Közgazdasági Szemle, L. évf., 2003. február (99–111. o.)

ESŐ PÉTER–SIMONOVITS ANDRÁS

Optimális járadékfüggvény tervezése rugalmas nyugdíjrendszerre

Ez a dolgozat a mechanizmustervezést alkalmazza a rugalmas nyugdíjrendszer (nemlineáris) optimális járadékfüggvényének kiszámítására. Föltesszük, hogy az egyéneknek magáninformációjuk van saját várható élettartamukról. A kormányzat célja: egy olyan nyugdíjmechanizmus (járulékkulcs és a szolgálati időtől függő járadékfüggvény) tervezése, amely maximalizál egy társadalmi jóléti függvényt, és kielégít egy társadalmi költségvetési korlátot. Mivel a különböző várható élettartamú egyének optimalizálási feladata függ a járadékfüggvénytől, a kormányzatnak figyelembe kell vennie az érdekeltségi feltételeket.

E feladat megoldását különféle társadalmi jóléti függvények esetére adjuk meg. Utilitarizmus esetén a megoldás egy teljesen rugalmatlan rendszer, amelyben minden egyén egyforma életkorban, egyforma éves nyugdíj mellett vonul nyugdíjba, és meglepő módon, a teljes információjú, első legjobb megoldás megvalósítható. Ha azonban a társadalmi jóléti függvény szigorúan konkáv, akkor a várhatóan rövidebb élettartamú egyének korábban mennek nyugdíjba, és a nyugdíjuk kevesebb, mint az első legjobb megoldásé. Az optimális nyugdíjrendszerben a várhatóan rövidebb élettartamú egyének „támogatják" a várhatóan hosszabb életűeket. Kiszámítjuk az optimális járadékfüggvényt állandó relatív kockázatkerülési együtthatójú (CRRA) hasznosságfüggvényre és realista paraméterértékekre, valamint ismertetjük a numerikus eredményeket.

Journal of Economic Literature (JEL) kód: D82, D91, H55.

1. Bevezetés

Bár egyre több helyen egyre jobb egészségben egyre tovább élnek, az emberek egyre hamarabb mennek nyugdíjba. Például *Coile–Gruber* [2000] szerint az Egyesült Államokban 1950-ben még a 62 éves férfiak 81 százaléka dolgozott, 1995-ben ez az arány 51 százalékra esett vissza (mellesleg az Egyesült Államokban 62 év a minimális, 65 év a normális nyugdíjkorhatár). E jelenség gyakori magyarázata az, hogy sok országban a nyugdíjszabályokat rosszul tervezték (*Stock–Wise* [1990], *Samwick* [1998], *Gruber–Wise* [1999]). Ez a hiba egyebek mellett veszélyezteti a tb-rendszerek fenntarthatóságát. Ezért nagyon fontos, hogy e nyugdíjszabályokat úgy javítsuk meg (például a nyugdíjkorhatár emelésével), hogy a tb-rendszer fenntartható maradjon, miközben más célok: biztosítás, méltányosság és az egyéni különbségek figyelembevétele szintén megvalósuljanak.

Eső Péter MEDS Department, Kellogg School of Management, Northwestern University.
Simonovits András az MTA Közgazdaságtudományi Kutatóközpontjának tudományos tanácsadója.

Ebben a dolgozatban az optimális rugalmas nyugdíjjáradék tervezését azon feltétel mellett mérlegeljük, hogy az egyéneknek magáninformációjuk van saját várható élettartamukról. A kormányzat célja: olyan nyugdíjszabályokat (járulékkulcsot és járadékfüggvényt) tervezzen, amely maximalizál egy társadalmi jóléti függvényt, és kielégít egy társadalmi költségvetési korlátot. Mivel a különböző várható élettartamú egyének optimalizálási feladata függ a szabályoktól, a kormányzatnak figyelembe kell vennie az érdekeltségi feltételeket. Az optimális mechanizmustervezésből, különösképpen *Mirrlees* [1971] által kezdeményezett optimális jövedelemadózásból ismert módszereket fogjuk alkalmazni, hogy megtaláljuk a kormányzati feladat második legjobb megoldását (vö. *Varian* [2001] 36.7. alfejezet).

Egyes (előzetes és hiányos) eredményeink megerősítik a klasszikus mechanizmustervezésből ismert intuíciót („nincs torzítás a tetőn”), más eredményeink viszont meglepők. Például ha a társadalmi jóléti függvény utilitarista, akkor a kormányzati feladat második legjobb megoldása egy teljesen rugalmatlan rendszer, amelyben minden egyén egyforma életkorban és egyforma éves nyugdíj mellett vonul nyugdíjba, és egyben ez a (teljes információjú) első legjobb megoldás. Ha azonban a társadalmi jóléti függvény szigorúan konkáv, akkor a várhatóan rövidebb élettartamú egyének korábban mennek nyugdíjba, és a nyugdíjuk kevesebb, mint az első legjobb megoldásé.

A nyugdíjirodalomban először *Diamond–Mirrlees* [1978] tanulmányozott mechanizmustervezési feladatot, nevezetesen a rokkantsági nyugdíjakra vonatkozóan. Az irodalom zöme azonban olyan modellekre összpontosította a figyelmét, ahol az egyéni preferenciák (például a munkaáldozatok) heterogének, és elhanyagolt más fontos szempontokat. Nevezetes és friss kivétel *Diamond* [2002] könyve, amely több modellt is elemez, egyikükben az egyéni élettartam heterogén. Ettől függetlenül, *Simonovits* [2001] javasolt egy olyan modellt, ahol az egyének ismerik saját várható élettartamukat és szabadidő-rugalmasságukat, de a kormányzat csupán e paraméterek eloszlását ismeri. Az a tanulmány az ösztönzés tompítását javasolta, és utalt az optimális mechanizmustervezés alkalmazhatóságára. Ezt a feladatot hajtjuk most végre. Elmagyarázzuk, miben különbözik megközelítésünk és eredményünk az irodalomban szokásostól.

