráfordítás, azaz a fogyasztás a együtthatója b/t alakban írható fel, a Harrod–Domar-modell ekkor

$$\lambda = (1 - b/t)/b = (t - b)/tb = 1/b - 1/t \qquad (5)$$

alakú. Ebben az esetben a növekedési ráta az élettartam és a tőkeigényesség különbségének és szorzatának hányadosa, vagyis a tőke termelékenységének és az élettartam reciprokjának a különbsége. Ez az előbbi állítással ellentétes következtetéshez vezet. Ebben az olvasatban minél hosszabb az élettartam, annál kisebb a levonás a tőke $1/b$ nagyságú termelékenységéből. Tehát a növekedési ráta az élettartam növelése esetén nem csökken, hanem – éppen ellenkezőleg – növekszik. De bonyolultabbá is válik a két változó kapcsolata, mert a fordított arány nem változik egyenes aránnyá.

Látszólagos ellentmondáshoz jutottunk. Az ilyen ellentmondások azonban szakmánk sajátos szépségei és buktatói közé tartoznak. Általában abból erednek, hogy nézőpontunkat, vagyis előfeltételeinket nem határoztuk meg a szükséges gonddal. A gazdaságtan így szögesen ellentétes nézetek tudományává válhat – még matematikai köntösben is. Ha

[5] A (4) egyenlet jobb oldalán tehát már nem a tőkeigényesség években mért tartama áll (ezt a sorozat első tagja, *ta* fejezi ki). Ehelyett itt a befektetéssel megindított teljes termelési áramlat (vagy az ahhoz vezető megtakarítási folyamat) jelenik meg, amelyet a későbbiekben részletesebben is vizsgálunk, mint az osztrák iskola által meghatározott „körkörös termelési folyamat" mértékét.

például nem tisztáztuk előzetesen, hogy a termelékenység változását a munkás vagy a gyáros szemszögéből kívánjuk-e vizsgálni, akkor a gyáros a 100 forint munkabérre jutó termelés növekedésével a termelékenység gyarapodásaként büszkélkedhet, miközben a munkás azon aggódik, hogy ugyanazért a munkáért, vagyis ugyanannyi termék előállításáért kevesebb bért vihet csak haza, esetleg pedig még munkanélkülivé is válhat. Vagy egy más területről vett példában a külkereskedelmi mérleg hiánya egyaránt jelenthet nyomasztó veszteséget, de ugyanakkor azt is, hogy kivitelünket magas áron eladva, több külföldi terméket hoztunk be, és ezzel jócskán nyertünk a forgalmon. Ilyenkor „csak” a fizetési mérlegre gyakorolt hatást, vagyis a belföldi és a külföldi árrendszerek eltérését felejtettük el megvizsgálni, vagy egyáltalán említeni. Sok múlik a nézőponton és a körülményeken.

A mi esetünkben a tétel és az ellentétel ellentmondása abból ered, hogy nem tisztáztuk, hanem sötétben és kimondatlanul hagytuk azt a fontos kérdést: mit tekinthetünk változónak, és mit változatlannak. Minek a változásából és minek a változatlanságából indultunk ki. Ha a folyó ráfordítás a rögzített, akkor az első tétel érvényesül, mert az élettartam növekedésével növekszik a tőkeigényesség. Ha pedig a tőkeigényesség az adott, akkor az élettartam növekedése csökkenti a folyó költségeket.

Az ellentmondás a gazdálkodás szempontjából könnyen feloldható. Hogyha a folyó ráfordítások adottak, akkor ezek készletét, a forgótőkét, igyekszünk alacsony szinten tartani. Ilyenkor alacsony élettartamra törekszünk. Ha viszont a termelés valamilyen tartós befektetést igényel gép és berendezés formájában, tehát állótőkét, akkor élettartamát a kellő karbantartással és technikai megújítással növelni igyekszünk, hogy a termelés egységére viszonylag kevesebb amortizáció jusson.

