Közgazdasági Szemle, XLVI. évf., 1999. július–augusztus (689–700. o.)

SIMONOVITS ANDRÁS

A racionális és a naiv várakozások stabilitásának összehasonlítása

A modern közgazdaságtanban a racionális várakozások feltevése egyre inkább háttérbe szorítja a naiv (vagy adaptív) várakozásokét. *Grandmont* [1998] egy viszonylag egyszerű modell segítségével megmutatta, hogy az állandósult állapot lokális stabilitása szempontjából a naiv várakozások általában jobbak, mint a racionális várakozások. Először általánosítjuk az alapmodellt, és ezzel általánosítjuk Grandmont eredményeit. Majd egy konkrét modellt vizsgálunk, az együttélő nemzedékekét, amely nem pontosan illeszkedik az alapmodellhez, azonban a kvalitatív eredmények hasonlók.*

A várakozások akkor játszanak szerepet a közgazdaságtanban, ha a vizsgált rendszer jelenlegi állapota nemcsak a korábbi állapotoktól, hanem a jövőbeli állapotokra vonatkozó előrejelzésektől is függ. A közgazdászok először *statikus* és *naiv* (vagy általánosabban: adaptív) várakozásokat tanulmányoztak, ahol a jelenlegi állapotra vonatkozó előrejelzés azonos az előző időszaki állapottal. Ilyen a sertésciklus híres pókhálómodellje (*Ezekiel* [1938]). Ezekben a modellekben egy nyilvánvaló nehézség jelentkezik: naiv várakozások esetén a szereplők folyamatosan ugyanazt a triviális előrejelzési hibát követik el. Ettől a rendellenességtől *Muth* [1961] úgy próbált megszabadulni, hogy bevezette a *racionális várakozások*at, ahol az előrejelzés minden rendelkezésre álló információt tökéletesen felhasznál. (A determinisztikus rendszerek világában gyakrabban beszélünk *tökéletes előrelátás*ról, mint racionális várakozásról. Ismert a semlegesebb modellkonzisztens várakozások szakszó is. Mindazonáltal mi a racionális várakozások kifejezést alkalmazzuk, mert ez a párja a naiv várakozásoknak.)

Manapság az ódivatú adaptív várakozások fokozatosan teret vesztenek, és a közgazdászok zöme azt gondolja, hogy a nem racionális várakozások a tudomány szemétdombjára kerültek. Kevésbé ismert azonban, hogy a racionális várakozásokkal is sok baj van.

Talán *Sidrauski* [1967] volt az első, aki *Tobin* [1965] modelljét elemezve, felfedezte a racionális várakozásoknál fellépő *nyeregpont-instabilitás*t. *Sargent–Wallace* [1973] elutasította Sidrauski értelmezését, és a kezdeti feltételeket mesterségesen korlátozva, visszanyerte a stabilitást. (Figyelemre méltó, hogy *Muth* [1962] publikálatlan írása már felvetette e kérdést.)

Hogyan vitatkozhat bárki is azon, hogy melyek a kezdeti feltételek? A racionális várakozásoknál ez azért lehetséges, mert kétféle kezdeti állapot van: korábbi állapotok és

* A jelen cikkhez kapcsolódó kutatást az OTKA T 029315 támogatása tette lehetővé. Kifejezem hálámat *John Muth*nak, aki egy 1987-es beszélgetést követően elküldte nekem egy 1962-ben írt publikálatlan írását. Ugyancsak hálás vagyok *Molnár György*nek egy rokon kutatásban való részvételéért, amelynek eredményeit *Molnár–Simonovits* [1996]-ban közöltük, valamint az 1. tétel sugalmazásáért.