E dolgozattal ellentétben, az irodalomban szokásos az a feltevés, hogy a kormányzatnak és az egyéneknek ugyanaz az információjuk van a várható élettartamról, és az aszimmetrikus információ az egyéni munkaáldozatra vonatkozik. Ebben az esetben az optimális járadékfüggvény az úgynevezett *biztosításmatematikailag méltányos* változat, ahol $b^F(R) = \tau R/(m - R)$, R a szolgálati idő, τ a járulékkulcs, m az egyének közös várható élettartama, és $b^F(R)$ az R éves szolgálati idővel nyugdíjba vonuló egyén évi nyugdíja. E mellett a járadékfüggvény mellett azok a dolgozók, akik szeretik a szabad időt, korábban mennek nyugdíjba, és kisebb életpálya-járulékukkal arányos s hosszabb hátralévő élettartamukkal fordítottan arányos életjáradékot kapnak. [Ha nincs leszámítolás, akkor az életpálya során a befizetések és a kifizetések megegyeznek: $\tau R = b^F(R)(m - R)$.]

Ha tényleg nincs aszimmetrikus információ az élettartamot illetően, akkor a biztosításmatematikailag méltányos ösztönzés optimális (*Börsch-Supan* [2001]). Ha azonban egyes egyének tudják, hogy várható élettartamuk hosszabb, mint az átlagos, akkor később mehetnek nyugdíjba, mint az átlag (közelebb m-hez), és aránytalanul nagy életjáradékot élvezhetnek hátralévő életükben. Ezért ez az ösztönzés egyáltalán nem biztos, hogy ilyenkor működőképes.

A hagyományos méltányosság logikáját aláássa, hogy az egyéni élettartam és a szolgálati idő között erős pozitív korreláció van: aki tovább él, az tovább is dolgozik. Ezt a pozitív korrelációt *Waldron* [2001] igazolta empirikusan, és *Simonovits* [1998], [2001] és *Gruber–Orszag* [1999] logikailag is levezette. Egy közvetett (de vitatott) érv amellett, hogy az egyének képesek előre jelezni várható élettartamukat a következő tény: a magán-életjáradékot vásárlók korspecifikus halálozási rátája jóval kisebb, mint a teljes népességé (*Friedman–Warshawski* [1990]).

Diamond [2002] 6. és 7. fejezete foglalkozott az optimális járulékkulcs és járadékfüggvény kérdésével. Diamond végtelen (kontinuum) sok típusú (élettartamú és a vele korreláló fogyasztási rugalmasságú) egyénből álló sokaságot vizsgált, s az egyének két időpontban mehettek nyugdíjba: korán vagy későn. Egy rokon témájú cikkben *Simonovits* [2002] azt az esetet vizsgálta, amikor az élettartam és a fogyasztási rugalmasság tetszőleges kétdimenziós eloszlású lehet; a szolgálati idő tetszőleges lehet, de általános helyett lineáris járadékfüggvényre szorítkozott.

A korábbi nyugdíjösztönzési irodalomhoz való legfontosabb hozzájárulásunknak azt tartjuk, hogy fontos új irányba terjesztjük ki az optimális járadékfüggvény elemzését: feltesszük, hogy az egyéneknek magáninformációjuk van saját várható élettartamukról. Analitikusan levezetjük azokat az egyenleteket, amelyek meghatározzák a második legjobb optimális járadékfüggvényt. Ez a függvény nagyon különbözik a biztosításmatematikailag méltányostól (amely optimális lenne, ha az egyének nem az élettartamukban, de munkaáldozatukban különböznének egymástól). A társadalmilag optimális (és ösztönzéssel összeegyeztethető) járadékszabály szintén újraelosztást hajt végre: a várhatóan rövidebb életűektől a hosszabb életűekhez csoportosít át. (Ez minden, az érdekeltségi feltételt kielégítő mechanizmusra igaz, beleértve a hagyományos méltányos rendszert is.) Az optimális járadékfüggvény tulajdonságai a társadalmi jóléti függvény alakjától függnek: egyenlősítőbb társadalmi célok rugalmasabb járadékszabályokhoz vezetnek.

Elméleti elemzésünket kiegészítjük numerikus elemzéssel. Reális paraméterértékekkel számolva, például az *1.a–d ábrán* azt az esetet szemléltetjük, amikor az egyéni élettartamok egyenletesen oszlanak el 49 és 59 év között,[1] és a járulékkulcs 20 százalék. A lényeg: az optimális járadék kicsit nagyobb, mint a hagyományos járadék rövid szolgálati idő esetén, és sokkal nagyobb hosszú szolgálati idő esetén. Ez a megfigyelés hasonlít *Diamond–Mirrlees* [1986] észrevételéhez: „az optimális járadékok nőnek a nyugdíjkorral, de lassabban, mint ami biztosításmatematikailag méltányos lenne." (27. o.)

A cikk szerkezete a következő. A 2. pont bemutatja a modellt. A 3. és a 4. pont rendre meghatározza az első és második legjobb optimumokat. Az 5. pont vázolja a numerikus megoldás algoritmusát, és a 6. pont a szimulációt mutatja be. A 7. pont a következtetéseket tartalmazza.

2. A modell

A cikkben a következő feladatot vizsgáljuk. Létezik az egyéneknek egy (stacionárius) népessége, amelynek tagjai egyoldalúan ismerik saját várható élettartamukat. Minden egyén 0 évesen lép be a munkapiacra, és egységnyi terméket termel évente. Amint az megszokott az időskori nyugdíjmodellekben, feltesszük, hogy a dolgozók nem takaríthatnak meg. [Több oka is van annak, hogy a dolgozók nem tudnak öregkorukra megfelelő mértékben megtakarítani: a termékek egy jelentős része romlandó, a magán-életjáradékok vétele nagyon drága (éppen az általunk vizsgált aszimmetrikus információ miatt), az egyének rövidlátók.] A modellben a két első magyarázat bármelyikét használhatjuk, mindenesetre szükség van egy jól tervezett nyugdíjrendszerre.