Az olyan ráfordítások tekintetében azonban, amelyek jellege e két kategória közé esik, és mindkét szempontnak eleget tesz (mint például az atomerőművek fűtőeleme vagy az asztali számítógép) bonyolultabban alakul ki az igazán jó és helyes gazdálkodás. Egyszerű modell és elmélet hiányában gyakorta követünk el hibákat, mivel sem a forgóeszközökre, sem pedig az állóeszközökre vonatkozó megfontolás nem érvényesíthető egymagában. A gazdálkodás e speciális bökkenőjét, bár tárgyunkhoz tartozna, itt nem oldjuk fel. Ilyenkor az alkalmazás sajátos és eseti körülményeit figyelembe véve lehet csak az optimális élettartamot és a helyes gazdálkodás módját meghatározni.

A körkörös termelési utak számítása

Mindez azonban semmiképpen sem érinti azt a tényt, hogy egy adott időpontban a kétfajta költséget, a folyó és a tőkeráfordítások értékét az említett időtartamok hossza kapcsolja össze. Ezek nagyságából és e nagyság változásából fontos gazdasági következtetéseket vonhatunk le. Az összevont modell azonban nem ábrázol részleteket, ágazatokat és vállalatokat, és nem ábrázolja a ciklikus mozgást sem, ezért – már az álló- és forgótőke szükségesnek látszó megkülönböztetése céljából is – hűségesebb és megbízhatóbb képet kapunk, ha a termelés folyamatát és időigényeit nagyobb részletezésben írjuk le. Erre teszünk itt kísérletet.

Az input-output elmélet jól alkalmazható a termelés körben forgó termékláncai, illetve termelési áramlatai átlagos (súlyozott) élettartamának meghatározására. A számítás jobb megértése érdekében Leontief nyílt modelljéhez és a Leontief-féle inverz alakjához nyúlunk vissza. Tudjuk, hogy ha valamely adott $\mathbf{y}$ többlettermék vagy végtermék előállításához $\mathbf{x}$ teljes termelés szükséges, akkor e két vektor összefüggését az

$$(\mathbf{1} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{y} \tag{6}$$

képlet adja meg. E szerint a „teljes termelés” úgy értelmezhető, hogy először előállítjuk az $\mathbf{y}$ mennyiségű terméket, majd pótoljuk az ennek előállításához felhasznált $\mathbf{Ay}$ ráfordítást, majd ennek $\mathbf{AAy} = \mathbf{A}^2\mathbf{y}$ szükségletét, és így tovább, a végtelenségig. Ez a Leontief-féle inverz (vagy multiplikátor) értelmezése és mondanivalója.

Tekintsük most ennek a folyamatnak az időszükségletét abban a leegyszerűsített esetben, ha minden termék előállítása és elfogyasztása egységnyi időbe, egy évbe telik. Ebben az esetben a $\mathbf{B}$ tőkemátrix maga az $\mathbf{A}$ folyó ráfordítási mátrix, csak minden együtthatóját 1 évvel meg kell szorozni. Értéke azonos maradt, csak mértékének dimenziója és jelentése változik meg. Ekkor az egymásra következő összes felmerülő gyártási idő, ezt jelölje ő, egyszerű alakban megadható. Azt kell kifejezni, hogy az egymásra következő termelési fázisok mindig egy-egy évvel korábban történtek a múltban:

$$\text{ő} = (\mathbf{A} + 2\mathbf{A}^2 + \ldots + n\mathbf{A}^n + \ldots). \tag{7}$$

E haladvány összegképlete, mivel $\text{ő}(\mathbf{1}-\mathbf{A}) = (\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1}$ és $\mathbf{Q} = (\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1}$, valamint figyelembe véve, hogy $\mathbf{AQ} = \mathbf{Q} - \mathbf{1}$

$$\text{ő} = \mathbf{QAQ} = (\mathbf{Q} - \mathbf{1})\mathbf{Q} = (\mathbf{Q}^2 - \mathbf{Q}). \tag{8}$$

A termelésben eltöltött átlagos időtartamot ezért a $\text{ő}\mathbf{y}/\mathbf{x}$ elemenkénti hányados jellemzi az egyes szektorok termékeinek tekintetében. Ez az összes eltöltött időt (mennyiség szorozva időtartammal) osztja az összes mennyiséggel, tehát éppen a megfelelően súlyozott átlagot adja. A hányadost $(\mathbf{Q} - 1)\mathbf{Qy}/\mathbf{Qy}$ alakban írjuk, nem feledve, hogy az elemenkénti osztás művelete mátrixok esetében már nem engedi meg a számlálóban és a nevezőben egyaránt szereplő $\mathbf{Q}$ értékkel való egyszerűsítést. Felhasználhatjuk azonban a fenti $\text{ő}\mathbf{y}/\mathbf{x}$ hányados $(\mathbf{Q} - \mathbf{1})\mathbf{x}/\mathbf{x}$ alakra való egyszerűsítését, amivel visszajutunk a Harrod–Domar-féle skaláris modellből adódó (4) egyenlet mátrixos alakjához.

