

BENEDEK GÁBOR

Opcióárazás numerikus módszerekkel

Napjaink egyik legnagyobb érdeklődést kiváltó gazdaságelméleti területe a tőzsde. Az a felismerés ugyanis, hogy különböző értékpapírok árfolyamainak mozgását jól le lehet írni egy sztochasztikus folyamattal, megnyitotta az utat a tőzsde, illetve különböző értékpapírok és származékaik árfolyamainak matematikai modellezése irányába. A korábbi elméleti fizikai kutatások eredményei pedig szinte tálcán kínálták a bonyolultabb differenciálegyenletek megoldásait, amelyeket a tőzsdén tapasztalhatókhöz hasonló sztochasztikus folyamatokból nyertek; igaz, teljesen más mögöttes tartalommal. Különösen nagy figyelmet kaptak az opciók árazására vonatkozó modellek. A jelen tanulmány szintén az opciók árazásának problémáját vizsgálja. Kiindulópontja a Black–Scholes-formula, amelyben matematikai megoldást kapunk bizonyos szigorú feltételek mellett az opciók árazására (*Black–Scholes* [1973]). A tanulmány célja, hogy megvizsgálja, mi a következménye ezen szigorú feltételek feloldásának. Elsősorban egy feltétel – a tranzakciós költségek hiányának – feloldását vizsgáljuk, de eljárást adunk a többi feltétel feloldására is, így téve realisabbá a modellt.*

A tanulmány először a Black–Scholes-formulához vezető modellt, illetve a modell feltételeit vizsgálja tömören. Ezután részletesen kifejtjük azt a modellt, ahol a tranzakciós költségek létét is feltételezzük. Azt tapasztaljuk, hogy ebben a modellben már megjelenik a befektető kockázatra vonatkozó preferenciája. Egy részben rendezett vektortéren az opció ára és kockázata egy halmazt ad, célunk pedig az lesz, hogy megadjuk ennek a halmaznak az efficiens pontjait. Minden egyes efficiens ponthoz lehet találni olyan „típusú” befektetőt, aki számára ez optimális, és fordítva, bármilyen „típusú” befektetőről van is szó, e pontok között van az ő számára optimális. A kérdés az, hogy milyen struktúrája van az efficiens halmaznak. Erre numerikus módszerekkel próbálunk választ adni. A tanulmánynak ezenkívül van egy másodlagos célja is. A modellek numerikus vizsgálata igen komoly számítási problémákat hozott elő. Ezek a nehézségek minden olyan esetben előjöhettek, amikor valamilyen pénzügyi (vagy akár nem pénzügyi) szimulációt készítettünk. A modell C programozási környezetben készült,¹ mivel nem volt számunkra elérhető olyan szimulációs programcsomag, amelyben együttesen megtalálható a sztochasztika, a dinamika és az optimalizáció. A kutatás során többször is módosítani kellett az általunk használt algoritmusokat, amikor azt tapasztaltuk, hogy

* Szeretnék köszönetet mondani *Makara Tamásnak*, *Pataki Attilának* és *Simonovits Andrásnak* a rengeteg ötletért és segítségért, amelyet a tanulmány megírásához nyújtottak.

¹ A számításokat dupla precizitással végeztük (64 bit). Erőforrásigény: egyszerűbb futtatáshoz PC, optimalizálás, teljes leszámolás, tesztek: ALPHA AXP.

a kapott eredmények helytelenek vagy torzítottak, illetve kapacitáskorlátok lépnek fel. Ezt a folyamatot szintén a tanulmány keretei között tárgyaljuk, reménykedve abban, hogy ezzel hozzájárulhatunk hasonló jellegű kutatási munkákhoz is.

A Black–Scholes-féle opcióárazás és az „ideális” piaci feltevések

A tanulmány során végig a lehető legegyszerűbb opcióval foglalkozunk: egy darab valamilyen részvényre vonatkozó vételi joggal (*call option*). Mi az értéke egy – nyilván a T lejáratú idő előtti t időpontban az európai vételi opciónak? Nagyon valószínű, hogyha annak a részvénynek az ára (t időpontban), amelyre az opció vonatkozik, sokkal magasabb, mint a kötési árfolyam, akkor az opciót le fogják hívni, tehát az opció ára a részvény árfolyama (t időpontban) mínusz a t időpontra diszkontált kötési árfolyam lesz. Ha azonban pont fordítva, a részvény árfolyama sokkal alacsonyabb a kötési árfolyamnál, akkor az opciót végül valószínűleg nem hívják le, tehát értéke zérus. Továbbmenve, ha a lejáratú időpont nagyon közel van t -hez, akkor az opció ára a részvényárfolyam mínusz a kötési árfolyam, ha ez a különbség pozitív; és nulla, ha nem. Ha pedig a lejáratú idő nagyon távoli, akkor a kötési árfolyam t -re diszkontált jelenértéke elhanyagolható a részvény árfolyamához képest, így az opció értéke megegyezik a részvény árával. Látható tehát, hogy ebben az egyszerű esetben az opció értéke alapvetően két tényező függvénye volt, a részvényárfolyamé és a lejáratig tartó időé. Ha a részvényárfolyam nem sztochasztikus, hanem determinisztikus folyamatot követne, könnyű dolgunk lenne, kiszámítanánk a lejáratú időpontban a részvény értékét, eldöntenénk, hogy lehívjuk-e az opciót, vagy sem; és az így nyert értéket diszkontálnánk, azaz:

$$C(S_T, t) = e^{-r(T-t)} \max \{S_T - E, 0\}, \quad (1)$$

ahol

C az opció értékét,

S_t a t időpontbeli részvényárfolyamot,

E a kötési árfolyamot,

r a piaci kamatlábat,

$T - t$ pedig a futamidőt jelenti.

Csak hogy, mint már említettük, a részvényárfolyam mozgása sztochasztikus folyamat, s a fenti összefüggés helytelen. Feltéve azonban, hogy a részvényárfolyam valamilyen sztochasztikus folyamatot követ, lehetőség nyílik az opció értékének meghatározására. Ennél a pontnál két utat követ a szakirodalom. Az első lehetőség a binomiális és binomiálshoz hasonló modellek vizsgálata, ahol a részvényárfolyam a következő periódusra csak meghatározott számú különböző értéket vehet fel. A másik út, amelyet a tanulmány is követ, hogy meghatározzuk milyen sztochasztikus folyamatot kövessen a modellben a részvényárfolyam. Vizsgáljuk azt az esetet, ahol a részvény árfolyama egy geometriai Brown-mozgást követ.²

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz, \quad \text{ahol } \mu \text{ és } \sigma \text{ az adott részvény driftje és}$$

$$dz = \varepsilon \sqrt{dt}, \quad \varepsilon \sim N(0,1), \quad \text{volatilitása, továbbá}$$

$$\text{azaz } dz \text{ Wiener folyamat.}$$

A vételi opció árfolyama a részvény és az idő függvénye, azaz $C = F(S, t)$. Vegyük azt a portfóliót, ahol eladunk egy darab vételi opciót, és vásárolunk F_S (az opcióárfüggvény S szerinti deriváltja) darab részvényt. Természetesen, ahogy az idő folyamán folytonosan

² Black–Scholes [1973] és Hull [1993] alapján.

változik a részvény árfolyama, úgy változik állandóan ez az F_s érték, így a portfólió összetétele is. Mekkora lesz ennek a portfóliónak az értéke?

$$\Pi = -F(S,t) + F_s S.$$

Alkalmazva az Ito-lemmát, felírjuk a portfólió értékének a változását:

$$\begin{aligned} d\Pi &= -dF(S,t) + F_s dS = -F_t dt - \frac{1}{2} F_{ss} (dS)^2 + F_s dS = \\ &= -F_t dt - \frac{1}{2} F_{ss} \sigma^2 S^2 dt. \end{aligned} \quad (2)$$

Ha megvizsgáljuk a fenti összefüggést, azt az érdekességet fedezzük fel, hogy a sztochasztikus változót tartalmazó tag (dS) kiesett. Ez annak köszönhető, hogy jól választottuk meg a portfóliónkban a részvény mennyiségét. Ezek szerint a portfóliónk mindaddig kockázatmentes marad, ameddig a részvényárfolyam megváltozására azonnal reagálva kiegészítjük a portfóliót. Ezt nevezi a szakirodalom *dinamikus fedezésnek* (*dynamic hedging*). Mivel a portfóliónkat ilyen stratégiával kockázatmentesen tudjuk tartani, a portfólió értékének növekménye (megváltozása) meg kell, hogy egyezzen a portfólió értékének kockázatmentes kamattal számított növekedésével. Ellenkező esetben arbitrázsra lenne lehetőség. Ezek szerint:

$$d\Pi = \Pi r dt. \quad (3)$$

Ha a (3)-ba behelyettesítjük az (2) összefüggést, kiesik a dt és visszamarad egy bonyolult differenciálegyenlet:

$$F_t + rSF_s + \frac{1}{2} F_{ss} \sigma^2 S^2 = rF(S,t). \quad (4)$$

Ahhoz, hogy a differenciálegyenlet egyetlen trajektóriát eredményezzen, szükség van még egy peremfeltételre. Ezt pedig az (1) összefüggés $t = T$ esetén szolgáltatja. Black és Scholes megmutatta, hogy az (4) differenciálegyenlet az (1) peremfeltétel mellett, egy ügyes helyettesítéssel átalakítható egy olyan parciális differenciálegyenletté, mely a fizikában ismert hővezetés egyenlete, s megoldása ismert (Churchill [1963] 155. o.). A megoldásba visszaírva a helyettesítést, megkapjuk a nevezetes Black–Scholes-formulát:

$$F(S,t) = SN(d_1) - E e^{-r(T-t)} N(d_2), \quad (5)$$

ahol

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln(S/E) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \\ d_2 &= \frac{\ln(S/E) + (r - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}, \end{aligned}$$

és $N(\cdot)$ a Gauss-féle eloszlásfüggvény. Formálisan a modell a következő feltételezéseken alapult.

A részvényárfolyamra vonatkozó feltételezések: a részvények árfolyama geometriai Brown-mozgást követ, azaz a drift és a volatilitás független az időtől, μ és σ konstans. Az empirikus vizsgálatok azonban ezt a feltételezést nem támasztják alá. Sokszor nemcsak az a gond, hogy a fenti paraméterek nem konstansok, hanem az is, hogy a részvényárfolyamok eloszlása nem normális vagy lognormális eloszlást követ, hanem esetleg va-

lami mást.³ Ezek a feltételezések többé-kevésbé feloldhatók. Változó volatilitásra John Cox és Stephen Ross két új formula alkalmazását javasolta (Cox–Ross [1976]), továbbá Robert Merton egy olyan formulát adott meg, mely lehetőséget enged hirtelen szimmetrikus ugrásra (Cox–Ross [1976]). Sztochasztikus volatilitás esetén J. C. Hull és A. White ad formulát (Hull–White [1987]).

A piaci kamatra vonatkozó feltételezés: a kockázatmentes kamatláb, r az opció futamideje alatt konstans. Ez természetesen szintén elég erős feltételezés, azonban Robert Merton megmutatta, hogy ha a részvény volatilitása ismert, a zérókupon-kötvény hozama felhasználható, még akkor is, ha r nem állandó (Merton [1973]).

A részvényekre vonatkozó feltételezések: a modell feltételezése szerint a részvény nem fizet osztalékot az opció futamideje alatt. Ennek a kikötésnek a feloldására szintén több módszer található a szakirodalomban (például Cox–Rubinstein–Ross [1979]). További kikötés, hogy a részvények tökéletesen oszthatók legyenek. Ennek feloldására Benedek [1998] mutat a jelen tanulmányhoz kapcsolódó példát.