A modell, amelyet mérlegelünk, élethű a következő értelemben. A nyugdíjrendszer első összetevője a $\tau < 1$ járulékkulcs, amelyet a dolgozók fizetnek (más adóktól eltekin-

[1] Az eredmények értelmezéséhez megjegyezzük, hogy – mint később látni fogjuk – minden egyén 0 évesen lép be a munkapiacra.

tünk). Amikor a dolgozó nyugdíjba megy, mondjuk R évesen, abbahagyja a termelést, nem fizet többé járulékot, viszont $b > 0$ nagyságú éves életjáradékot kap. A kormányzat alakítja ki a τ járulékkulcsot, és a $b(R)$ járadékfüggvényt. Megköveteljük, hogy a rendszer pénzügyi egyensúlyban legyen (azaz a várható járadékok nem lehetnek nagyobbak a várható járulékoknál). Nem engedjük meg, hogy a járadékok megszűnjenek vagy akár csökkenjenek az életkorral együtt. Kizárjuk, hogy életjáradék helyett egy adott tőkét adjanak a nyugdíjasnak nyugdíjazásakor. Ilyen trükkök nemcsak a megoldást tennék triviálissá, de – s ez fontosabb – ellentmondanának a társadalombiztosítás céljának. (Például az utóbbi esetben az egyén kénytelen lenne a nyugdíjtőkéjéért magán-életjáradékot venni, amely megoldás ugyanúgy szenvedne az élettartamra vonatkozó aszimmetriából fakadó kontraszelekciótól.)

Egy egyén v életpálya-hasznosságfüggvénye a dolgozói és nyugdíjas szakasz összege. Ha a t típusú egyén R évet dolgozik, akkor $u(1-\tau)$ hasznossághoz jut R éven keresztül, és $w(b)$ hasznossághoz $t - R$ éven keresztül, tehát az életpálya-hasznosságfüggvény

$$v = Ru(1-\tau) + (t-R)w(b). \tag{1}$$

Megjegyezzük, hogy ha $\tilde{t}$ jelöli a t típus véletlen élettartamát, akkor

$$\tilde{v} = Ru(1-\tau) + (\tilde{t}-R)w(b) \tag{1'}$$

lenne a véletlen életpálya-hasznosság. Várható értékre térve, visszakapjuk (1)-et. Ugyanez elmondható a későbbiekben bevezetendő egyéni egyenlegekre is.

Az egyén szabadidő-preferenciáját $u(\cdot)$ és $w(\cdot)$ éves hasznosságfüggvények különbözősége tükrözi. Az egyszerűség kedvéért föltesszük, hogy $u(x) = w(x) - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, ahol ε a munka határáldozata. Egyetlenegy megszorítást teszünk u-ra és v-re:

$$w(0) - w'(0)\tau < u(1-\tau) < w(1) - w'(1)(\tau+1). \tag{2}$$

A kormányzat egy optimális $\langle b(R), \tau \rangle$ nyugdíjrendszert tervez, amely maximalizál egy additív konkáv társadalmi jóléti függvényt: $\sum_t \psi(v_t) f_t$, ahol f_t a t várható élettartamú egyének relatív gyakorisága. (Vegyük észre, hogy különböző élettartamú egyének életpálya-hasznosságát összeadva, vagy egy korosztály életpálya jólétét, vagy a stacionárius népesség egyéves jólétét mérjük! Ugyanez elmondható a későbbiekben bevezetendő egyéni és aggregált egyenlegekre is.)

A kormányzati feladatot két részfeladatra bonthatjuk: a tervező először adott τ járulékkulcs esetén optimalizálja a társadalmi jóléti függvényt a $b(R)$ járadékfüggvény szerint, majd a parametrikus maximális társadalmi jóléti függvényt optimalizálja τ szerint. Modellünkben a tb-járulékkulcs független az életkortól, ezért teljesen a járadékfüggvényre hárul, hogy az egyéneket élettartamuk szerint osztályozza. (Modellünkkel ellentétben, a valóságban a tb-járulékhoz hasonló szerepet játszó szja függ az életkortól, s ezzel *Diamond–Mirrlees* [1978] foglalkozik is.) Mivel a kormányzat nem figyeli meg az egyének magáninformációit, a nyugdíjrendszernek (bayesi) ösztönzési kompatibilisnek kell lennie. Nincsen szükség viszont a részvételi korlátra, hiszen a részvétel kötelező. (Ehelyett egy keresztmetszeti költségvetési korlátunk van, akárcsak az optimális jövedelemadóztatásban.)

3. Az első legjobb megoldás

Ebben a pontban a mechanizmustervezési feladat megoldását a következő feltevés esetén elemezzük: az egyéneknek *nincs* magáninformációjuk saját élettartamukról. Csak azt tesszük föl, hogy minden dolgozó várható élettartama mindenki által megfigyelhető.

Ez a megoldás mérceként szolgál a 4. pontban vizsgálandó második legjobb megoldáshoz.

A teljes informáltság miatt a társadalmi tervező (a mechanizmusszerkesztő) képes első legjobb nyugdíjtervet készíteni, a t típusú dolgozóknak R_t szolgálati időt és b_t éves nyugdíjat rendelve. Feltehetjük, hogy $R_t \le t$. Mivel első lépésben τ adott, legyen $\bar{u} = u(1 - \tau)$. Legyen v_t a t várható élettartamú egyén életpálya-hasznosságfüggvénye: $v_t = [\bar{u} - w(b_t)]R_t + w(b_t)t$. A típusok S-től T-ig terjednek, mindkét érték egész szám.

Ekkor a kormányzat az egyéni hasznosságok növekvő és konkáv ψ függvényének súlyozott összegét maximalizálja, azaz

$$\max_{(b_t,R_t)_t} \sum_{t=S}^{T} \psi(v_t) f_t,$$

feltéve, hogy teljesül

$$v_t = [\bar{u} - w(b_t)]R_t + w(b_t)t,$$

$$0 \le \sum_{t=S}^{T} [(\tau + b_t)R_t - tb_t] f_t.$$

Ezt a feladatot hívjuk az *első legjobb optimum feladatának*. Rendeljük λ-t az aggregált költségvetési korláthoz szorzónak, és írjuk föl a megfelelő Lagrange-függvényt:

$$L^* = \sum_{t=S}^{T} \psi\{[\bar{u} - w(b_t)]R_t + w(b_t)t\} f_t + \lambda \sum_{t=S}^{T} \{(\tau + b_t)R_t - tb_t\} f_t.$$

Az elsőrendű feltételek a következők:

$$L_b^{*\prime} = \psi'(v_t) w'(b_t)(t - R_t) + \lambda(R_t - t) = 0 \Leftrightarrow \psi'(v_t) w'(b_t) = \lambda,$$

$$L_R^{*\prime} = \psi'(v_t)[\bar{u} - w(b_t)] + \lambda(\tau + b_t) = 0.$$

Az elsőrendű szükséges feltételekből következik a

0. tétel. *Az első legjobb megoldásban,* $(b_t^*, R_t^*)_{t=S}^{T}$*, a nyugdíj független a várható élettartamtól:* $b_t^* \equiv b^*$*, és kielégíti az*

$$\bar{u} - w(b^*) + w'(b^*)(\tau + b^*) = 0 \tag{3}$$

egyenletet.