Simonovits András az MTA Közgazdasági Kutatóközpontjának tudományos tanácsadója.

jövőbeli várakozások. *Laitner* [1981]-et követve az előbbieket *történeti kezdeti állapotok*nak, az utóbbiakat *nem történeti kezdeti állapotok*nak nevezzük. Az előbbiek adottak, az utóbbiak nem. Így annyi instabil irány tüntethető el, amennyi meghatározatlan kezdeti állapot, azaz jövőbeli várakozás létezik, ha ez utóbbiakat megfelelően specifikáljuk. Ha az instabil sajátértékek (irányok) száma nem nagyobb, mint a nem történeti kezdeti állapotoké, akkor minden instabil irány eltüntethető, viszont *meghatározatlan*ok maradhatnak egyes várakozások. Abban az esetben, ha az instabil sajátértékek (irányok) száma nem kisebb, mint a nem történeti kezdeti állapotoké, a stabilitási törekvések minden várakozást *meghatároznak*, de maradhatnak instabil irányok. Egyenlőség esetén minden jövőbeli várakozás meghatározható, és a pályák lokálisan stabilak. (Egy másik módszer a meghatározottság biztosításához: bizonyos végállapotok kikötése.) Paradox módon tehát a racionális várakozások híveinél a nyeregpont-instabilitás hátrányból előnnyé változik (*Blanchard–Fischer* [1989] 5. fejezet). Nem szabad azonban megfeledkezni a számítási nehézségekről, amelyek az instabil megoldások, az ún. *buborékok* eltávolításakor jelentkeznek. Az 1. példában látni fogjuk, hogy a kezdeti állapotok mesterséges korlátozása azt kívánja, hogy *a)* a síkbeli rendszer mindkét sajátértéke legyen valós, *b)* az egyik sajátérték legyen, a másik ne legyen a (–1,1) intervallumban és *c)* a koordinátor ismerje a második sajátértéket, hogy a kezdeti állapotot megfelelően beállíthassa. Egyik követelmény sem jelentéktelen! Ezért a továbbiakban a stabilitást az eredeti értelemben fogjuk elemezni, és csak néha utalunk a korlátozott stabilitásra.

Ráébredve a racionális várakozásokkal kapcsolatos (főként információs) nehézségekre, számos közgazdász megkísérelte a fogalom módosítását. Például *Bray* [1982] a lineáris sztochasztikus modellek racionális várakozásait mint egy racionális tanulási folyamatot írta le, amely a modell paramétereinek megismerésére irányul.

Dolgozatom egy másik, *Fuchs* [1979]-től *Grandmont* [1998]-ig ívelő irányzathoz kapcsolódik. Az *adaptív tanulás*nak nevezett irányzat nem lineáris determinisztikus rendszereket vizsgál. A legáltalánosabb keretben *Grandmont–Laroque* [1990] elemezett egy absztrakt időleges egyensúlyi modellt, amelyben a véges dimenziós vektorral leírt jelenlegi állapot m múltbeli állapottól és n jövőbeli várakozástól függ. A szerzők föltették, hogy ez utóbbi állapotok a múltbeli állapotok függvényei, azaz tanulás megy végbe. Fő eredményük: azonosítható „a körülményeknek egy viszonylag nagy halmaza, amelynél ha a stacionárius állapot stabil a tanulásnál, akkor instabil a tökéletes előrelátásnál."

Ebben a dolgozatban először egy egyszerűsített, úgynevezett *absztrakt* modellt vizsgálunk, skalárváltozókkal helyettesítve a vektorváltozókat és elhagyva a tanulási függvényeket. Mindazonáltal megtartjuk *Grandmont–Laroque* [1990] összetett késleltetési és várakozási sémáját. Valóban, számos konkrét modell ismeretes, amelyben a jelenlegi állapotot egy sor jövőbeli várakozás befolyásol: az életciklus és az együttélő korosztályok (*Overlapping Generations*, rövidítve: *OLG*) modelljében a jövőbeli kamatláb-várakozások sorozatától függ a jelenlegi kamatláb (*Auerbach–Kotlikoff* [1987]).