A kereskedésre vonatkozó feltételezések: további feltételezés, hogy nincsenek tranzakciós költségek. Lehetőség van az úgynevezett *short sellingre*, azaz eladhatunk úgy egy részvényt valakinek, hogy az nincs a birtokunkban, csak megegyezés szerint helyt kell állnunk érte valamikor a jövőben. A feltételezés szerint a *short sellingnek* nincsenek többletköltségei. Nincs továbbá költsége a kölcsönvételnek sem, azaz lehetőségünk van kockázatmentes kamatláb mellett kölcsönt felvenni. Minden időpillanatban – folytonosan – lehetőség van kereskedésre. A befektetőt nem befolyásolja a kereskedésben az általa fizetendő adó.⁴

Az opcióra vonatkozó feltételezések: a modellben európai típusú opcióról van szó. Az opcióárazásnál ezt kihasználtuk ugyan, de bizonyítható, hogy a formula ugyanúgy érvényes amerikai típusú opcióra is. Robert Merton ugyanis megmutatta, hogy ha a részvény nem fizet osztalékot, akkor a rá vonatkozó opció értéke mindig magasabb, mint amekkora az azonnali lehívás esetén lenne. Ezért a racionális befektető nem hívja le az opciót a lejáratú időpont előtt, így a két típusú opció ára megegyezik (Merton [1973]).

A piacra vonatkozó feltételezés: nincs lehetőség arbitrázsra.

A Black–Scholes-formula tehát elvileg csak olyan ideális körülmények között használható, amelyekre sehol a világon nincsen példa. Ennek ellenére mégis előszeretettel alkalmazzák az opciók árazására. Ezt a formulát építik be a legtöbb kockázatelemző szoftverbe, és a befektetők saját bőrükön tapasztalják a valós piac okozta különbségeket. Fischer Black részletesen bemutatja, hogy e feltételezések sérülése esetén milyen stratégiát érdemes alkalmazni, illetve hogyan változhat az opció értéke (Black [1988]).

Mi a továbbiakban azzal az esettel foglalkozunk, amikor vannak tranzakciós költségek. Mivel numerikus eljárást adunk az opció árazására, ezért a folytonos kereskedés feltétele automatikusan feloldódik. Az eljárás során mindig valamilyen fedezeti (*hedging*) stratégiát alkalmazunk.

Opcióárazás numerikus módszerekkel

A következőkben bemutatjuk, hogyan sikerült meghatározni az opció árát olyan esetekben, ahol nem áll rendelkezésre viszonylag egyszerű analitikus képlet. Először bemutatjuk magát a szimulációs modellt, és kitérünk néhány általunk fontosnak vélt numerikus

³ Empirikus vizsgálatok szerint az értékpapírok árfolyama, illetve devizaárfolyamok Levy-eloszlást követnek, általában 1,5 paraméterrel.

⁴ Az adózásra vonatkozó feltétel feloldását lásd Milevsky–Prisman [1997].

probléma megoldására is. Ezt követően ellenőrizzük modellünk helyességét, azaz meggyőződünk arról, hogy:

- visszacapjuk-e megfelelő egyszerűsítések mellett a Black–Scholes-képletet;
- konzisztensek-e a kimeneti értékek;
- érzékenyek-e a kimeneti értékek a paraméterek kicsiny megváltoztatására.

Magyarázatot adunk arra is, hogy miért az adott paraméterbeállítással folytattuk vizsgálódásunkat. A tranzakciós költségek bevezetése után egy összehasonlító táblázatban közöljük és értékeliük a kapott eredményeket. Végül bekapcsoljuk a fedezeti eljárásra (*hedging*) vonatkozó különböző stratégiákat a modellbe. Ezek a stratégiák általában paraméteres stratégiák, s ez adta az ötletet, hogy próbáljuk optimalizálni a szimulációs modellt.

Az egyszerű dinamikus fedezeti (hedging) modell tranzakciós költségekkel

Első és legegyszerűbb modellünket nevezzük BSTC (*Black–Scholes Transaction Costs*) modellnek, melynek felépítése a következő:

Bemenő adatok generálása. *Ez a folyamat abból áll, hogy meghatározott számú lehetséges részvényárfolyam-sorozatot generálunk. A paraméterek a következők:*

mintaméret: az azonos paraméterű részvényárfolyam-szenáriók száma,

MU: a geometriai Brown-mozgásban szereplő éves μ ,

SI: a geometriai Brown-mozgásban szereplő éves σ ,

S₀: a részvény árfolyama a nulladik periódusban,

N: hány naponként generálunk új részvényárfolyamot,

T: hány napig tartson a szimuláció,

EV: hány napra osszuk fel az évet.

(Például, ha $N = 1$, $T = 60$, $EV = 730$, akkor naponta kétszer generálunk új részvényárfolyamot, és ez a folyamat egy hónapig tart.) Feltöltünk tehát egy olyan mátrixot, amelynek sorai mutatják, hogy hányadik periódusban tartunk, oszlopai pedig különböző sorozatok, de nyilván mindegyik az S_0 kezdőértékből indul.

A folyamat Brown-mozgást követ:

$$S_{i+N} = S_i e^{(MU - SI^2 / 2)(N / EV) + SI \varepsilon \sqrt{N / EV}}, \text{ ahol } \varepsilon \sim N(0, 1).$$

Külön figyelmet szenteltünk a normális eloszlású véletlenszámok generálásának, mivel a nem megfelelő minőségű véletlenszám-sorozatok a kimeneteli adatokat inkonzisztensé tehetik (lásd a 6. ábrát). A megoldást a *Press és szerzőtársai* [1994]-ban leltük fel. A diagnosztikai programok eredményei alapján a *ran1* eljárás (280. o.) tűnt a legpontosabbnak, ciklusideje (10^8) is kielégítőnek bizonyult. A pénzügyi modellhez kapcsolódó tesztek⁵ és egyéb fejlesztések nagyobb ciklusidőt követel(het)nek, amelyre a *ran2* eljárást (282. o.) tettük talonba. A $[0, 1)$ intervallumon lévő egyenletes eloszlású változó standard normális eloszlású változóvá transzformálására az úgynevezett polármódszer⁶ használata mellett döntöttünk.

A szimuláció. *A paraméterek a következők:*

E: az opció kötési árfolyama,

R: a kockázatmentes kamatláb,

TC: a tranzakciós költség nagysága százalékban.⁷

⁵ Például a normális eloszlás tesztelése (lásd A várható érték becslése című fejezetet).

⁶ A módszer szerzői: G. E. P. Box, M. E. Muller és G. Marsaglia, lásd bővebben *Knuth* [1981]. Az algoritmus megtalálható *gasdev* néven szintén a *Press és szerzőtársai* [1994] műben (289. o.).

⁷ Azaz $TC = 0,01$ esetén 100 forint értékű részvény eladásának/vételének tranzakciós költsége 1 forint.

A változók a következők:

P: egyenleg,

S: részvényárfolyam,

delta: az opció deltája (fedezeti aránya).

Első nap tudjuk, hogy a részvény árfolyama az induló árfolyam. Először elkészítünk egy portfóliót: eladunk egy darab vételi opciót, és vásárlunk F_S darab (továbbiakban ezt *deltá*-nak nevezzük) részvényt. Deltát a (5) képlet *S* szerinti deriváltjaként adjuk meg, azaz:

$$delta = \frac{\partial C}{\partial S} = N(d_1).$$

Tegyük fel, hogy az opcióért nem kapunk semmit, míg a részvények vásárlását kockázatmentes kamaton adott kölcsönből finanszírozzuk. Pénzünk tehát az első nap:

$$P_0 = -S_0 \cdot delta_0 \cdot (1 + TC).$$

Látható, hogy a tranzakciós költséget a kereskedés összértékével arányosan adjuk meg. (Nincs fix minimumköltség.) Itt az a numerikus probléma merül fel, hogy *delta* kiszámolásakor a normális eloszlásfüggvényt kell használni. Ehhez egy hat tizedesjegy pontosságú polinomiális közelítő formulát alkalmaztunk (Hull [1993]).

A további napokban mindig ugyanaz történik, egészen az utolsó napig. Először megfizetjük pénzünkre (kölcsön) a kamatot:

$$P_t = P_{t-N} e^{R \frac{N}{EV}}.$$

Ezután a bemenő adatok generálásakor elkészített mátrixból kivesszük a soron következő elemet (ez a soron következő részvényárfolyam, S_t), és segítségével kiszámoljuk az új *deltát*. A portfóliónkban levő részvények számát erre az értékre kell beállítanunk, tehát vagy eladunk, vagy veszünk további részvényeket. Így pénzünk a következőképpen változik:

$$dP_t = \begin{cases} S_t (delta_{t-N} - delta_t) (1 - TC), & \text{ha } delta_t \leq delta_{t-N}, \\ -S_t (delta_t - delta_{t-N}) (1 + TC), & \text{különben.} \end{cases}$$

Az utolsó napon – hasonlóan az előzőkhöz – megfizetjük a kamatokat, és beolvassuk az utolsó naphoz tartozó részvényárfolyamot. A portfóliónkat viszont már nem egészítjük ki, sőt eladjuk részvényeinket, és helytállunk az opciónál, azaz:

$$dP_T = S_T \cdot delta_{t-N} \cdot (1 - TC) - \max\{S_T - E, 0\}.$$

Végül az első napra diszkontáljuk a kapott értéket és vesszük a mínusz egyszerűsését:

$$C = -P_T e^{-R \frac{T}{EV}}.$$

A kapott érték (*C*) az opció árát adja meg a periódus elején, hiszen, ha pont ennyiért adtuk volna el az opciót az első periódusban, akkor az utolsó periódusban pénzünk nullával lenne egyenlő. A továbbiakban tehát az opcióár, illetve opcióárfolyam kifejezések alatt nem a pénzpiacokon kialakult (s így a befektető számára konstans) értéket értjük, hanem a fenti, valószínűségi változót. Nézzük, milyen feltételezéseket tettünk a modellben!

1. Akár eladunk, akár veszünk, azonos az arányos tranzakciós költség nagysága, nincs minimális tranzakciós költség, továbbá minden időpillanatban azonos feltételek mellett kereskedhetünk (*TC* konstans);

2. az opció lehívása esetén nem részvényt adunk át, csupán a részvényárfolyam és a kötési ár különbséget;

3. a Black–Scholes-képlet alapján számoltuk a portfólióban szereplő részvény mennyiségét, ez az úgynevezett *delta fedezeti (delta hedging)* módszer, és mindig kiegészítettünk;

4. Black–Scholes-szerzőpáros legtöbb kikötését, azaz a volatilitásra, részvényárfolyamra, kockázatmentes kamatlábra, osztalékra stb. vonatkozókat megtartottuk, csak a kereskedésnél fizettünk tranzakciós költséget.

A kimeneti adatok meghatározása. A szimulációt összesen *mintameret*-szer hajtjuk végre, és a kimeneti adatokat a *C* sorozatból határozzuk meg. Összesen csupán két kimeneti adatot generálunk, a sorozat átlagát és átlagos négyzetes eltérését mint a várható érték és a szórásnégyzet becslését. Számunkra az a jó, ha ez a várható érték minél kisebb. Tegyük fel ugyanis, hogy a várható értéknél magasabb áron tudjuk eladni az opciót. Ekkor a fenti kiegészítési stratégiával az utolsó periódusban, az opciós helytállás után is várhatóan pozitív pénzünk marad. A szórás az opció kockázatosságát jelenti, tehát célunk az, hogy magatartási formánkat változtatva mindkét kimenő változót minimalizáljuk. Ez egy vektorrendezési feladat.