A (2) feltevés miatt a (3) egyenletnek van megoldása. Vegyük észre, hogy $\bar{u} < w(b^*)$, s a megoldás egyértelmű, hiszen a bal oldali kifejezés deriváltja negatív.

Ha $\psi' \equiv 1$ (utilitarizmus), akkor sok olyan R_t^* megoldás lehetséges, amely kielégíti az aggregált költségvetési korlátot, feltéve, hogy $b_t^* \equiv b^*$. Egy különleges első legjobb megoldás az *autarkia*, amelyben a költségvetési feltétel minden típusra egyenként teljesül, azaz

$$R_t^A = \frac{b^*}{\tau + b^*} t, \qquad t = S,\ldots,T.$$

Ha ψ szigorúan konkáv, akkor $b_t^* \equiv b^*$, és R_t^* minden $t = S,\ldots,T$ értékre meghatározható az elsőrendű feltételekből:

$$\psi'(v_t) = \frac{\lambda}{w'(b^*)} = \psi'(v_s), \qquad v_t = [\bar{u} - w(b^*)]R_t + w(b^*)t, \qquad s,t \in \{S,\ldots,T\}$$

és az aggregált korlátból. Nyilvánvalóan $s < t$ akkor és csak akkor áll, ha $R_s^* < R_t^*$ is áll. Tipikusan az első legjobb megoldás különbözik az autarktól (az optimumban van újraelosztás).

Figyeljük meg, hogy sem az autarkia, sem az első legjobb megoldás nem elégíti ki az érdekeltségi feltételt, ha ψ szigorúan konkáv. Másképpen a társadalmi tervező képtelen megvalósítani ezeket a nyugdíjazási szabályokat, tudakolván az egyének várható élettartamát és ennek megfelelően különböző szolgálati időt írva elő számukra. Ez azért van így, mert R_t^A (vagy R_t^*) szigorúan nő t-vel, míg b_t^* állandó. Formálisan: R_t^* csak akkor elégíti ki az érdekeltségi feltételt állandó b_t^*-nál, ha R_t^* is állandó.

Milyen megszorításokkal járnak általában az érdekeltségi feltételek a megvalósítható mechanizmusokra? A következő pontban a második legjobb (optimális *és* ösztönzéssel kompatibilis) nyugdíjmechanizmusokkal foglalkozunk.

4. Optimális nyugdíjmechanizmus aszimmetrikus információ esetén

Ebben a pontban elejtjük azt a feltevést, hogy a kormányzat ismeri a várható egyéni élettartamokat. Ekkor a második legjobb megoldást keresve, bevezetjük az érdekeltségi feltételeket, és levezetjük a társadalmilag optimális, érdekeltségi feltételt kielégítő járadékfüggvényt.

A $(b_t, R_t)_{t=S}^T$ szabály érdekeltségi feltétele azt jelenti, hogy a t típus (b_t, R_t)-t választja a lehetőségekből. A szomszédos érdekeltségi feltételek a következők: $t = S,\dots,T-1$,

$$v_t \geq [\bar{u} - w(b_{t+1})]R_{t+1} + w(b_{t+1})t = v_{t+1} - w(b_{t+1}),$$
$$v_{t+1} \geq [\bar{u} - w(b_t)]R_t + w(b_t)(t+1) = v_t + w(b_t),$$

azaz

$$v_t + w(b_t) \leq v_{t+1} \leq v_t + w(b_{t+1}), \qquad \text{ahol } t = S,\dots,T-1. \tag{4}$$

A $w(\cdot)$ monotonitásából következik $b_t \leq b_{t+1}$ (ahonnan következik $R_t \leq R_{t+1}$). Emellett a nem szomszédos korlátok elhagyhatók.

A társadalmi tervező feladata a következő:

$$\max_{(b_t, R_t)_t} \sum_{t=S}^T \psi(v_t) f_t$$

feltéve, hogy

$$v_t = [\bar{u} - w(b_t)]R_t + w(b_t)t,$$
$$0 \leq \sum_{t=S}^T [(\tau + b_t)R_t - tb_t] f_t,$$
$$v_t + w(b_t) \leq v_{t+1} \leq v_t + w(b_{t+1}).$$

A várható t élettartamok ismeretlenek a kormányzat előtt.

Ezt a feladatot a társadalmi tervező *második legjobb megoldás feladatának* nevezzük, és ezt elemezzük a továbbiakban. Mivel a kvalitatív eredmények markánsan különböznek az *utilitarista* és a *szigorúan konkáv* esetben, két alpontra bontjuk az elemzést.

Utilitarista megoldás

Tegyük föl, hogy a társadalmi jóléti függvény utilitarista: $\psi' \equiv 1$. Tegyük még föl, hogy

$$R^* = \frac{b^*}{\tau + b^*} \sum_{t=S}^T t f_t < S, \tag{5}$$

azaz az átlagos élettartamú dolgozó első legjobb szolgálati ideje rövidebb, mint a legrövidebb várható élettartam. (Ez egy ésszerű feltevés az öregségi nyugdíjrendszerben.) Ekkor egy meglepő eredményt kapunk.

1. tétel. *Ha a társadalmi jóléti függvény utilitarista, és (5) érvényes, akkor a társadalmilag optimális járadékszabály teljesen merev*:

$$b(R) = \begin{cases} 0, & \text{ha } R < R^*; \\ b^* & \text{ha } R \geq R^*. \end{cases} \tag{6}$$

Sőt a második legjobb szabály megvalósítja az első legjobb kimenetelt.