Mi történik azonban, ha nem egységnyi, hanem különböző t_{ik} időtartamokra van a tőke lekötve? Kézenfekvő a valóságos $\mathbf{B}$ tőkemátrixot írni az imént használt $\mathbf{A}$ mátrix helyére. Ez esetben a terméktöbblet előállításának átlagos idejét az

$$\mathbf{QBQ}/\mathbf{Q} \tag{9}$$

mátrix elemei adják meg.

Ezt igazolja az a tény is, hogy az $(\mathbf{1} - \mathbf{A})\mathbf{x}^* = \mathbf{y}^*$ egyensúlyi terméktöbbletre vonatkozó súlyozott időtartam éppen a növekedési ráta reciproka. Ugyanis a $\mathbf{Qy}^* = \mathbf{x}^*$ összefüggés felhasználásával a (9) egyenlet nyilván felveszi a $\mathbf{QB}$ mátrix legnagyobb sajátértékét, hiszen a (2) egyenlet alapján $\mathbf{QBx}^*/\mathbf{x}^*$ értéke minden elemében $1/\lambda$ nagyságú.[6]

Teljes általánosságban kimondható tehát, hogy *a növekedési ráta egyenlő az egyensúlyi többlet előállításához szükséges átlagos (súlyozott) idő tartamának reciprokával.*

A növekedési ráta reciproka tehát egyenlő a gazdaság teljes felépítéséhez (vagy ellentétes irányban: a befektetett tőke teljes megtérüléséhez) szükséges időtartammal. Ez az időtartam, mint azt már a statisztika átlagos adatait idézve említettük, nagyságrendileg egy-egy generáció aktív életének felel meg. Természetesnek látszik, hogy lehetőségeink biológiailag adott időhorizontjával összhangban, tehát mintegy saját léptékünkben gondolkodunk, döntünk és dolgozunk, egyszóval így gazdálkodunk az idővel és az időben.

[6] Ezt a sajátosságot *Bródy* [1986] és [1993] dolgozataim egyrészt Leontief dinamikus inverzre, másrészt a sztochasztikus és folytonos, de véges állapotú Markov-láncokra vonatkozó elemi megfontolások alapján két más módszerrel is bizonyították.

Az ellentétel többszektoros alakja

A részletes modellben is érdemes a már tárgyalt ellentételt megvizsgálni. A vizsgálat azonban – éppen a kapcsolat nemlineáris volta miatt – fokozott figyelmet kíván. Már $1/b$, tehát a tőke termelékenységének értéke sem értelmezhető közvetlenül a mátrixos $\mathbf{1/B}$ alakban. A folyó ráfordítások és a tőkeigényesség mátrixai nem feltétlenül regulárisak, tehát általában nincs, vagy igen rosszul kondicionált az inverz (reciprok) mátrix.[7]

Mindig létezik azonban a reciproknak az egyensúlyi ár- és volumenvektorokkal képzett átlagos értéke. Ez a $\mathbf{p}^{*\prime}\mathbf{x}^{*} = 1$ normálást alkalmazva $1/\mathbf{p}^{*\prime}\mathbf{B}\mathbf{x}^{*}$ alakban írható fel. Ez a normálás azt jelenti, hogy a tőkeigényességet a teljes termelés hányadaként fejezzük ki. Az alkalmazott tőkék összegének mérése itt feltételezi azt, hogy ismerjük a tőke részeinek egyensúlyi értékelését. Ezt már *Sraffa* [1960] élesen hangsúlyozta alapvető művében.[8] A nehézség a gazdálkodás irreverzibilitásából fakad: abból, hogy bár egyértelműen meg tudjuk mondani, hogy a termelés növelése milyen és mekkora ráfordításokat kíván, tehát a többlettermék milyen arányaira van ehhez szükség, a fordított út már nehezen járható, mert nem egyértelmű. A többlettermékek valamilyen megadott halmaza csak korlátozza, de nem szabja meg a termelés tényleges bővítésének irányát és arányait. Ez tehát azt jelenti, hogy összevont gazdasági számítást csak valamely részletesen kidolgozott és (legalábbis közelítő módon) egyensúlyba hozott többszektoros modell alapján szabadna elvégezni.