A BSTC modell eredményei és első tesztelése

A fenti modellt nagyon sok különböző paraméterre végigszámoltuk, és minden esetben az *1. táblázattal* konzisztens eredményeket kaptunk, így csak a következő paraméterbeállítások eredményeit kívánjuk bemutatni:

$$\begin{array}{lll} MU = 0,12 & SI = 0,30 & S_0 = 100 \\ E = 100 & R = 0,05 & \text{mintameret} = 5000 \end{array}$$

Az opció futamideje 30 nap volt, így a Black–Scholes-formula szerint az opció értéke: 3,6321.

1. táblázat
A BSTC modell eredményei

Hányszor egészítünk ki?	Nincs tranzakciós költség (<i>TC</i> = 0)		Van tranzakciós költség (<i>TC</i> = 0,01)	
	várható érték	szórás	várható érték	szórás
Naponta 5×(150)	3,6310	0,2414	8,6447	1,5247
Naponta 2×(60)	3,6309	0,3769	7,1760	1,0877
Naponta (30)	3,6333	0,5280	6,4315	0,9710
Kétnaponként (15)	3,6211	0,7327	5,5895	1,0325
Ötnaponként (6)	3,6240	1,1391	5,4094	1,3448
Csak az első nap (1)	3,6207	2,5572	4,6957	2,5631
Soha (0)	3,8940	5,5273	3,8940	5,5273

Jól látható, hogy a modell zérus tranzakciós költségek mellett két tizedesjegy pontossággal megközelíti a Black–Scholes-értéket. Azt is tapasztalhatjuk, hogy minél kisebbre választjuk a lépésközt, annál alacsonyabb a szórás. Határértékben nyilván eltűnik a szórás, és ezt állítja a Black–Scholes-levezetés is. Vagyis, ha opcióval üzletelünk, és netalántán nincsenek (vagy nem kereskedésarányosak a) tranzakciós költségek, ne habozunk olyan gyakran kiegészíteni portfóliónkat, amilyen gyakran csak lehet. Abban az esetben azonban, ha vannak tranzakciós költségek, minél többször kereskedünk, annál magasabb értéket kapunk az opcióra. Határértékben az opció ára bármilyen pozitív tranzakciós költség esetén a végtelenbe tart. A kiegészítések növelésével azonban tranzakciós költségek esetén is csökkenthető az opció kockázatossága. (Egyre sűrűbb kiegészítés

esetén azonban – az opcióár-emelkedés mellett – növekedni kezd a szórás. Ettől az értéktől kezdve a kiegészítések már biztosan nem hatékonyak.) Ezek szerint, ha csökkenteni szeretnénk kockázatunkat (egy bizonyos fokig), gyakrabban kell kiegészítenünk, vállalva ezzel az esetleges kisebb nyereséget, míg ha kevésbé vagyunk érzékenyek a kockázatra, akkor egészítsünk ki ritkábban, vállalva azt, hogy a várt nagyobb hozam mellett esetleg nagyot bukunk. Összefoglalva, a BSTC modell konzisztens eredményt adott a Black–Scholes-formulával és várakozásainknak megfelelő értékeket nyújtott a tranzakciós költségek bevezetésekor. A továbbiakban olyan modelleket mutatunk be, ahol optimális kiegészítési stratégiát keresünk. A modellnek két kimenő változójára készíthetnénk egy hasznossági függvényt, amelynek maximalizálása megadja az optimális viselkedési stratégiát. Ekkor a különböző hasznosságfüggvények különböző befektetőtípust jellemeznek. Mi a továbbiakban e helyett megtartjuk a vektormaximum-problémát, és megkíséreljük megadni az optimális várhatóérték–szórás párokat, azaz az efficiens halmazt. Ha a célterben ábrázoljuk ezt a felületet és egy befektető hasznosságfüggvényét, akkor az érintési pont lesz az optimum.

Optimális stratégia keresése (a K–DH modell)

A most következő modell gyakorlatilag a BSTC modell kiegészítése. Az alapötlet az, hogyha nem módosíthatjuk minden időpillanatban a portfóliónkat, akkor legjobb lenne azokban az időpontokban módosítani, amikor arra a leginkább szükség van. Képzeljünk el egy tűrőhatársávot, és mondjuk azt, hogy abban az esetben, ha a megkívánt (számított) *delta* érték és a jelenlegi részvény mennyiség (egy korábbi *delta*) különbsége a sávon belül mozog, akkor nem változtatunk a portfólió összetételén, de ha a sávból kimozdul, akkor a megkívánt *delta* értékre korrigáljuk a részvények számát. Minél kisebb ez a tűrőhatár, annál inkább közelítünk a BSTC modell minden időpontbeli kiegészítés-eredményéhez, és minél szélesebb, annál inkább tartunk a kiegészítés nélküli eredményhez. A szimulációs megvalósítás felépítésében egyezik az előző modellel, csak néhány feltételt kellett beiktatnunk. Megjegyezzük továbbá, hogy két K–DH modellt készítettünk, az elsőben a kezdeti periódusban a sávnagyságtól függetlenül mindig kiegészítetünk (K–DH1), míg a másodikban az első periódusra is vonatkozott a kiegészítési feltétel (K–DH2). Maga a feltétel a következő:

$$\text{vanKieg} = \begin{cases} \text{igaz, ha} & |\text{delta}_t - \text{delta}_{\text{aktuális}}| \cdot S_t \geq S_0 \cdot TC \cdot K \\ \text{hamis, különben} & \end{cases}$$

A modell futtatása esetén a jobb oldal konstans. A *K* paraméter a tűrőhatár sávszélessége. *K* a nem negatív számokon értelmezett, és 0-ra minden periódusban kiegészít. Minden optimális *K* érték más-más preferenciájú befektetőt elégít ki.

A K–DH modellek eredményei

Legrészletesebben ezt a modellt vizsgáltuk, s ennek a modellnek a vizsgálata során derült fény néhány további kérdésre. Nézzük először a fenti paraméterbeállítások mellett, milyen eredményeket adott a modell ($N = 1$, $T = 30$, $EV = 365$, $TC = 0,01$) (2. táblázat).

A 2. táblázatban jól látható, hogy minél kockázatkerülőbb a befektető, annál kisebb *K* paramétert kell használnia, és annál magasabb értéket kap az opció várható értékére. Az is látható, hogy ha a paramétert nagyon nagyra választja, akkor a futamidő alatt nem

2. táblázat
A K-DH2 modell eredményei

K paraméter	Várható érték	Szórás	Átlagos kiegészítések
0	6,4315	0,9710	30
4	6,2544	0,9886	16
13	5,7128	1,0662	6
48	5,0740	2,2766	2
999	3,8940	5,5273	0

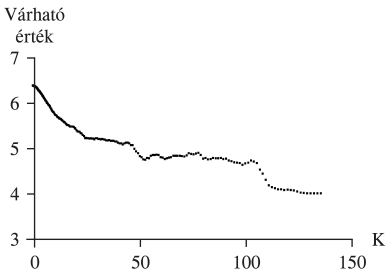
kereskedik a befektető, és így az opció árát nem terheli a tranzakciós költség, tehát az érték azonos az 1. táblázat megfelelő értékével. Miután elkészítettük a modellt, és meggyőződünk a modell helyességéről, a következő vizsgálatokat terveztük:

1. a K-DH1 és K-DH2 modell összehasonlítása, optimalizálás;
2. torzítás- és konzisztenciavizsgálat (*validation*);
3. a futamidő felosztásának finomítása;
4. érzékenységvizsgálat;
5. az opcióár eloszlásának vizsgálata.

A vizsgálatok során a K paraméterre teljes leszámrlást végeztünk. Nézzük ennek eredményét a K-DH2 modell esetén (1. ábra).

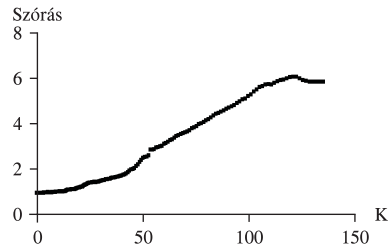
1. a) ábra

Az opció várható értéke K függvényében



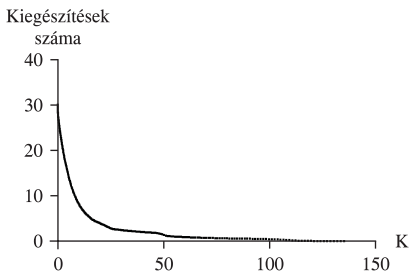
1. b) ábra

Az opció szórása K függvényében



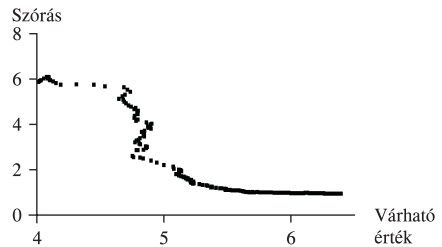
1. c) ábra

Az átlagos kiegészítések száma K függvényében



1. d) ábra

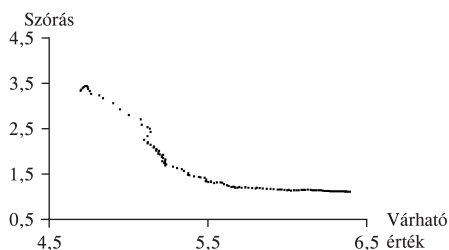
A várható érték-szórás párok (a *céltér*)



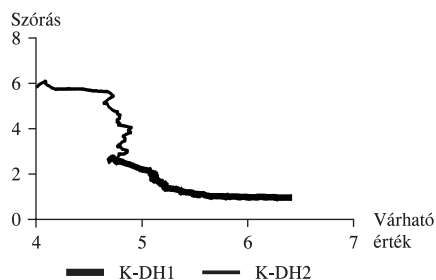
Jól látható, hogy a K paramétert 0 és 140 között változtattuk, méghozzá úgy, hogy kis értékeinél sűrűbben, nagy értékeinél ritkábban vettünk fel értékeket.⁸ Nullánál mindig van kiegészítés (30 darab), 140-nél nagyobb értékek esetén pedig olyan tágra nyílt a tűrészhatár-intervallum, hogy már minden szimulációnál zérus volt a kiegészítések száma. A továbbiakban elsősorban a *céltér*et vizsgáljuk, ez foglalja össze a legtömörebben a számunkra szükséges információkat.

A K-DH1 és K-DH2 modell összehasonlítása, optimalizálás. Mint már említettük, először egy olyan modellt készítettünk (KDH1), ahol az első időpontban a K paramétertől függetlenül mindig megalkottuk az induló portfóliót. Ez nyilván azt jelenti, hogy az opció ára – ha van tranzakciós költség – mindig magasabb, mint a Black–Scholes-érték. A K-DH2-es modellben kíváncsiak voltunk arra, hogy hogyan változnak az eredmények, ha a kezdő időpontban is van lehetősége a befektetőnek mérlegelni. (Így elképzelhető, hogy csak valamikor a futamidő végén vásárol részvényt.) Azt vártuk, hogy az új modell bevezetésével azonos véletlenszámok esetén csupán a baloldalon meghosszabbodik a várható érték–szórás pár (továbbiakban *cél*) halmaza.