Bizonyítás. A (6) járadékszabály megfelel a $b_t^* \equiv b^*$ és $R_t^* \equiv R^*$ azonosságnak. Ez a szabály kielégíti az érdekeltségi feltételeket, mert állandó (a dolgozó elosztása független a típusától). De első legjobb megoldás is, mert a megoldás kielégíti az optimumfeltételt, és a mechanizmus kielégíti a költségvetési szabályt. Emellett (5) miatt $R_t^* \leq t$ minden t-re.

A tétel általánosítható arra az esetre is, amikor (5) nem teljesül. ■

Paradox módon a rugalmas nyugdíjazásra kapott második legjobb megoldás meglehetősen merev: mindenki ugyanannyi ideig dolgozik. Ez a paradoxon az utilitarista társadalmi jóléti függvény következménye, ezért a továbbiakban elvetjük ezt az esetet.

Optimális szabály szigorúan konkáv ψ esetén

Legyen ψ szigorúan konkáv. Az optimális utilitarista szabály továbbra is megengedett és kielégíti az érdekeltségi feltételeket, de társadalmilag már nem optimális. Akármilyen szigorúan konkáv társadalmi jóléti függvényt mérlegelünk, az utilitarista optimum túlságosan sokat csoportosít át a várhatóan rövid életűektől a hosszú életűeknek. Másképp kifejezve: az az elosztás, amelyik minden munkást ugyanannyi szolgálati idővel és ugyanannyi nyugdíjjal küld nyugdíjba, méltánytalannak tűnik egy olyan társadalomban, ahol a szerencsétlenebb (rosszabb génekkel született, és emiatt várhatóan rövidebb életű) egyének haszna nagyobb súlyt kap.

A második legjobb feladat megoldása céljából újrafogalmazzuk a feladatot *Mirrlees* [1986, Section 6] változócsere-módszerével. Legyen a szolgálati idő

$$R(v_t, b_t, t) = \frac{w(b_t)t - v_t}{w(b_t) - \bar{u}},$$

és az életpálya nettó járuléka vagy egyenlege

$$z(v_t, b_t, t) = (\tau + b_t)R(v_t, b_t, t) - tb_t.$$

Egyelőre hanyagoljuk el a felfelé mutató korlátokat, s szorítkozzunk a lefelé mutató érdekeltségi korlátokra! Az átalakított feladat

$$\max_{(b_t, v_t)_t} \sum_{t=S}^{T} \psi(v_t) f_t$$

feltéve, hogy

$$\sum_{t=S}^{T} z(v_t, b_t, t) f_t \geq 0,$$

$$v_{t+1} - v_t - w(b_t) \geq 0, \qquad t = S, \ldots, T-1.$$

Rendeljük λ-t az első korláthoz, és $(\mu_t)_t$-t a korlátok második csoportjához. Ekkor az új Lagrange-függvény a következő:

$$L = \sum_{t=S}^{T} [\psi(v_t) + \lambda z(v_t, b_t, t)] f_t + \sum_{t=S}^{T-1} \mu_t [v_{t+1} - v_t - w(b_t)].$$

Szokásos meggondolással adódik a

2. tétel. *A második legjobb feladat elsőrendű szükséges feltételei $t = S,\dots,T$, esetén,*

$$L'_b = \lambda z'_b(v_t,b_t,t)f_t - \mu_t w'(b_t) = 0, \tag{7}$$

$$L'_v = [\psi'(v_t) + \lambda z'_v(v_t,b_t,t)]f_t - \mu_t + \mu_{t-1} = 0, \qquad t < T \tag{8}$$

$$L'_\mu = v_{t+1} - v_t - w(b_t) \geq 0, \qquad \mu_t \geq 0, \qquad \text{(komplementaritással)}, \tag{9}$$

$$L'_\lambda = \sum_{t=S}^{T} z(v_t,b_t,t)f_t \geq 0, \qquad \lambda \geq 0, \qquad \text{(komplementaritással)}, \tag{10}$$

ahol $\mu_{S-1} = 0$ és $\mu_T = 0$.

A $z(v_t,b_t,t)$ definíciója szerint az elsőrendű feltételekben megjelenő parciális deriváltak

$$z'_v(v_t,b_t,t) = -\frac{\tau + b_t}{w(b_t) - \overline{u}},$$

$$z'_b(v_t,b_t,t) = -\frac{v_t - t\overline{u}}{[w(b_t) - \overline{u}]^2}\{(\tau + b_t)w'(b_t) - [w(b_t) - \overline{u}]\}.$$

A valószínűtlen sarokmegoldásoktól eltekintve, a 2. tételből adódik a

Következmény. *A második legjobb optimumban a leghosszabb várható élettartamú egyének járadéka első legjobb: $b_T = b^*$. Ha ψ szigorúan konkáv, akkor $b_t < b^*$ minden $t < T$-re, azaz a leghosszabb várható élettartamú egyénektől eltekintve, mindenki kevesebbet kap, mint amekkora az első legjobb járadék.*

Megjegyzések. 1. Diszkrét idejű modellt választottunk, s így nem várható sima járadékfüggvény. A folytonos idejű modell a (7)–(10) egyenletek folytonos változatát adná, és a járadékfüggvény folytonos lenne. Mégis a diszkrét időt választottuk, mert a szimulációban mindenképpen diszkrét időre leszünk utalva.

2. Normális körülmények esetén $\mu_t > 0$, tehát (9)-ben egyenlőség áll: $v_{t+1} = v_t + w(b_t)$. Figyelembe véve, hogy $b_t \leq b_{t+1}$, teljesül az érdekeltségi feltételek elhanyagolt csoportja is: $v_{t+1} \leq v_t + w(b_{t+1})$.

3. Azt sejtjük, hogy az egyéni egyenleg a várható élettartam csökkenő függvénye: $z_t \geq z_{t+1}$.

5. A második legjobb megoldás numerikus meghatározása

Mivel a *2. tétel* nemlineáris egyenletrendszerének megoldása meglehetősen nehéz (gyakran lehetetlen), természetes numerikus szimulációval próbálkozni. A valósághű paraméterértékek esetén kapott numerikus eredmények fényt deríthetnek az optimális járadékfüggvény kvantitatív tulajdonságaira is, és többféle kérdésre (például az endogén változók nagysága, érzékenységük a paraméterváltozásokra stb.) választ nyerhetünk.