Az átlagos élettartamot azonos okból szintén nem lehet másképpen kifejezni, mint a $\mathbf{p}^{*\prime}\mathbf{B}\mathbf{x}^{*}/\mathbf{p}^{*\prime}\mathbf{A}\mathbf{x}^{*}$ hányadossal. Az átlag tehát nem számolható közvetlenül a t_{ik} élettartamokból, mert a helyes súlyozást mindkét mátrix értékei befolyásolják. Ennek az értéknek a reciproka $\mathbf{p}^{*\prime}\mathbf{A}\mathbf{x}^{*}/\mathbf{p}^{*\prime}\mathbf{B}\mathbf{x}^{*}$, és ez az érték *nem* egyenlő a $1/\mathbf{p}^{*\prime}(\mathbf{B}/\mathbf{A})\mathbf{x}^{*}=1/\mathbf{p}^{*\prime}\mathbf{T}\mathbf{x}^{*}$ skalárral. A helyes forma egyértelművé teszi, hogy t_{ik} növekedése most a_{ik} értékét csökkenti, és emiatt a növekedés rátája kiszámítható módon növekszik.

Élettartam és megtérülés

Palgrave gazdasági szótárának *flows and stocks* szócikke azt írja, hogy a kereslet szempontjából közömbös, hogy milyen célra vásárol a vevő. Az eladót csöppet sem érdekli, hogy e cél a folyó fogyasztás vagy a felhalmozás. Csak a kereslet összege számít. De ez csak addig igaz, amíg ezt eleve adottnak véljük. A kereslet kialakulását azonban a növekedési ráta és az élettartam várható értéke erősen befolyásolja. Számítsuk ki, mekkora a kereslet zérus növekedés (stagnálás), 3 százalékos (normális) növekedés, valamint 6 százalékos növekedés (fellendülés) esetében, például a szőlő iránt, ha azt napi (rögtöni) fogyasztásra, egy év alatt fermentálódó újbor előállítására, vagy tíz év alatt beérő óbor céljára szánjuk. Legyen stagnálás (önhelyreállító termelés) esetében mindhárom célra egyforma a kereslet, mondjuk 100 + 100 + 100 = 300 mázsa. Az első száz mázsát a vásárlás évében fogyasztják, a másodikat a forrás és tisztulás után egy év múlva, míg az óbor csak tíz év múlva kerülhet piacra. De stagnálás esetében közömbös, hogy a végtermék előállítása milyen hosszú ideig tart. Ha azonban 3 százalékos növekedéssel számolunk, akkor már 100 + 103 + 134 = 337 mázsa a keresett mennyiség, tehát a kereslet majdnem 11 százalékkal bővül. Ha 6 százalékos fellendülést várunk, akkor pedig

[7] Elég annak feltételezése, hogy két azonos vagy hasonló vállalat vagy ágazat létezik, s akkor mindkét mátrix szinguláris.

[8] Érdekes, hogy Sraffa bíráló művének máig sem cáfolt ellenvetését milyen közömbösséggel tolják félre a modern elméletek, bár az a piaci kudarcok leggyakoribb és legmélyebb okát tárta fel.

100 + 106 + 179 = 385 mázsát kell vásárolni, ez pedig közel 30 százalékkal növeli a keresletet.

Ami a tárgyi termelésre áll, az áll ennek ellenértékére, tehát a folyamat duális értékviszonyaira is. A termelésben lekötött érték, azaz a tőke valóságos tömege, vagyis az előlegezendő, befektetendő pénz mennyisége nyilván hasonlóan növekszik, ha a tervezett növekedési ráta változik. Itt is figyelembe kell venni a lekötés időtartamát, a megtérülési idők meghosszabbodását, amit a növekedési ráta látszólag csekély ingadozása, azaz a ciklus folyamán szinte ártalmatlannak tűnő néhány százalékos ingadozás okoz.