Bevezetjük a *vegyes várakozások* fogalmát, ahol d egy nem negatív egész szám, és az első d várakozás racionális, a maradék $n–d$ várakozás pedig naiv, pontosabban azonos a legfrissebb racionális várakozással. (*Molnár–Simonovits* [1996] d-várakozásoknak nevezte ezt a típust.) E fogalom segítségével együtt tárgyalhatjuk a racionális és a naiv várakozásokat. A stabilitás/instabilitás kérdését az *1. ábra* szemlélteti, ahol α_0 és α_1 mutatja a múltbeli és a jelenlegi hatás relatív erejét a jövőbeli hatáshoz képest.

A prototípus mellett korábban már számos konkrét modellt elemeztek. *Lovell* [1962] és *Simonovits* [1983] a készletszabályozási várakozási modellben kapott a *Grandmont–Laroque*-hoz hasonló eredményt. Rokon tapasztalatokról számoltunk be *Molnár–Simonovits* [1996] cikkünkben az együttélő nemzedékek és korosztályok vonatkozásában. Ugyanakkor a *Lovell* [1962] modellt általánosító és módosító *Simonovits* [1979*a*, 1979*b*] modellel minőségileg ellentétes eredményeket kaptam: a racionális várakozások stabilabbak, mint a naiv várakozások.

E dolgozatban csupán egyetlen egy konkrét modellt elemzek: az együttélő nemzedékek modelljét. Bár *Gale* [1974], *Kehoe–Levine* [1985], *Simonovits* [1994], [1995] és *Molnár–Simonovits* [1996] már foglalkozott e kérdéssel, most egyszerűbb és általánosabb tételekkel szolgálhatok.

A bevezetés végére érve a következő kérdés vetődik föl: mitől függ, hogy a racionalitás segíti vagy gátolja a stabilitást. A mai napig nincs olyan szupermodellünk, amelynek segítségével válaszolhatnánk a kérdésre. A prototípus- és a konkrét modellek tanulmányozása azonban közelebb visz a kérdés megoldásához. Erre vállalkozik e cikk.

Két sajátosságra hívom föl a cikk olvasóinak a figyelmét.

1. Az általános modell nem optimalizáláson alapul, ezért sokan első kézből elutasítják. Azt hiszem, hogy az optimalizálás hiánya inkább erény, mint hiányosság, hiszen ez a megközelítés nagyobb általánosságot jelent (lásd *Kornai* [1971] és *Grandmont* [1998]).

2. Kizárólag lokális stabilitást vizsgálunk, azaz lényegében a lineáris (vagy linearizált) modellek világában maradunk. A modern tudomány egyik nagy felfedezése, hogy ez nagyon speciális világ, amelyből szükségképpen kimaradnak a káoszelméleti eredmények, melyeket itt távirati stílusban fogalmazunk meg: egyszerű determinisztikus modellekben is keletkezhetnek bonyolult pályák. Például *Brock–Hommes* [1997] modelljében a szereplők választhatnak: pénzért megveszik a pontos, racionális várakozásokon alapuló előrejelzést vagy megelégszenek a pontatlan naiv várakozásokkal, attól függően, hogy melyik ad nagyobb profitot. Ehhez tegyük hozzá, hogy racionális várakozásokon alapuló, egyszerű optimalizálási modellek is adhatnak kaotikus dinamikát, ahol a tökéletes előrelátás fogalma is elveszti vonzerejét (*Grandmont* [1985]).

Elfogadhatóbbá teszi-e a naiv várakozások feltevését a racionális várakozások részleges csődje? Már korábban említettük, hogy a pókhálómodellel a szereplők nem tanulnak nyilvánvaló hibáikból. Vannak azonban olyan modellek is, ahol a naiv várakozások hibái egyáltalán nem nyilvánvalók. Ahogyan *Grandmont* [1998] megjegyezte: nemcsak az előrejelzések, de a hibák is lehetnek önbeteljesítők. Ha a szereplők azt hiszik, hogy a pálya azonos és független eloszlású valószínűségi változók sorozata, akkor a keletkező pálya kaotikus, és nincs olyan lineáris statisztikai módszer, amely szisztematikus hibát tárna fel (*Hommes–Sorger* [1997]).