2. a) ábra
A K-DH1 modell céltere



2. b) ábra
A két modell együttesen



A 2. b) ábrán már összekötöttük a pontokat, de ezt csak a szemléltetés kedvéért tettük, hiszen nincs arra bizonyíték, hogy a pontokat összekötő egyenesen szereplő pontokhoz létezik megfelelő K érték. A továbbiakban mégis, amikor egy ábrán több adatsor található, ezt a technikát alkalmazzuk. A numerikus megoldás tehát megmutatja, hogy van lehetőség arra, hogy az opció árát ne nagyon emelhesse meg a tranzakciós költség, ez azonban roppant mértékű bizonytalanságot okoz. Ha a befektetőnek adott a hasznosság-függvénye, akkor ezt a céltérben ábrázolva, északnyugati irányba tolva, az első érintési pont lesz az optimális, és azonnal leolvasható a várható érték–szórás pár. Ebből visszakereshető az optimális stratégiához tartozó K érték is. Ha pedig az opció ára adott, akkor a céltérben az adott értékhez megkereshetjük a legkisebb szórást, és ennek alapján határozzuk meg stratégiánk paraméterértékét. A modell készítésének kezdetekor abban reménykedtünk, hogy egy jól szétszórt halmaznak keressük majd a délkeleti irányból nem dominált részhalmozát, s ebből a K paraméter helyes beállítását tudjuk majd megadni. Jól látható azonban az ábrán, hogy a célhalmaz majdnem minden pontja effciens. Ez azt jelenti, hogy valószínűleg nem érdemes ezt a modellt optimalizálni, mivel majdnem minden K értékhez egy nem dominált vektor tartozik. Valóban, amikor optimalizálással próbálkoztunk, nem kaptunk jelentős eltérést.

⁸ Látható, hogy K alacsony értékeire sokkal érzékenyebben reagálnak a változók, mint a magasra. Ha egyenletesen vettünk volna fel pontokat, akkor az 1. a)–d) ábrán bizonyos helyeken két pont között túl nagy lenne a távolság.

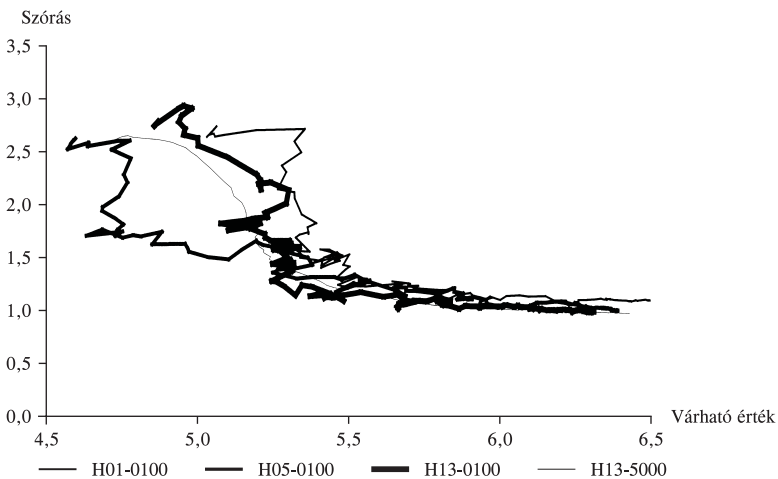
Itt említjük meg, hogy a szimuláció optimalizálása önmagában is érdekes és meglehetősen bonyolult numerikus probléma. Szerencsére rendelkezésünkre állt egy genetikus algoritmusra⁹ épülő optimalizáló környezet, amit viszonylag egyszerűen össze lehetett kapcsolni a szimulációval. Az előbbi esetben azt tapasztaltuk, hogy már az induló populációk is majdnem mind optimálisak voltak, és az optimális halmaz gyakorlatilag nagyon hamar, néhány generáció alatt kialakult.

Torzítás- és konzisztenciavizsgálat (validation). Igazság szerint ezzel a ponttal kellett volna kezdenünk a tárgyalást, hiszen az eredményeket már ismertettük, és még azt sem igazoltuk, hogy jól viselkedik-e a modellünk. Ha ugyanis a célhalmaz struktúrája nagyon eltérő képet mutat más-más véletlenszám-sorozatra, akkor egyetlen fenti állítás sem állja meg a helyét. Két oka van annak, hogy mégis itt foglalkozunk ezzel a problémával. Az egyik az, hogy a vizsgálat során mindig a célhalmaz viselkedését figyeltük meg, és ezt csak az előbbi pontban definiáltuk. A másik ok az, hogy a kutatás során itt szembesültünk először ezzel a problémával, és emiatt kellett a már említett véletlenszámgenerátor-részt újra programozni. Modellünk megbízhatóságát úgy ellenőrizhetjük, hogy először különböző indulóértékekből indítjuk a véletlenszám-generátort, másodsor a mintaméret számát fokozatosan növeljük. A szimulációt 15 beállítás mellett futtattuk; három különböző induló értéket (-1, -5 és -13) és öt mintanagyságot (100, 200, 500, 1000, 5000) adtunk meg. A tesztelésnél a K-DH1 modellt használtuk. Hipotéziseink a következők voltak:

1. különböző értékből induló szimulációk célhalmaza nem szisztematikusan ingadozik, az „átlagok átlagától” mindkét irányban eltér;
2. a mintaméret növelésével ez az ingadozás jelentősen csökken;
3. különböző mintanagyságok esetén is igaz, hogy az „átlagok átlagától” a különböző mintanagyságok melletti célhalmazok mindkét irányban eltérnek.

3. ábra

Kis minta ingadozása különböző induló értékek esetén

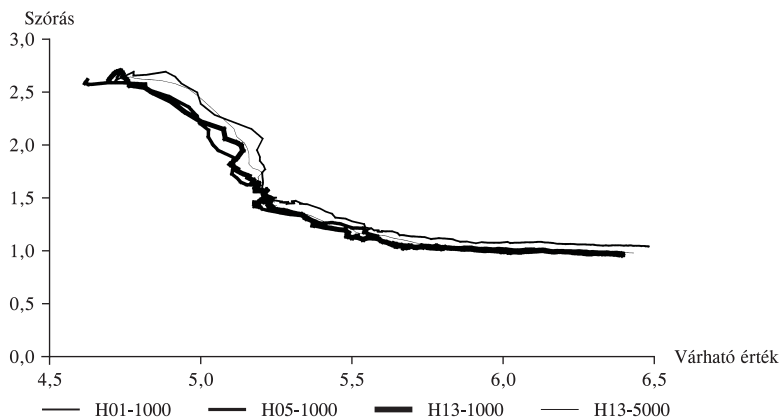


Megjegyzés: Vékony vonallal ábrázoltuk az „átlagok átlagát”, az ötezres mintanagyságot.

⁹ A felhasznált genetikus algoritmus könyvtár: *Sugal Genetic Alg. Package*, Andrew Hunter, University of Sunderland, England (Hunter [1995]).

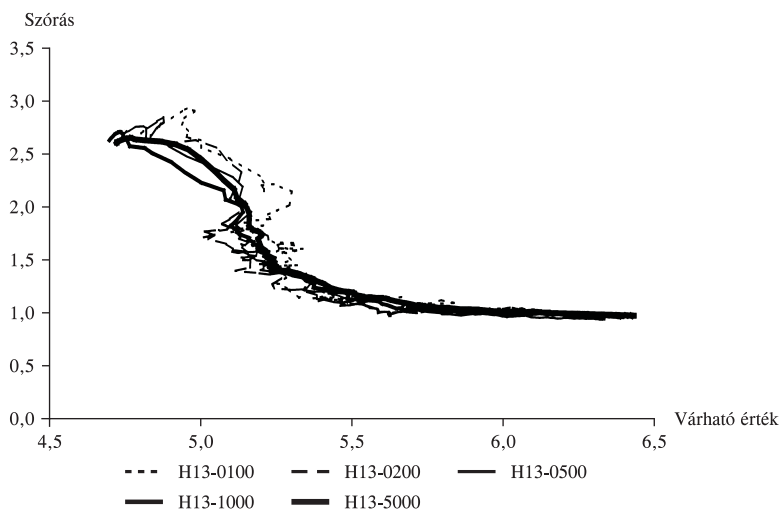
4. ábra

Nagy minta ingadozása különböző induló értékek esetén



5. ábra

A célhalmaz változása a mintaméret növelésére

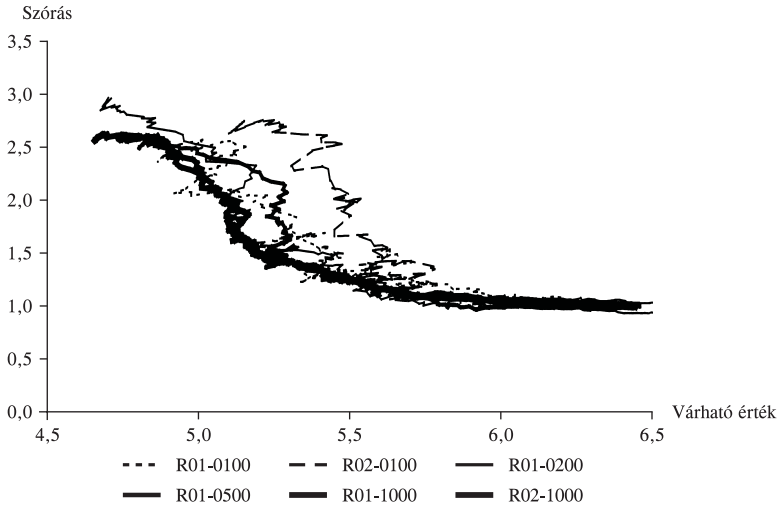


A 3–5. ábra igazolja a modellben használt módszerek helyességét. Szemléltetésül a következőkben olyan ábra látható, melyet a rossz véletlenszám-generátor adott. A 6. ábrán a mintaszám növelésével a célhalmaz lelapul, és a többi sorozat nem a nagy minta körül ingadozik.

Az alpont lezárásaként elfogadjuk az általunk használt modell helyességét, és meghatározzuk azt a mintaméretet (1000) és azt az induló értéket (–13), amelyre a további vizsgálatokat elvégezzük. Megjegyezzük továbbá azt, hogy a szakirodalomban további lehetőségek állnak rendelkezésre abban az esetben, hogyha valamilyen okból (erőforráskorlát) csak kis mintára tudjuk a szimulációt elvégezni. Ezt nevezzük *varianciacsökkentő eljárásoknak*. Mivel számunkra az időtényező nem jelentett komoly korlátozó feltételt,

6. ábra

A hibás véletlenszám-generátor okozta inkonzisztens eredmények

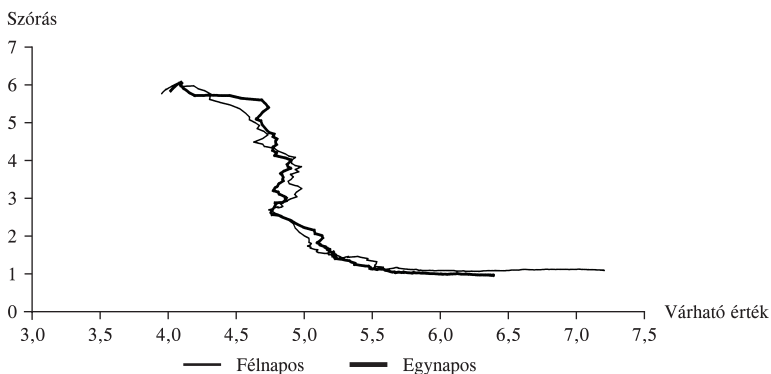


ezért a továbbiakban is szívesen dolgoztunk nagy mintákkal. Ennek ellenére, mivel általános eljárást akarunk adni pénzügyi szimulációk készítéséhez, továbbá mivel hatásosabb becslési eljárást elméletileg is indokolt használni, az A várható érték becslése című fejezet teljes egészét ennek a problémakörnek szenteljük.