Nem csak arról van szó, hogy az egyszerű újratermeléshez képest a 3 százalékos növekedés több mint 10 százalékos keresletnövekedést, az újabb 3 százalékos, összesen 6 százalékos fellendülés már közel 30 százalékos pótlólagos összeg kiadását kívánja meg. Ez akkor is bekövetkezik, ha az ár változatlan. De az ár változatlansága nem valószínű, hiszen ha a kereslet nő, akkor az árak is emelkedni szoktak. Ráadásul a növekvő összeget hosszabb időre kell lekötni, mert megtérülése a kezdeti átlagos 3 egész és 2/3 évről közel 5 évre nő.[9]

Ha a (3) egyenletet figyelmesebben megvizsgáljuk, ahogyan az a növekedés (és a kialakuló ciklusok folyamán) mind termék-, mind pedig pénzszükségletét nyomon követi, akkor kitűnik, hogy a tárgyi, „primális" oldal automatikusan működik. Ez az automatizmus ellátja önmagát.[10] A pénzügyi, „duális" oldalon azonban adódhat probléma. Ugyanis a befektetett tőke értékének árnövekedése (amelyet a szektorok és vállalatok profitként érzékelnek) szükséges pénzbeli ráfordítása a növekedésnek, tehát a ciklikus fellendülésnek is. Ezt a többletértéket azonban, mivel a befektetett tőke – éppen lekötése miatt – nem kerül folyamatos cserére (bár elvben a tőzsde folyamatosan jelzi értékének növekedését vagy csökkenését), nem folyósítja senki automatikusan. Ezt az összeget ezért hitelre szokták felvenni. E hitelnek megvan ugyan a szükséges fedezete, azonban folyósítása mégis olyan művelet, amihez a bank bizalmán kívül a bank hitelbővítési, pénzteremtő képessége és akarata is szükséges. Ez viszont azt jelenti, hogy a rendelkezésre álló pénz mennyiségének nemcsak a növekedést, hanem a fellendülés kialakította időszakos többletkereslet is el kell látnia, ha nem kívánja akadályozni a termelés és forgalom lebonyolódásának menetét. Ez alakíthatja ki azt a pénzbőséget, amely viszont állandó inflációt okoz. Ennek rátája egyébként szintén hajlamos ciklikus ingadozásra, bár mozgása általában eseti és ingadozó fáziseltolódást mutat a növekedés rátájához képest.[11]

Az infláció, amelynek szokásos és átlagos rátája egyébként a növekedés átlagos rátájának felel meg, a modern gazdaság ismert és állandó jelenségévé válik. Ezért megfontolandó, hogy nem volna-e hasznos a gazdasági egyensúly hagyományos meghatározását és követelményeit átfogalmazni. Ezek a követelmények ma aszimmetrikusak, mert a termelés konstans rátával való növelése mellett az árak változatlanságát kívánják meg. Az egyensúly elméleti követelménye szimmetrikussá tehető, és így szebbé, általánosabbá, és talán hasznosabbá is válik, ha mindezt elismerve, mindkét oldalon azonos konstans rátájú növekedést írunk elő. Ez a konstans ráta lehet zérus, sőt képzetes szám is, s így a rendszer lehetséges stagnálását és ciklusait is felölelheti. Mindez a fentebb közölt képleteken és működésükön mit sem változtatna, csak értelmezésüket tenné általánosabbá, és jobban simulna a valóságban tapasztalható folyamatokhoz.

[9] A helyes dimenzió figyelembevétele a pénzzel foglalkozó szakirodalomban jobbára elhanyagolt. A jövedelem és a tőke megkülönböztetése már eleve is nehéz a pénz esetében, a pénztőke lekötésének változó időtartamát (s ennek következményei) pedig csak a diszkontálás irodalma említi.

[10] Ciklikus növekedés a pénz nélkül, természetben gazdálkodó gazdaságban is kialakulhat, és ki is alakul.

[11] Általában meg kellene előznie a termelés változását, de ezt statisztikailag még nem vizsgáltam.