Ebben a pontban körvonalazunk egy alkalmas algoritmust a *2. tétel* nemlineáris egyenletrendszerének megoldására. A 6. pontban pedig beszámolunk az algoritmuson alapuló szimuláció eredményeiről.

Rekurzív módszert alkalmazunk. Tegyük föl, hogy az $\overline{u}$, τ és $(f_t)_{t=S}^T$ paraméter adott.

1. Vegyünk egy alkalmas λ értéket, úgy próbálkozzunk, hogy az eljárás végén (10) teljesüljön.

2. Kezdjük a számítást v_T alkalmas értékével (például a statikus optimalizálásból adódóval), és vegyük μ_T=0-t! A (7)-ből $b_T = b^*$.

3. Ciklus: minden t-re, ha $(v_{t+1}, b_{t+1}, \mu_{t+1})$ adott, akkor (v_t, b_t, μ_t) a következőképpen számítható ki. Számítsuk ki μ_t-t a (8)-ból $(t + 1)$-re. Ekkor (b_t, v_t) kiszámítható a (7)-ből és a (9)-ből.

4. Most megvan a $(v_T, b_T, \mu_T),\ldots,(v_S, b_S, \mu_S)$ sorozat és μ_{S-1} a (8)-ból $t = S$-nél. Válasszuk v_T-t úgy, és ismételjük a 3. lépést addig, amíg nem teljesül $\mu_{S-1} = 0$.

5. Végül válasszuk λ-t és ismételjük a 2–4. lépéseket addig, ameddig a (10) költségvetési feltétel nem teljesül.

A gyakorlatban célszerűbb v_T-t rendelni a (10)-hez és λ-t a $\mu_{S-1} = 0$-hoz.

A τ változtatásával és az optimális pálya újraszámolásával meghatározhatjuk az optimális járulékkulcsot is. Intuitíve nyilvánvaló, hogyha τ kicsiny, akkor b_t szintén kicsi, és R_t nagy; másrészt: ha τ nagy, akkor b_t elfogadható, de R_t kicsi.

6. Szimuláció

Rátérünk a szimulációk leírására. Legyen a nyugdíjas pillanatnyi hasznosságfüggvény CRRA alakú (*Constant Relative Risk Aversion,* azaz állandó relatív kockázatkerülési együtthatójú), $w(x) = \theta - x^\sigma/\sigma$, $1 - \sigma$ lévén a relatív kockázatkerülési együttható és ε a munkaáldozat.

Definiáljuk a társadalmi jóléti függvények CRRA-típusú családját: $\psi(v) = v^\rho/\rho$, $\rho \le 1$, és ρ-t a *társadalmi jólét egyenlőtlenségi indexének* nevezzük. Minél kisebb az index, annál nagyobb súlyt kapnak a kisebb hasznosságok, azaz annál egyenlősítőbb a rendszer.

Több futást mutatunk be.

1. futás. Legyen $S = 49$ és $T = 59$. Föltesszük, hogy a kormányzat szempontjából az egyének várható élettartama 49 és 59 év között egyenletesen oszlik el: $f_t \equiv 1$. Vegyük a következő paraméterértékeket: $\theta = 4{,}1$; $\sigma = -0{,}5$ és $\varepsilon = 1{,}398$. Az első legjobb esetben az optimális járulékkulcsnál a dolgozó fogyasztása azonos a nyugdíjaséval. (Ez annak a feltevésünknek a nem kívánt mellékhatása, hogy a dolgozó pillanatnyi hasznosságfüggvénye csupán egy additív állandóban különbözik a nyugdíjasétól.) Legyen $\tau = 0{,}2$. Ekkor $\bar{u} = 4{,}1 - 0{,}8^{-0{,}5} - 1{,}398 = 0{,}466$, és az első legjobb nyugdíj $b^* = 0{,}8$. Kiszámítható, hogy 0,8 dolgozói fogyasztás hasznossága megegyezik 0,303 nyugdíjéval. A különbség a nyugdíjas megnövekedett szabadidejéből fakad. Figyeljük meg, hogy a leghosszabb élettartamú egyénnek $R_T = Tb^*/(\tau + b^*) = 47{,}2$ évet kell dolgoznia.

Amint az *1. tételben* igazoltuk, ha a társadalmi jóléti függvény utilitarista, akkor az optimális érdekeltségi rendszer mindenkit 43,2 év szolgálat után küld nyugdíjba – egyforma első legjobb nyugdíjakkal. Ezt még az egyéni élettartamra vonatkozó teljes kormányzati információ esetén sem lehet felülmúlni, és csak abban tér el az autark optimumtól, hogy a várhatóan hosszabb élettartamú egyéneket támogatják a rövidebb élettartamúak.

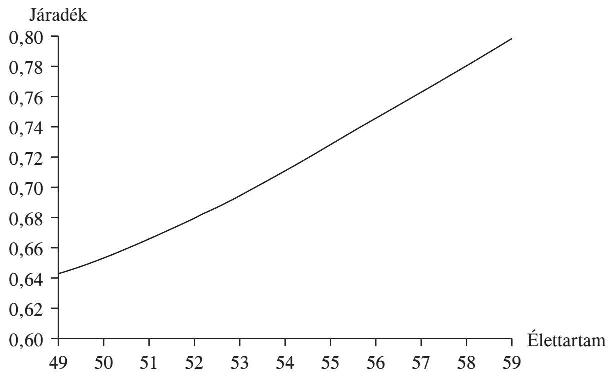
2. futás. Most $\rho = -1$ társadalmi jóléti index esetét mérlegeljük, és az *1.a–c ábrán* rendre bemutatjuk az optimális járadékot, szolgálati időt és életpálya-egyenleget mint az egyéni élettartam függvényét. Az *1.d ábrán* pedig ábrázoljuk az optimális és a naiv (méltányos) járadékfüggvényt, a nyugdíjösztönzési irodalom központi kategóriáit.