Kiegészítés félnaponként. Az előzőekben harmincnapos futamidő mellett naponként egészít(h)ettük ki portfóliónkat. Kíváncsiak voltunk arra, hogy hogyan változik a célhalmaz abban az esetben, ha félnaponként van lehetőség módosításra. (Azaz $N = 1$, $T = 60$, $EV = 730$.) Azt várjuk, hogy az előző modellhez hasonló ábrát kapunk, azzal a különbséggel, hogy a halmaz jobb oldali szára kitolódik, azaz magasabb várható értékek is elképzelhetők. A növekedés abból származik, hogy ha félnaponként kereskedünk, több tranzakciós költség adódik az opció árához.

7. ábra

Az egynapos és félnapos kiegészítések célhalmaza

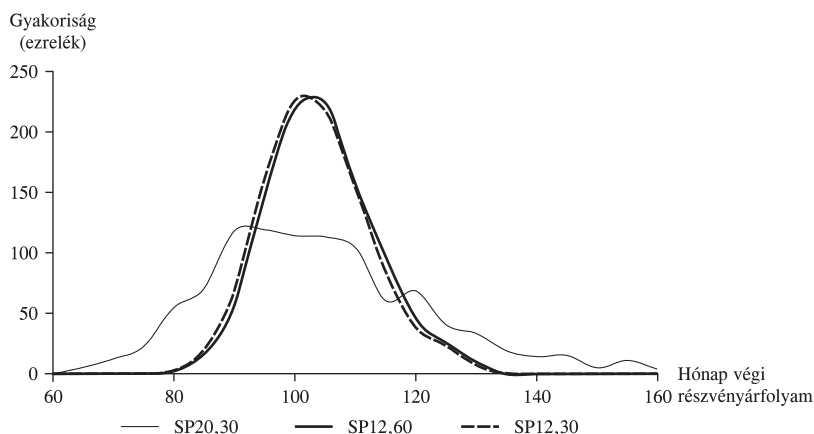


Ha ezt az eljárást tovább folytatva, harmad-, negyed- stb. napos kiegészítési lehetőséget adva figyelniük a célhalmaz változását, azt tapasztalnánk, hogy az opció várható értéke tetszőlegesen nagy értéket vehet fel (például a korántsem irreális 100-percenkénti kiegészítés mellett az opció várható értéke 34,1264). Ezzel azt a sejtést is igazoltuk, hogy a Black–Scholes-féle opcióárazás módszerével nem tudjuk beárzni az opciókat, valamilyen más módszer szükséges.

Érzékenységvizsgálat. A *mintaméret* kérdését tisztáztuk, nagyságát 1000-re választottuk. Így megfelelően sima célhalmazhoz és nem túlságosan időigényes modellhez jutottunk. Az előzőek alapján beláttuk, hogy a *futamidó felosztásának* finomításával a célhalmaz releváns része helyben marad. A *futamidó* nagyon kicsire vagy nagyon nagyra állítása a már ismertetett hatásokkal jár. Amikor pedig egy hónap és két év közötti futamidőket vizsgáltunk, nem tapasztaltunk jelentős eltérést a célhalmaz struktúrájában. Így az általunk használt egy hónapos¹⁰ naponként kiegészítő modellt tekinthetjük általános esetnek is. ($N = 1$, $T = 30$, $EV = 365$.) Kérdés azonban, hogy a további paraméterek megváltoztatására mennyire érzékeny a modell. A *kötési árfolyam* és az *induló részvényárfolyam* kicsiny változtatására a modell nem volt érzékeny. Nyilvánvalóan extrém nagy abszolút eltérés esetén megint csak a már korábban megállapítottak a mérvadók.¹¹ (Továbbiakban mindkettő értéke 100.) A *tranzakciós költséget* csökkentve egyre inkább a Black–Scholes-értékhez tartottak a célhalmaz elemei, nullában természetesen a halmaz egy pontra szűkült, szükségtelemmé téve a K–DH modellt. Viszonylag nagy tranzakciós költség hatására a halmaz szétszóródott a magasabb értékek irányába, de struktúrájában nem történt drámai változás. A $TC = 0,01$ értéket a gyakorlatból vettük. A *kockázatmentes kamatláb* változtatására szintén nem volt érzékeny a modell, és mindvégig megtartottuk az $R = 0,05$ feltételezést. A Black–Scholes-formulában nem szereplő μ tag a mi modellünkben sem játszott lényeges szerepet. Extrém magas értékeire a célhalmaznak azon pontjai mozdultak el erősebben, ahol a kiegészítések száma nullához közel esett. A kockázatmentes kamatlábra tett feltételezésünk alapján a $\mu = 12$ százalékos érték tipikus-

8. ábra

A részvényárfolyamok eloszlása különböző paraméterek mellett ($SP \mu, \sigma$)



¹⁰ Azért választottunk egy hónapos futamidőt, hogy a szimuláció sebességét növeljük.

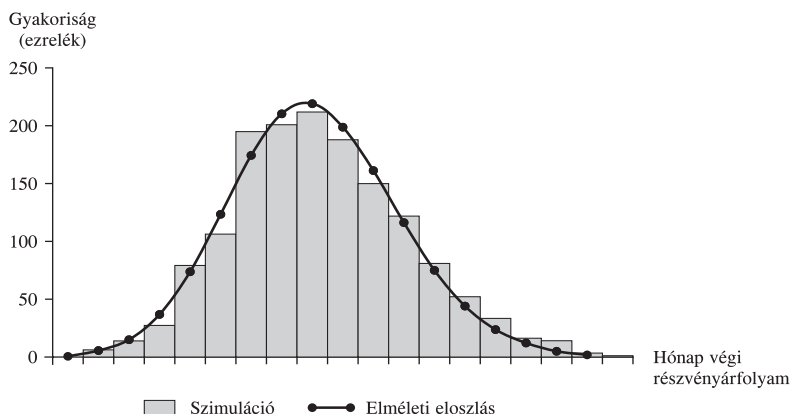
¹¹ Elvégeztünk egy kísérletet $E=130$ -ra, ekkor szinte sohasem kellett helytállni az opcióért, így a jó stratégia az volt, ha végig nem vásároltunk részvényt. $E=70$ esetén pedig szinte mindig lehívták az opciót, így a jó stratégia az volt, ha kezdet kezdetén vásároltunk egy részvényt, és a futamidő végéig tartottuk.

nak mondható (lásd Hull [1993]). Annál érdekesebben reagált a modell a σ megváltoztatására. Bár valóságban ez az érték általában a 20–40 százalék közötti intervallumba esik (uo.), és ezen intervallumon belül a célhalmaz nem ad lényegesen különböző struktúrákat, megvizsgáltunk két extrém értéket. Nullához közeli választás gyakorlatilag megszünteti a modell változóinak véletlenszerű ingadozását. A célhalmaz nagyon kicsi szórás mellett gyakorlatilag vízszintes szakasz. A $\sigma = 60$ százalék esetén a halmaz „szétrobbant”. Ennek magyarázatát a 8. ábrán látjuk, ahol a hónap végi részvényárfolyam eloszlását vizsgáltuk. Világos, hogy magas σ érték mellett a részvényárfolyam rendkívül bizonytalan, s ezt „örökli” a rá vonatkozó opció.

A 9. ábrán látható, hogy nem túl magas volatilitás esetén mennyire jól illeszkedik a hónap végi részvényárfolyam szimulált eloszlása a megfelelő paraméterekkel rendelkező lognormális eloszlásra.

9. ábra

A hónap végi részvényárfolyamok lognormális eloszlást követnek ($\sigma = 30$ százalék)



Az opcióár eloszlásának vizsgálata. Kíváncsiak voltunk az opció árának eloszlására is.

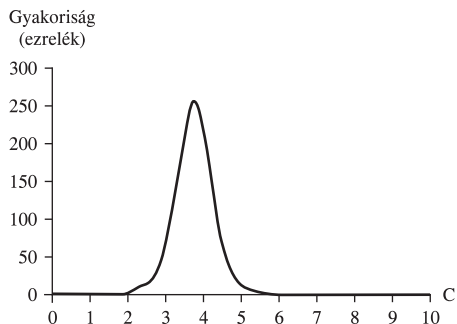
A 10. a) ábra azt az esetet mutatja, amikor nulla tranzakciós költség mellett minden nap kiegészítettük a portfóliónkat. A várható érték nyilván a Black–Scholes-megoldás,¹² és a futamidő felosztásának finomításával a görbe egyre csúcsosabbá tehető (a szórás csökken), míg folytonos esetben ráhúzódik a Black–Scholes-értékre (eltűnik a szórás). A 10. b) ábra a tranzakciós költségekkel kibővített modell eredményét mutatja, ahol a K paramétert zérusnak vettük, s így ugyanúgy, mint a BSTC esetben, mindennap kiegészítettük a portfóliónkat. Jól látható, hogy a várható érték és a szórás megnövekedett, az eloszlás pedig lognormálisnak tűnik. Az előzőekben láttuk, hogy a K paraméter növelésére a várható érték csökken, és a szórás növekszik. Az 11. a)–d) ábra azt is megmutatják, hogy K növelésével az eloszlás is drámai változáson megy keresztül. Lognormális illesztés helyett az opcióárak logaritmusára próbáltunk normális eloszlást illeszteni. Látható, hogy nem túl nagy K értékekre igen jó az illeszkedés, de ahogy nő K , úgy tolódik ki jobbra az eloszlás csúcsa, továbbá megfigyelhető, hogy egyre nagyobb az esélye az extrém kicsi értékeknek. Egy bizonyos paramétertől aztán „szétrobban” az eloszlás. Ekkor az történik, hogy bizonyos esetekben az opció értéke zérus.¹³

¹² Ezt a várhatóérték-teszt is igazolta.

¹³ Nulla logaritmusos mínusz végtelen, mi ezt az első oszlopban ábráztuk.