Következtetések és hipotézisek

A termelési körút és a növekedési ráta inverz kapcsolata elméleti tétel. Ha ebből gyakorlati következtetést akarunk levonni, akkor több körülményt is figyelembe kell vennünk. Ezekre egy tárgyunkhoz közel álló tanulmánykötet három neves kutatója hívja fel a figyelmet (*Simonovits–Steenge* [1997]). Az elméletet a gyakorlattal minden tudományág másként köti össze, és az összekötő út mindenütt rögös. Még a legegzaktabb kvantumfizikának is el kell tűrnie az esetleg létező, de még nem ismert rejtett változók vagy a mérések elkerülhetetlen bizonytalansági relációja okozta kétségeket. A hiba mindig a modell feltételezéseiből és a mérés nehézségeiből adódik. Maguk a modellek, amelyekben matematikailag szabatos eredményekhez jutunk, előfeltételeken alapulnak a gazdaságtanban is. Ezeket különös gonddal kell kezelni, mert a gyakorlati összefüggések szakadatlan változásán, a termelés és technika folytonos megújításán kívül az elvégezhető mérések gyakorlata is sajátos korlátokat szab a kimondható következtetéseknek.

Raa [1997] szerint a Leontief által megfogalmazott zárt és dinamikus modell (1) egyenlete, amely az egyensúly meghatározására szolgál (és ezért az összes ezen alapuló további egyenlet és megfontolás is), csak közelítés. A ráfordítások a valóságban nem simán és egyenletesen történnek, a termelés hívebb leírására általánosított függvények, az úgynevezett „disztribúciók” az alkalmasak. A két modell csak exponenciális élettartam és azonnali ráfordítás feltételezése esetén kerül összhangba.[12] *Carter* [1997] a technikai változás eredetét, terjedését és hatását vizsgálva, úgy látja, hogy ezek erősen csorbítják a hosszabb távra is változatlan együtthatók feltételezését. Végül *Reich* [1997] a nemzeti számvetés és a statisztika, tehát a számításokhoz használt adatrendszerek ár- és volumenindexeinek példáján mutatta be a gazdasági mérés korlátozott pontosságát.

Mindezért az elmélet csak olyan következtetés kimondását engedi meg, amely elég erőteljes ahhoz, hogy ne torzulhasson el teljesen a modell, a valóság és a mérés okozta elég durva hibák miatt. Csak olyan nagyságrendek és tendenciák állapíthatók meg, amelyek mindezen hibaforrások torzító hatását figyelembe véve is érvényesülnek.

Tételünk a lehetséges hibák mérlegelése után is felvet két egymással összefüggő kérdést, amelyeket a gazdaságtan még nem válaszolt meg világosan. Mindkét kérdés a hosszú távú növekedési ráták változatlansága, viselkedése és kialakult arányai miatt merül fel, de már régebben lappang, sőt többé-kevésbé ismertté is vált a termelési függvények elméletében.

Az érték forrása a tőke és a munka. Ezek gyarapodása azonban nem elégséges a termelés statisztikailag megfigyelt növekedésének magyarázatához. Úgy véltük ezért, hogy a tőke és a munka növekvő termelékenysége az a „maradékváltozó”, ami a termelés növekedési rátájának a tőke és a munka növekedését jóval meghaladó mértékét indokolja.[13] Ezért az a megoldás az elfogadott, hogy az idő folyamán termelékenyebbé váló tőkét és munkát egyre magasabb minőségűnek tekintsük, és e növekvő minőségnek tulajdonítsuk a ráták hosszabb távon világosan megmutatkozó eltérését. Ez ugyan számítástechnikailag jól működő megoldás, de így a javuló minőség nem jut kifejezésre a tőke és munka növekvő árában. Ez azonban visszás és gazdaságtalan elosztás felé terelné a gazdaságot, tehát elméletileg nehezen elfogadható.

Lehet azonban, hogy eleve hibásan mértük le e tendenciákat. A tőke, munka és termelés mérése mindhárom változó esetében főként vállalati adatokon alapul. Ezekben nem

[12] E lehetőség kihasználását még nem tudtam szabatosan megoldani, ezért már írásom elején kizártam a tárgyalásból.