A várható élettartam 10 többletéve majdnem 3 többlet szolgálati évet és 17 százalék többletjáradékot ad, amely relatív skálán 21 százalékot jelent. Figyeljük meg, hogy az életpálya-egyenleg a 49 éves várható élettartamú egyén 3,1 egységéről az 59 éves esetében –3,5 egységre csökken. Vegyük észre, hogy az optimális járadékfüggvény enyhén nemlineáris!

3. futás. A σ kitevőt –0,45-re növelve, a három legrövidebb várható élettartamú típusnak azonos – törvény által előírt – *minimális életkorban* kell nyugdíjba mennie: $R_{\mathrm{m}} = 41{,}9$ év, $b_{\mathrm{m}} = 0{,}69$ nyugdíjjal. (Ez a „torlódás” jellemző az optimális mechaniz-

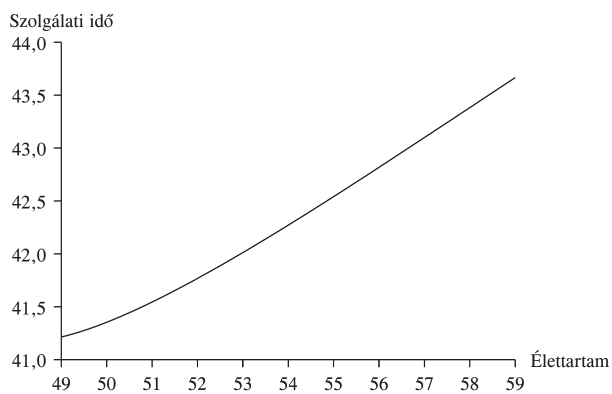
1.a ábra

Optimális járadék az élettartam függvényében



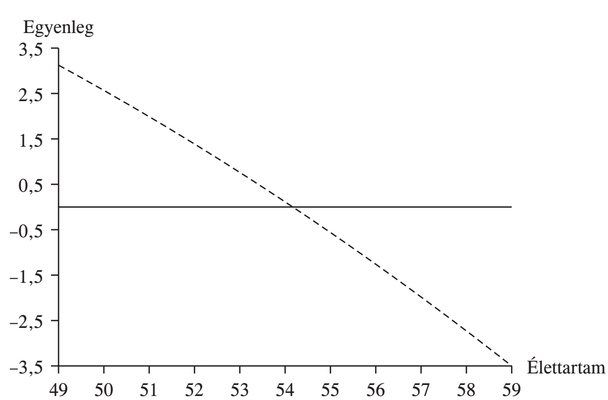
1.b ábra

Optimális szolgálati idő az élettartam függvényében



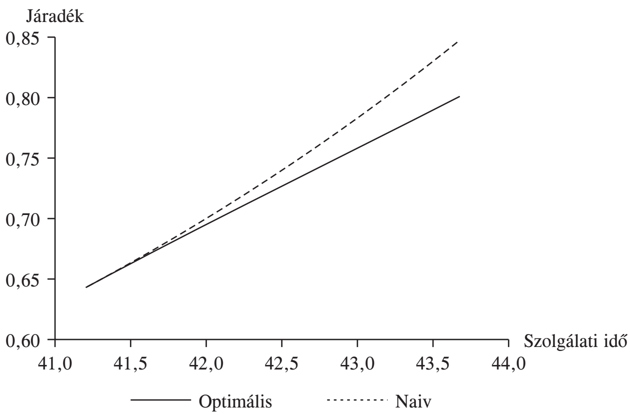
1.c ábra

Optimális egyenleg az élettartam függvényében



1.d ábra

Optimális és naiv járadékfüggvény



mustervezésre, például az optimális személyi jövedelemadó esetén – *Mirrlees* [1971] –, ahol a legkisebb termelékenységű egyének ki vannak zárva a munkából, és minimális segélyt kapnak.) A megmaradó nyolc típusra érvényes az érdekeltségi feltétel: minél tovább él valaki, annál később megy nyugdíjba. A σ kitevőt –0,55-re csökkentve, közelítőleg lineáris járadékfüggvényt kapunk. Tovább csökkentve a σ kitevőt –0,6-ra, a járadékfüggvény konvexszé válik.

4. futás. A számításokat leegyszerűsítendő, préseljük össze a 11 típust 3-ra: 51, 54 és 57 éves élettartammal, megtartva az egyenletes eloszlást. A járadékfüggvény nemlinearitását a járadékfüggvény meredekségével mérjük: $\alpha_t = [b_{t+1} - b_t]/[R_{t+1} - R_t]$, $t = S,\ldots,T - 1$.

A 4. futás jellemzőit az *1. táblázat* tartalmazza.

1. táblázat

Az összenyomott modell optimális jellemzői

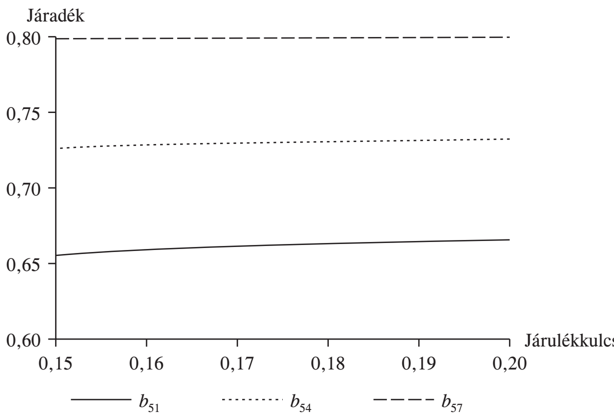
Élettartam (év)	Járadék b_t	Szolgálati idő R_t(év)	Egyenleg z_t	Meredekség α_t
51	0,666	41,437	1,916	0,060
54	0,733	42,539	0,109	0,065
57	0,800	43,573	–2,024	0,000

Érdekes, hogy az összenyomott modell eléggé durván közelíti az eredeti modellt: például a konkáv járadékfüggvény konvexszé válik.