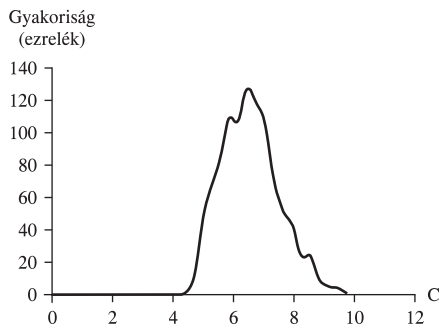
10. a) ábra

Opcióárak eloszlása a BSTC modellnél



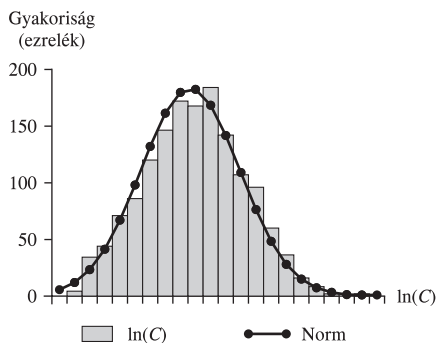
10. b) ábra

Opcióárak eloszlása a K-DH (K=0) modellnél



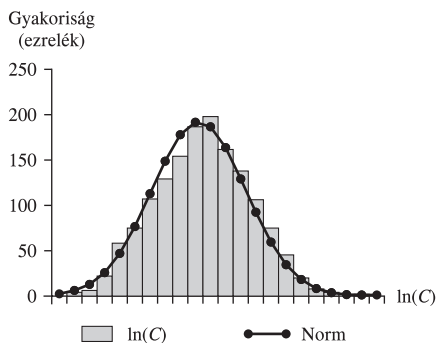
11. a) ábra

A K-DH modell eredménye K=0-ra



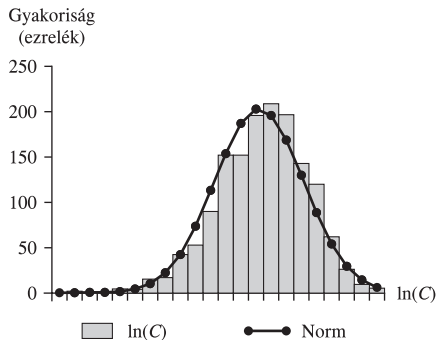
11. b) ábra

A K-DH modell eredménye K=4-re



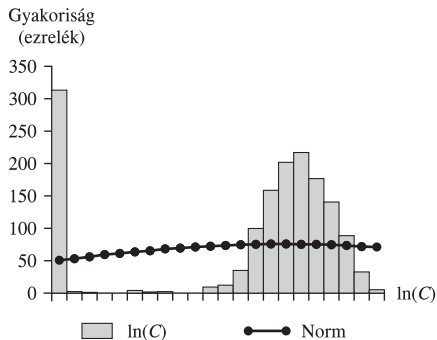
11. c) ábra

A K-DH modell eredménye K=16-ra



11. d) ábra

A K-DH modell eredménye K=32-re



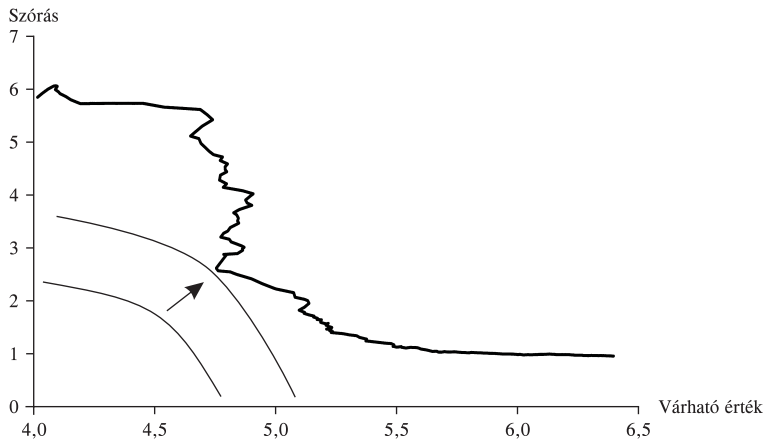
(Nagy K -ra ugyanis elképzelhető, hogy a szimuláció során egyszer sem történik kiegészítés, és az utolsó periódusban pedig nem kell helytállni az opciónál, mivel a részvény ára nem haladja meg a kötési árfolyamot.) Az opció ára ilyen esetben egy vegyes eloszlást követ. Értéke p valószínűséggel nulla, és $1-p$ valószínűséggel valamilyen folytonos eloszlás, amely hasonlít egy lognormális eloszláshoz.¹⁴

Opcióárazás a K -DH modell segítségével

Az opció árát a célhalmaz struktúrája alapján határozhatjuk meg. Az előzőekben azt igazoltuk, hogy ez a struktúra stabil. A céltér azonban olyan, hogy nincs olyan pontja, vagy megfelelően kicsi ponthalmaza, amely az összes többi pontot dominálná. Így azt mondhatnánk, hogy az opció árát minden befektető a maga hasznosságfüggvénye alapján határozza meg. Azt látjuk azonban, hogy a céltérben van egy megkülönböztetett pont, ahol a célhalmaz erőteljesen megtörik (12. ábra). Ez a pont a $(4,758; 2,612)$. Egy racionális befektető nem választ ettől különböző kiegészítési stratégiát, ugyanis ha a céltérben ettől jobbra tér el, akkor nem csökken a kockázata olyan mértékben, mint ahogy az opció ára nő, balra pedig a legkisebb elmozdulás is óriási kockázatnövekedést okoz. Ez a megfontolás azon alapszik, hogy a racionális befektető hasznosságfüggvénye olyan, hogy a célhalmazon az adott pontban veszi fel maximumát. Ennek a pontnak az eléréséhez a mi példánkban a $K = 52,75$ paramétert kellett választanunk a K -DH stratégiával.

12. ábra

A racionális befektető haszonmaximalizálása a céltérben



¹⁴ Bővebben lásd Jackwerth–Rubinstein [1996].

A várható érték becslése¹⁵

Láttuk, hogy a tárgyalt pénzügyi modellünknek egyik kimeneti változója a várható érték, amelyet a mintaáttaggal becsültünk. Ebben a fejezetben bemutatunk a várható érték becslésére egy hatásosabb módszert. Megjegyezzük azonban, hogy a másik kimeneti változó; a varianciát továbbra is a korrigált tapasztalati szórásnégyzettel becsüljük.

Varianciacsökkentő módszerek. *Avramidis–Wilson* [1996] ad jó áttekintést a szimulációs modellezésben alkalmazott varianciacsökkentő módszerekről. Általában kétféle módszer létezik:

1. korrelált minta készítése, amely hatásosabb becslést eredményezhet, mint a független, azonos eloszlású (FAE) minta;

2. becslés a paraméterek feltételes eloszlásából, amikor a feltételben szereplő változók eloszlásának elméleti paraméterei ismertek (például kontrollváltozók módszere). Ekkor a becslés hatásossága a korreláció mértékétől függően javítható.

Megjegyezzük, hogy a jelen pénzügyi modellben az árfolyammozgás játszhatja a kontrollváltozó szerepét. Egydimenziós esetben célszerű volt a futamidő végi részvényárfolyamot használni. Ez korrelál az opció árával és ismertek az elméleti paraméterei.

Kontrollváltozók módszere. Tegyük fel, hogy találunk egy olyan valószínűségi változót a modellben, amelynek elméleti paraméterei ismertek, és erős lineáris korrelációban van a modell eredményváltozójával. Ekkor használhatjuk a következő lineáris becslő formulát:

$$Y_{cv} = Y - \beta(C - \mu_c),$$

ahol Y a kimeneti változó értéke, Y_{cv} a kontrollváltozóval korrigált értéke, C a kontrollváltozó, amelynek elméleti várható értéke ismert, és pedig μ_c . (Több kontrollváltozó esetén ez utóbbi két változó értelemszerűen vektor, így a fenti kifejezés jobb oldalán egy skalárszorzás szerepel.) A kontrollváltozóval korrigált változó becslése nyilvánvalóan torzítatlan, ugyanis

$$E(\bar{Y}_{cv}) = E(\bar{Y}) - \beta E(\bar{C} - \mu_c) = E(\bar{Y}).$$

és hatásossága a β paraméter értékétől függ.

Nyilván akkor hatásos a becslés, ha tényleg csökken a korrigált változó varianciája. *Anderson* [1958] belátja, hogy β optimális értékét – az *optimális kontrollt* – a következő formula adja:

$$\beta = \frac{\sigma_{yc}}{\sigma_c^2}, \quad (6)$$

ahol σ_{yc} az eredeti kimeneti változó és a kontrollváltozó kovarianciája, σ_c^2 pedig a kontrollváltozó szórásnégyzete. (A továbbiakban σ -val mindig az elméleti, s -sel mindig a tapasztalati szórásst jelöljük). Nyilvánvaló, hogy ebben az esetben annál hatásosabb a becslés, minél nagyobb az eredeti változó és a kontrollváltozó közti korreláció, és minél kisebb a kontrollváltozó szórása, ugyanis

$$\text{Var}(Y_{cv}) = \sigma_y^2 + \beta^2 \sigma_c^2 - 2\beta \sigma_{yc}.$$

¹⁵ Felhívjuk a figyelmet arra, hogy ebben a fejezetben a szakirodalommal megegyező jelölést használunk, így az előző fejezetek változóit új jelöléssel láttuk el.

A becslés akkor hatásos, ha $\beta^2\sigma_C^2 - 2\beta\sigma_{YC} \leq 0$. Így a (6) felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\frac{\sigma_{YC}^2}{\sigma_C^2} - 2\frac{\sigma_{YC}^2}{\sigma_C^2} \leq 0, \text{ azaz } \frac{\sigma_{YC}^2}{\sigma_C^2} = \rho_{YC}^2 \geq 0.$$

Mivel ρ_{YC} (többszörös) korrelációs együttható, ezért látható, hogy a varianciacsökkentés feltétele a becslt és a kontrollváltozó(k) közti korreláció. Ez az elméleti eset, a gyakorlatban a szabadságfokok veszteséget indukálnak, ezért az következő, szabadságfokok által meghatározott küszöbértéket kapjuk:

$$\rho_{YC}^2 > \frac{q}{n-2},$$

ahol q a kontroll változók száma, n a minta mérete.

Mivel β nem ismert, ezért mintából kell becsülni. Ekkor $\hat{\beta} = b = \frac{s_{YC}}{s_C^2}$. Sajnos ebben az esetben a becslés torzítatlansága már csak akkor garantált, ha (Y, C) együttes eloszlása normális.¹⁶ Vagyis csak ekkor igaz, hogy

$$E\left(\frac{s_{YC}}{s_C^2}(\bar{C} - \mu_C)\right) = E\left(\frac{s_{YC}}{s_C^2}\right)E(\bar{C} - \mu_C) = 0. \tag{7}$$

Meg kell jegyeznünk, hogy az általunk készített pénzügyi modellben sem Y (opcióárfolyam), sem pedig C (részvényárfolyam a futamidő végén) nem követ normális eloszlást, így együttes eloszlásuk sem lehet normális eloszlás. C -ről viszont tudjuk, hogy lognormális eloszlású, vagyis a logaritmus normális eloszlású. Y elméleti eloszlása nem ismert, a grafikus megjelenítések alapján K bizonyos értékeire lognormális eloszlás sejtethető (ez a $K < 20$ tartomány).

A kontrollváltozók módszerének általánosításairól nem normális eloszlások esetére Nelson [1990] ad áttekintést, melyben lognormális eloszlásra konkrétan nem mutat be módszert.

Modellünkben megoldható, hogy úgy transzformáljuk a változókat, hogy azok már normális eloszlást kövessenek. Legyen X az opció ára, és definiáljuk most Y -t mint X logaritmusát, vagyis legyen $Y = \ln X$, továbbá jelölje C már eleve az árfolyamok logaritmusát. Így Y is és C is normális eloszlású változók,¹⁷ vagyis annak szükséges feltétele, hogy (Y, C) együttes eloszlása normális, teljesül. Képezzük a következő várhatóérték-becslést.¹⁸

$$X_{CV} = X - b(C - \mu_C), \text{ ahol } b = \frac{s_{YC}}{s_C^2}, \tag{8}$$

ahol X lognormális eloszlású és $Y = \ln X$. Mivel $E\left(\frac{s_{YC}}{s_C^2}(\bar{C} - \mu_C)\right) = 0$ most is igaz, ezért $E(\bar{X}_{CV}) = E(\bar{X}) = \mu_X$, vagyis a becslés továbbra is torzítatlan. Az persze nem biztos, hogy β most is az optimális kontroll, ugyanis:

$$\text{Var}(X_{CV}) = \sigma_X^2 + \beta^2\sigma_C^2 - 2\beta\sigma_{XC},$$

¹⁶ Ez abból a tételből következik, hogy a normális eloszlás átlag vektora és variancia-kovariancia mátrixa függetlenek. Lásd például Mory-Szekely [1986] vagy Anderson [1958].