[13] A fejlett országok növekedésének forrását Solow és követői oroszlánrészben a termelékenység (ma egyébként valamelyest csökkenő ütemű) növekedésének tulajdonítják.

szerepel tehát sem a háztartások, sem pedig a közösség vagyonának bővülése. Bár a gazdasági élet lebonyolításához és így magához termeléshez ezek is szükségesek, mégsem számolunk velük, sőt még terjedelmük és növekedésük méréséhez sem fogtunk hozzá. Azt azonban tudjuk, hogy az elmúlt évszázadra a fejlett országokban az állam szolgáltatásainak jelentős növekedése a jellemző, valamint az egészségügy forradalma, amely az emberi élettartam jelentős növekedését eredményezte. Mindenképpen jelentős tehát az állami, háztartásbeli és humán tőke felhalmozódása. Miután azonban ennek pontos mértékét még nem ismerjük, ezért csak hipotézist állíthatunk fel. E hipotézis azt mondaná ki, hogy a tőkevagyon tényleges növekedése elégséges a teljes növekedési ütem elfogadható magyarázatához.

Ezt logikailag alátámasztja, hogy a tőke és munka megtakarításának elméletileg jelentősen növelnie kellene a növekedés ütemét. Ezt azonban nem tapasztaltuk, a gyakorlatban szignifikáns gyorsulás nem mutatkozott. Így merül fel a második kérdés, hogy a termelés körútjai a várakozásokkal ellentétben miért nem változnak meg észrevehetően. Erre ismét csak újabb hipotézis lehet a válasz. Ez a hipotézis azt mondaná ki, hogy a munka megosztásának kétségtelen növekedése ugyan növeli a társadalom termelékenységét, tehát hatékonyan gyorsítja a termelés menetét, de ugyanakkor a termelés szerkezetének változása, a termékek és szolgáltatások számának gyarapodása és elosztásuk bonyodalmai ellentétes tendenciákat hívnak létre. Mindez pedig nagyjából-egészéből kiegyenlíti az ellentétes tendenciákat.

Hangsúlyozni kell, hogy adatok és vizsgálatok hiányában mindez csak hipotézis. Bizonyítása vagy cáfolása csak akkor lehetséges, ha megbízható adataink lesznek. Ezek csak akkor fognak rendelkezésre állni, ha az eredetileg a társadalom jövedelmének és vagyonának nyilvántartását célzó, már a 20. század elején kitűzött statisztikai célokat a 21. században valóra is váltjuk. Hozzá kell látni, és el kell jutni a jövedelmek mellett a vagyon hiteles és elfogadható számbavételéhez is. Mivel azonban a vagyon elosztása nyilvánvalóan sokkal egyenlőtlenebb, mint a jövedelemé, mindezt éles politikai torzsalkodások fogják kísérni, amelyek sokkalta élesebbek lesznek azoknál a vitáknál, amit a jövedelmek számbavétele során a 20. század hozott.

Hivatkozások

Bródy András [1966]: A Simplified Growth Model. Quarterly Journal of Economic. február.
Bródy András [1969]: Érték és Újratermelés. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.
Bródy András [2000]: A wave matrix. Structural Change and Economic Dynamics.Vol. 11.
Carter. A. [1997]: Changes as Economic Activity. Megjelent: *Simonovits. András–Steenge, A. E* [1997] 19–43. o.
Hawkins, D. [1948]: Some Conditions of Macroeconomic Stability. Econometrica, október.
Lange, O. [1952]: Some Observations on Input-Output Analysis. Shankhaya, Vol. 17. Part 4.
Leontief, W.–Bródy András [1995]: Moneyflow Computations. Economic Systems Research, 5.
Marx, K. [1953]: A tőke II. kötet. Szikra, Budapest.
Raa, ten T. [1997 : Brody's Capital. Megjelent: *Simonovits–Steenge* [1997] 218–223. o.
Reich, U. P. [1997: Index Numbers and the Theory of Value. Megjelent: *Simonovits–Steenge* [1997] 5–57. o.
Simonovits. András–Steenge, A. E. (szerk.) [1997]: Prices, Growth and Cycles. Macmillan Press Ltd., London.
Sraffa, P. [1960]: Production of Commodities by Means of Commodities. A Prelude to a Critique of Economic Theory. Cambridge University Press. Cambridge.