5. futás. Eddig rögzítettük a járulékkulcsot. E kulcs optimális választása azonban központi szerepet játszik a vitákban, ezért megkíséreljük meghatározni az optimumát az összenyomott modellben. A *2.c ábra* megmutatja, hogy a társadalmi jóléti függvény meglehetősen lapos az autark optimum (20 százalék) közelében. Bemutatjuk az optimális járadékot és szolgálati időt mindhárom típusra a járulékkulcs függvényében (*2.a–b ábra*). A járadékok gyengén nőnek vagy stagnálnak, de a szolgálati idők meredeken csökkennek, ahogyan a járulékkulcs emelkedik.

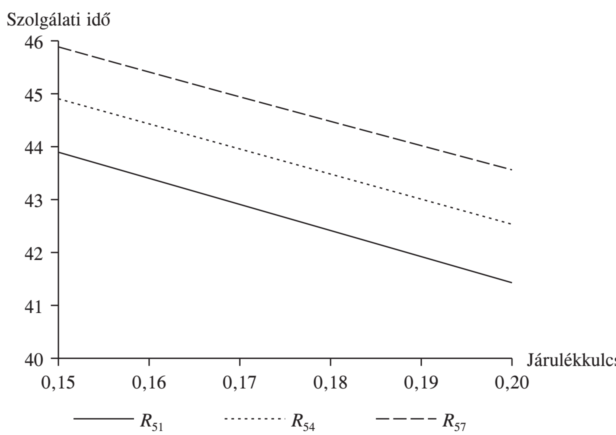
2.a ábra

Járulék és optimális járadék



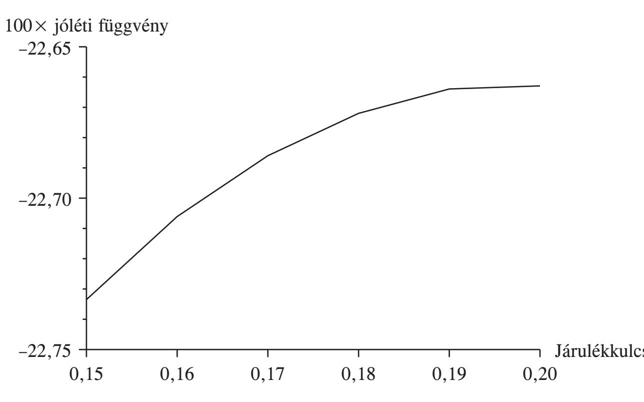
2.b ábra

Járulék és optimális szolgálati idő



2.c ábra

Járulék és jóléti függvény



7. Következtetések

Ebben a dolgozatban egy lépést tettünk afelé, hogy a mechanizmustervezést alkalmazzuk az optimális nyugdíjjáradék-függvény kiszámítására, amikor az egyének többet tudnak saját várható élettartamukról, mint a kormányzat. Elsőrendű szükséges feltételekkel jellemeztük az optimális járulék- és járadékfüggvényeket. Gyakorlatilag használható algoritmust fejlesztettünk ki az optimális ösztönzők kiszámítására, és a programot kitöltöttük életszagú adatokkal. Szimulációink azonban elsiklottak számos fontos részlet, például a munkaáldozat heterogeneitása és a személyi jövedelemadó fölött. Csupán számítógépes sejtéseket fogalmaztunk meg – analitikus bizonyítások nélkül –, például az életpálya-egyenleg és a nyugdíj/szolgálati idő növekvő függvényei az egyéni élettartamnak. További kutatásokra van szükség a kísérleti eredmények tisztázására.

Hivatkozások

Arrow, J. K.–Intrilligator, M. D. szerk. [1986]: Handbook of Mathematical Economics. Vol. III., Elsevier Science Publisher.

Börs-Supan, A. [2001]: The German Retirement Insurance System. Megjelent: *Börsch-Supan–Miegel* (szerk.) [2001] 13–38. o.

Börs-Supan, A.–Miegel, M. szerk. [2001]: Pension Reform in Six Countries. Springer, Berlin.

Coile, C.–Gruber, J. [2000]: Social Security Incentives for Retirement. NBER WP 7651.

Diamond, P. [2002]: Taxation, Incomplete Markets and Social Security. Munich Lectures, Cambridge, MA, MIT Press.

Diamond, P.–MIRRLEES, J. [1978]: A Model of Social Insurance with Variable Retirement. Journal of Public Economics, 10, 295–336. o.

Diamond, P.–MIRRLEES, J. [1986]: Payroll-Tax Financed Social Security with Variable Retirement. Scandinavian Journal of Economics, 88, 25–50. o.

Eső, P.–Simonovits, A. [2002]: Designing Optimal Benefit Rules for Flexible Retirement. Discussion Paper CMS-EMS 1535, Northwestern University, Evanston, IL.

Friedman, B. M.–Warshawski, M. J. [1990]: The Cost of Annuities: Implications for Saving Behavior and Bequests. Quarterly Journal of Economics 105, 135–154. o.

Gruber, J.–Orszag, P. [1999]: What to Do About the Social Security Earning Test. Issue in Brief \#1, Center for Retirement Research, Boston College

Gruber, J.–Wise, D. A. (szerk.) [1999]: Social Security and Retirement Program Around the World, Chicago, Chicago University Press.

Mirrlees, J. A. [1971]: An Exploration in the Theory of Optimum Income Taxation. Review of Economic Studies, 38, 175–208. o.

Samwick, A. [1998]: New Evidence on Pensions, Social Security and the Timing of Retirement. Journal of Public Economics, 70, 207–236. o.

Simonovits András [1998]: Az új magyar nyugdíjrendszer és problémái. Közgazdasági Szemle, 7–8. sz. 689–708. o.

Simonovits András [2001]: Szolgálati idő, szabadidő és nyugdíj – ösztönzés korlátokkal. Közgazdasági Szemle, 3. sz. 393–408. o.

Simonovits András [2002]: Rugalmas nyugdíjkorhatár és optimális lineáris járulék- és járadékfüggvény. Közgazdasági Szemle, 9. sz. 713–724. o.

Stock, J.–Wise, D. [1990]: Pensions, the Option Value of Work, and Retirement. Econometrica, 58, 1151–1180. o.

Varian, H. [2001]: Mikroökonómia középfokon. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.

Waldron, H. [2001]: Links between Early Retirement and Mortality, ORES Working Paper 93, Division of Economic Research, SS Administration.