¹⁷ Feltéve persze, hogy igaz X lognormalitására vonatkozó hipotézisünk.

¹⁸ Az ökonometriában az ilyen típusú feladatokra semilóg modelleket illesztenek, vagyis $Y = \ln X$ -re írnak fel lineáris összefüggést valamilyen magyarázó változókkal (esetünkben kontrollváltozókkal). Könnyen belátható, hogy ezzel a modellel X várható értékét torzítottan becsüljük.

$$\frac{\sigma_{YC}^2}{\sigma_C^2} - 2 \frac{\sigma_{YC}}{\sigma_C^2} \sigma_{XC} \leq 0,$$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{\sigma_{XC}}{\sigma_{YC}}.$$

Ezek szerint varianciacsökkenés abban az esetben várható, ha legalább feleakkora (X, C) kovarianciája, mint (Y, C) -jé. Belátható, hogy a varianciacsökkentés akkor maximális, ha a fenti hányados éppen egy, azaz $\sigma_{YC} = \sigma_{XC}$. Ugyanakkor független valószínűségi változók függvényeire vonatkozó tétel alapján használható a (8) becslésnél az optimális kont-

roll, ami így $b = \frac{s_{XC}}{s_C^2}$.

Belátjuk, hogy a becslés most is torzítatlan marad. Tudjuk, hogy s_{YC} , s_C^2 és \bar{C} függetlenek egymástól, ekkor azonban $f(s_{CY})$, s_C^2 és \bar{C} is függetlenek egymástól, ahol f folytonos, szigorúan monoton transzformáció. Viszont s_{YC} és s_{XC} kapcsolatát pont egy ilyen f leképezés írja le. Gondoljuk meg ugyanis, hogy az empirikus kovariancia valójában egy leképezés az $Y^n \times C^n$ minta térből a valós számegyenesre (ahol n a mintaméret). Az s_{XC} leképezés esetében pedig az n darab Y tengely helyett azok szigorúan monoton transzformációját, $X = e^Y$ tengelyeket használjuk. Így tehát a két leképezés szintfelületei bijektív viszonyban állnak egymással. Nyilvánvalóan a fenti gondolatmenet bármilyen olyan eloszlás esetében használható, amely szigorú monoton transzformációval megkapható a normális eloszlásból.

A (8) helyett tehát használhatjuk a következő, szintén torzítatlan, hatásosabb becslést:

$$X_{CV} = X - \frac{s_{XC}}{s_C^2} (C - \mu_C). \quad (9)$$

A többdimenziós normalitás tesztelése. A grafikus megjelenítések alapján úgy tűnik, hogy pénzügyi modellünkben az opcióárfolyam logaritmusának ($Y = \ln X$) eloszlása közelítően normális, így adottak (Y, C) együttes normalitásának szükséges feltételei. A peremeloszlások normalitása azonban nem elégséges feltétele az együttes normalitásnak, így elvégeztük a többdimenziós normalitás tesztelését. Az egyváltozós normális eloszlás tesztelésére a leghatékonyabb omnibuszteszt Shapiro és Wilk W -statisztikája (Shapiro–Wilk [1965]). Ennek az eljárásnak ugyanakkor ismeretes a többváltozós esetre való kiterjesztése is. A Shapiro–Wilk-féle teszt többváltozós esetre való kiterjesztése a Malkovich–Affifi [1973] cikkben található meg, valamint Marida [1980] ad teljes áttekintést ezen kívül létező egyéb tesztekéről is.¹⁹ A teszt gyakorlati alkalmazását Tew–Wilson [1992] cikkben leltük fel. Ők Royston ([1982a] AS 181 és [1982b]) egyváltozós esetre készült algoritmusát vették alapul a többváltozós W -statisztika kiszámító algoritmus elkészítéséhez. E cikk alapján fejlesztettük ki mi is a teszt elvégzéséhez szükséges algoritmust, de már az AS R94 eljárás – az AS 181 módosítása – volt a kiinduló pontunk (Royston [1992] és [1995]). A módosított változat már alkalmas 5000 mintanagysáig a teszt elvégzésére, míg a korábbi eljárás – mint a későbbi vizsgálatok során kiderült – nagy mintákra ($n > 50$) nem bizonyult adekvátnak.

A tesztet az alábbiakban röviden ismertetjük (Malkovich–Affifi [1973]):

¹⁹ A magyar szerzőktől Sarkadi–Tusnányi [1974] dolgozatot említjük meg.

$H_0: \mathbf{y}_i \sim N_m(\mu, \Sigma)$, ahol Σ pozitív definit,
 $H_1: \mathbf{y}_i$ valamilyen nonszinguláris m -dimenziós eloszlású.

Adott a következő véletlen minta: $\{\mathbf{y}_i; i = 1, \dots, n\}$, ahol $n \geq \max\{2m, 16\}$.
 Először kiszámoljuk a következő egyszerű statisztikákat:

$$\bar{\mathbf{y}} = n^{-1} \sum_{i=1}^n \mathbf{y}_i \quad \mathbf{A} = \sum_{i=1}^n (\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}})(\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}})^T.$$

Belátható, hogy az \mathbf{A} mátrix 1 valószínűséggel nonszinguláris, így 1 valószínűséggel létezik \mathbf{A} inverze. Ekkor létezik egy $\mathbf{y}^+ \in \{\mathbf{y}_i; i = 1, \dots, n\}$, ahol:

$$(\mathbf{y}^+ - \bar{\mathbf{y}})^T \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{y}^+ - \bar{\mathbf{y}}) = \max \{ (\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}})^T \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}}) : i = 1, \dots, n \}.$$

Ekkor kiszámíthatók a következő változók $Z_i \equiv (\mathbf{y}^+ - \bar{\mathbf{y}})^T \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}})$, $i = 1, \dots, n$, melyek sorba rendezendők a következő módon $Z_{(1)} < Z_{(2)} < \dots < Z_{(n)}$. A többdimenziós Shapiro–Wilk-statisztika ekkor a következő:

$$W^* = \frac{\left(\sum_{i=1}^n a_i Z_{(i)} \right)^2}{(\mathbf{y}^+ - \bar{\mathbf{y}})^T \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{y}^+ - \bar{\mathbf{y}})},$$

ahol az a_i koefficiensek megegyeznek az egydimenziós n mintaméretű Shapiro–Wilk-statisztikában szereplő koefficiensekkel. Ezért Royston algoritmusán sikerült viszonylag könnyen végrehajtani a kiterjesztést. A nullhipotézis α szignifikanciaszinten elvethető, ha

$$W^* < w_\alpha^*(m, n).$$

A küszöbértékeket Monte-Carlo-szimulációval határoztuk meg 10 000 független mintavétel alapján. A *Tew–Wilson* [1992] cikkben közölt néhány küszöbértéknél ($n = 16, 32, 64$, valamint $m = 4, 8, 16$) valamivel alacsonyabb értékeket kaptunk, ez az a_i koefficiensek eltérő kiszámításnak a következménye. A 3. táblázatban közlünk néhány küszöbértéket jelen problémánk szempontjából releváns esetekre:

3. táblázat

Shapiro–Wilk-teszt kritikus értékei $m = 2$ -re

Mintaméret	$\alpha = 0,050$	$\alpha = 0,010$	$\alpha = 0,001$
30	0,9113	0,8781	0,8225
50	0,9433	0,9207	0,8835
100	0,9695	0,9583	0,9418

A K–DH2 modell néhány próbatesztelése alapján megállapítható, hogy a $K^c[4, 20]$ tartományra az (Y, C) kétváltozós eloszlás 5 százalékos szignifikanciaszinten elfogadható Gauss-féle eloszlásnak bizonyos T, TC értékek vagy mintaméret esetén.²⁰ A $K^c[0, 4]$ tartományban a teszt bizonyos mintaméret és T értékeknél 1 százalékon és 5 százalékon is elveti a többváltozós normalitás hipotézisét, és ugyanez történik a $K^c[20, 50]$ tartományban is. Ez utóbbiban ugyanakkor szintén bizonyos mintaméretknél és T értékeknél a teszt mind 1 százalékon, mind 5 százalékon elfogadja a nullhipotézist. $K > 50$ esetén azonban az opciók eloszlására csonka eloszlást kapunk, amely esetben a hipotézisvizsgálat értelemszerűen nem indokolt elvégezni.

²⁰ A tesztelést elsősorban kis mintákra tartottuk érdemesnek elvégezni.

A módszertan felhasználása pénzügyi szimulációnál. Az előző pontban becslésre az egyszerű mintaátlagot és korrigált tapasztalati szórásnégyzetet használtuk. Ezt a szakirodalom *direkt szimuláció* néven ismeri (*crude experiment*). Közismert, hogy ezek a becslések torzítatlanok és konzisztensek. Említettük, hogy az átlagbecslések varianciájának elfogadható szintre való csökkentéséhez (például ha a kérdéses paraméterre optimalizációt akarunk végezni) gyakran nagyméretű mintákkal kell dolgozni, s ennek jelentős erőforrásigénye lehet. A varianciacsökkentő eljárások széles skáláját fejlesztették ki a becslés hatásosságának javítása céljából, miáltal az erőforrásigény csökkenthető. Ezeknek, a számunkra megfelelőnek tűnő változatát tárgyaltuk eddig, s megjegyzések szintjén röviden utaltunk pénzügyi modellünkkel való analógiákra. Most részletesen bemutatjuk e módszer konkrét alkalmazását a K–DH2 modellre. A becsléseket $n = 50$ és $n = 100$ elemű mintákra végeztük, a mintavételezések számát pedig $r = 1000$ -ben határoztuk meg. Legyen tehát a modell eredményváltozója az opció ára (most X), és $Y = \ln X$, továbbá jelöljük ki kontrollváltozónak a lejáratú időpontban kapott részvényárfolyam logaritmusát ($C = \ln S_T$)!

4. táblázat

Eredmények

 $(n = 50, TC = 0,01)$

K	W	σ^2	σ_{CV}^2	η	Torzítás	MSE	MSE_{CV}	η_{MSE}	ρ	η_0
0,0	1%	0,0201	0,0177	88,04	0,0068	0,0201	0,0178	88,27	0,40	85,79
1,0	1%	0,0202	0,0178	88,17	0,0066	0,0202	0,0179	88,39	0,40	85,79
2,0	1%	0,0205	0,0181	88,31	0,0062	0,0205	0,0182	88,50	0,39	86,59
4,0	5%	0,0207	0,0184	88,53	0,0051	0,0207	0,0184	88,66	0,39	86,59
8,0	5%	0,0212	0,0192	90,45	0,0017	0,0212	0,0192	90,46	0,38	87,38
10,0	5%	0,0210	0,0200	91,33	-0,0008	0,0210	0,0201	91,34	0,38	87,38
16,0	1%	0,0278	0,0260	93,84	-0,0073	0,0278	0,0261	94,04	0,33	91,01
32,0	-	0,0426	0,0422	98,98	-0,0209	0,0426	0,0426	100,00	0,25	95,74
50,0	-	0,1292	0,1401	108,37	-0,0554	0,1292	0,1431	110,74	0,11	100,89

5. táblázat

Eredmények

 $(n = 100, TC = 0,01)$

K	W	σ^2	σ_{CV}^2	η	Torzítás	MSE	MSE_{CV}	η_{MSE}	ρ	η_0
0,0	1%	0,0103	0,0087	84,78	0,0039	0,0103	0,0087	84,93	0,40	84,87
1,0	1%	0,0104	0,0088	84,96	0,0038	0,0104	0,0088	85,10	0,40	84,87
2,0	1%	0,0104	0,0089	85,17	0,0037	0,0104	0,0089	85,30	0,39	85,66
4,0	5%	0,0108	0,0092	85,23	0,0030	0,0108	0,0092	85,32	0,39	85,66
8,0	5%	0,0111	0,0097	86,97	0,0012	0,0111	0,0097	86,98	0,38	86,44
10,0	5%	0,0115	0,0100	86,71	0,0000	0,0115	0,0100	86,71	0,38	86,44
16,0	1%	0,0138	0,0121	87,75	-0,0036	0,0138	0,0121	87,84	0,33	90,03
32,0	-	0,0210	0,0202	96,28	-0,0103	0,0210	0,0203	96,78	0,25	94,72
50,0	-	0,0649	0,0680	104,83	-0,0210	0,0649	0,0689	106,12	0,11	99,81

6. táblázat
Eredmények
($n=100, TC=0,03$)

K	W	σ^2	σ_{CV}^2	η	Torzítás	MSE	MSE_{CV}	η_{MSE}	ρ	η_0
0,0	-	0,0601	0,0466	77,50	0,0138	0,0601	0,0468	77,82	0,50	75,77
1,0	-	0,0612	0,0479	78,32	0,0131	0,0612	0,0481	78,60	0,48	77,75
2,0	-	0,0588	0,0458	77,82	0,0110	0,0588	0,0459	78,07	0,48	77,75
4,0	5%	0,0507	0,0381	75,24	0,0054	0,0507	0,0382	75,30	0,51	74,75
8,0	1%	0,0472	0,0376	79,56	-0,0073	0,0472	0,0376	79,67	0,46	79,65
10,0	-	0,0427	0,0344	80,57	-0,0078	0,0427	0,0344	80,71	0,45	80,57
16,0	-	0,0900	0,0815	90,80	-0,0273	0,0900	0,0815	91,64	0,38	86,44
32,0	-	0,4800	0,1716	35,76	-0,0102	0,4800	0,1717	35,78	0,80	36,37
50,0	-	0,3214	0,0858	26,71	-0,0392	0,3214	0,0874	27,19	0,86	26,31

A 4–6. táblázatokban²¹ különválasztottuk azokat a tartományokat, ahol a Shapiro–Wilk-teszt legalább 1 százalékon elfogadta a nullhipotézist, vagyis, hogy (Y, C) együttes eloszlása normális. A hipotézis alapján tehát ezekben a tartományokban fogadjuk el a torzítatlanságot. Megjegyezzük, hogy a futtatások eredményeként számított empirikus torzítások is itt bizonyultak a legkisebbnek. A modell kiinduló eloszlását létrehozó véletlenszám-generátor eleve magában foglal némi torzítást, a *ran1* eljárás esetében ez az ötödik tizedes jegyen jelenik meg. Eredményeink értékelésénél ezt tehát figyelembe vettük. Az $\alpha = 1$ százalék és 5 százalék tartományokban tehát egy torzítatlan becslési modellt állítunk szembe a direkt szimulációs eljárással (szintén torzítatlan), itt tehát az összehasonlítás alapja a hatásosság (varianciák viszonya). A 4–6. táblázatokból kitűnik, hogy minden ilyen esetben sikerült valamilyen mértékben csökkenteni a varianciát. A tartományokon kívül ugyanakkor a legkisebb négyzetes hibákat (MSE) tekintjük az összehasonlítás kritériumának. Itt természetesen elméleti alapon semmit sem tudunk garantálni, még a legkisebb négyzetes hibák tekintetében sem. Például a $TC = 0,03$ tranzakciós költség mellett a torzítatlanságot csak egy nagyon szűk tartományban tudjuk garantálni, ennek ellenére az empirikus eredmények azt mutatják, hogy MSE-kritérium szerint a magas korrelációnak köszönhetően így is rendkívül jó modellt tudunk készíteni (6. táblázat). Tájékoztatásul az utolsó két oszlopban felsoroljuk a korrelációs együtthatókat ($n=5000$ mintából becslve), valamint az elméletileg elérhető varianciacsökkentési arányszámokat. A táblázatok jól szemléltetik, hogy minél kisebb a tranzakciós költség, annál kisebb a korreláció az opcióár és a részvényárfolyam között. (Nulla tranzakciós költség esetén a két változót korrelálatlannak tapasztaltuk.)

²¹ A 4–6. táblázatok fejlécében szereplő jelölések a következők:

- K a K-DH2 modellben szereplő tőréshtar-szélesség
- Wt a Shapiro-Wilk-féle W -statisztika
- σ^2 az egyszerű átlagbecslés varianciája
- σ_{CV}^2 a kontrollváltozós átlagbecslés varianciája
- $\eta = \sigma_{CV}^2 / \sigma^2$ a kontrollváltozós becslés hatásossági mérőszáma
- Torzítás kontrollváltozós átlagbecslések átlagának eltérése az egyszerű átlagbecslések átlagától [az utóbbi esetében az effektív mintaméret (n) szorozva a mintavételezések számával]
- MSE az egyszerű átlagbecslés legkisebb négyzetes hibája (jelen esetben azonos σ^2 -tel)
- MSE_{CV} a kontrollváltozós átlagbecslés legkisebb négyzetes hibája
- $\eta_{MSE} = MSE_{CV} / MSE$
- ρ : az elméleti korreláció értékének becslése nagy mintából
- η_0 az elméletileg elérhető maximális varianciacsökkentés mérőszáma az $(n-2)(n-q-2)^{-1}(1-\rho^2)$ formula alapján

*

A tanulmányban bemutattuk: numerikus módszerek segítségével miként lehet pénzügyi befektetések hozamát és kockázatát szimulálni. Megadtunk egy olyan eljárást, mely nemcsak az opcióárazás esetében hasznos, hanem kisebb-nagyobb kiegészítésekkel alkalmas bármilyen valódi befektetés, illetve befektetési stratégia következményeinek vizsgálatára is.

Az opcióárazás kérdésénél néhány stratégiát bemutatva és összehasonlítva, meghatároztuk azt az opcióárat, amelyet a racionális befektető nagy valószínűséggel elfogad. Megmutatható, hogy olyan piacon, ahol ettől az értéktől bármilyen irányban eltérő opcióárak léteznek, ott optimális kiegészítési stratégiával lehetőség van extranyereség elérésére (Vacca [1997]).

Felhívtuk a figyelmet a varianciacsökkentő módszerek fontosságára és egy pénzügyi példa segítségével mutattuk be alkalmazási lehetőségét. A tanulmány befejező részében a módszer pénzügyi alkalmazhatóságának szempontjából elengedhetetlen követelménynek tettünk eleget, mikor kiterjesztettük a módszer alkalmazhatósági körét normális eloszlású változókról minden olyan eloszlásra, mely a normális eloszlásnak valamilyen monoton transzformációja.

Hivatkozás

- ANDERSON, T. W. [1958]: *Multivariate Statistical Analysis*; Wiley, New York.
- AVRAMIDIS, A. N.–WILSON, J. R. [1996]: *Integrated Variance Reduction Strategies for Simulation. Operation Research*, Vol. 44. No. 2., március–április, 327–346. o.
- BENEDEK GÁBOR [1998]: *Opcióárazás tranzakciós költségek mellett*. Diplomamunka, Budapesti Közgazdaságtudományi Egyetem, Budapest.
- BLACK, F. [1988]: *The Holes in Black-Scholes*. *RISK*, Vol. 1. No. 4. március, 419–425. o.
- BLACK, F.–SCHOLES, M. [1973]: *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*. *Journal of Political Economy*, 81. május, 637–654. o.
- CHURCHILL, R. V. [1963]: *Fourier Series and Boundary Value Problems*, 2. kiadás. McGraw-Hill, New York.
- COX, J.–ROSS, S. [1976]: *The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes*. *Journal of Financial Economics*, Vol. 3. március, 145–166. o.
- COX, J.–RUBINSTEIN, M.–ROSS, S. [1979]: *Option Pricing A Simplified Approach*. *Journal of Financial Economics*, Vol. 7. augusztus, 229–263. o.
- HULL, J. C. [1993]: *Options, Futures, and other Derivative Securities*. 2. kiadás. Prentice-Hall International, Inc., Engle Wood Cliffs, New Jersey.
- HULL, J. C.–WHITE, A. [1987]: *The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities*. *The Journal of Finance*, június, 281–300. o.
- HUNTER, A. [1995]: *Sugal Programming Manual v2.1*. Kézirat, University of Sunderland.
- JACKWERTH, J. C.–RUBINSTEIN, M. [1996]: *Recovery Probability Distribution from Option Prices*. *The Journal of Finance*, december.
- KNUTH, D. E. [1981]: *The Art of Computer Programming: Seminumerical Algorithms*. Addison-Wesley, Reading, MA.
- MALKOVICH, J. F.–AFFIFI, A. A. [1973]: *On Test for Multivariate Normality*. *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 68. No. 341, március, 176–179. o.
- MARIDA, K. V. [1980]: *Test of Univariate and Multivariate Normality*. Megjelent: *Handbook of Statistics*, Vol 1. Analysis of Variance, 9. fejezet.
- MERTON, R. [1973]: *Theory of Rational Option Pricing*. *Bell Journal of Economics and Management Science*, Vol. 4., 141–183. o.
- MILEVSKY, M.–PRISMAN, E. [1997]: *Tax-Adjusted Algorithm for Pricing Derivative Securities Using the Symbolic Computational Language MAPLE*. *Conference on Computational Intelligence*

- for Financial Engineering (CIFer), New York City, Crowne Plaza Manhattan, március, 157–163. o.
- MÓRY F. TAMÁS–SZÉKELY GÁBOR (szerk.) [1986]: *Többváltozós statisztikai analízis*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest.
- NELSON, B. L. [1990]: Control Variate Remedies. *Operations Research*, Vol. 38. No. 6., november–december, 974–992. o.
- PRESS, W. H.–TEUKOLSKY, S. A.–VETTERLING, W. T.–FLANNERY, B. P. [1992]: *Numerical Recipes in C*. Cambridge University Press, Cambridge.
- ROYSTON, J. P. [1982a]: An Extension of Shapiro and Wilk's Test for Normality to Large Samples. *Applied Statistics*, Vol. 31, 115–124. o.
- ROYSTON, J. P. [1982b]: Algorithm AS 181. The W-test for Normality. *Applied Statistics*, Vol. 31, 176–180. o.
- ROYSTON, J. P. [1992]: Approximating the Shapiro-Wilk W-test for non-normality. *Statistical Computation*, Vol. 2., 117–119. o.
- ROYSTON, J. P. [1995]: Remark AS R94. A Remark on Algorithm AS 181: The W-test for Normality. *Applied Statistics*, Vol. 44. No. 4., 547–551. o.
- SARKADI KÁROLY–TUSNÁDY GÁBOR [1974]: Testing for Normality and Exponentiality. *Proc. of the 5th Brassow Conference on Probability Theory*, 99–118. o.
- SHAPIRO, S. S.–WILK, M. B. [1965]: An Analysis of Variance Test for Normality (complete samples). *Biometrika*, Vol. 52., No. 3–4., 591–611. o.
- TEW, J. D.–WILSON, J. R. [1992]: Validation of Simulation Analysis Methods for the Schruben-Margolin Correlation Induction Strategy. *Operations Research*, Vol. 40. No. 1., január–február, 87–103. o.
- VACCA, L. [1997]: *Managing Options Risk with Genetic Algorithms*. Conference on Computational Intelligence for Financial Engineering (CIFer), New York City, Crowne Plaza Manhattan, március, 29–35. o.