A dolgozat a bevezetésen kívül két részből áll. Az első a vegyes várakozások általános modelljét elemzi, a második az együttélő nemzedékekét.

Vegyes várakozások absztrakt modellje

Grandmont–Laroque [1990], valamint *Grandmont* [1998] nyomán egy absztrakt dinamikus rendszert vizsgálunk, amelyet a *Molnár–Simonovits* [1996]-féle *vegyes*, illetve *d*-) *várakozások* hajtanak.

Az idő jele $t = 0, 1, 2, \ldots$, a rendszer skalárállapota a t-edik időszakban x_t, ${}_tx_\tau$ a t időszakban képzett τ ($>t$) időpontra vonatkozó várakozást jelöli. Legyen m és n két természetes szám, amelyek rendre a jelent befolyásoló múltbeli és a jövőbeli állapotok számát jelölik.

A modell dinamikája a következő:

$$g(x_{t-m}, \ldots, x_t, {}_tx_{t+1}, \ldots, {}_tx_{t+n}) = 0. \tag{1}$$

Vegyes várakozások

Mielőtt bevezetnénk e rész központi fogalmát, a vegyes várakozásokat, matematikailag definiáljuk a két legfontosabb speciális esetet, a racionális várakozásokat és a naiv várakozásokat.

Racionális várakozások: minden várt állapot megegyezik a *megfelelő* időszak modellbeli tényleges értékével:

$$ {}_t x_{t+i} = \mathrm{x}_{t+i}; \qquad i = 1, \dots, n. \tag{2}$$

Naiv várakozások: minden várt állapot megegyezik a *jelenlegi* tényleges értékkel:

$$ {}_t x_{t+i} = x_t; \qquad i = 1, \dots, n. \tag{3}$$

Vegyes várakozások

A közös tárgyalás kedvéért bevezetünk egy általánosabb várakozási sémát, a *vegyes várakozások*ét. Legyen d egy egész szám: $0 \le d \le n$.

A vegyes várakozásokat a következő tulajdonságok határozzák meg.

a) Az x_t jelen állapot mellett a közeljövő $x_{t+1}, \dots, x_{t+d}$ állapotai is ismertek a t-időszakban:

$$ {}_t x_{t+i} = x_{t+i}, \qquad i = 1, \dots, d. \tag{4}$$

b) A távoli jövő $x_{t+d+1}, \dots , x_{t+n}$ állapotainak várt értékei a $(t+d)$-edik időszak állapotával azonosak:

$$ {}_t x_{t+i} = x_{t+d}, \qquad i = d+1, \dots, n. \tag{5}$$

Behelyettesítve (4)–(5)-öt (1)-be, az *alapegyenlet*hez jutunk:

$$ g(x_{t-m}, \dots, x_{t+d-1}, x_{t+d}, \dots, x_{t+d}) = 0. \tag{6}$$

Megjegyzések. 1. Vegyük észre, hogy racionális várakozásnál *b)* üres, naiv várakozásnál pedig *a)* üres.

2. Figyelemre méltó, hogy a igazi $(d>0)$ vegyes várakozásoknál a t-edik időszakban az egyidejű x_t állapot helyett a jövőbeli x_{t+d} állapot határozódik meg. Emiatt a 0-dik időszakban nemcsak a múltbeli $x_{-m}, \dots, x_{-1}$ állapotokat kell megadni kezdeti feltételként, hanem az x_0 kezdőállapot mellett a közeljövőbelieket is: $x_1, \dots, {}_0x_{d-1}$. *Laitner* [1981] az előbbieket *történelmi*, az utóbbiakat *nem történelmi kezdeti érték*nek nevezi.

Lokális stabilitás

Ebben a részben jelölje x^o az állandósult állapotot. Könnyen belátható, hogy minden állandósult állapot független a várakozások típusától. Mostantól feltesszük, hogy legalább egy állandósult állapot létezik. (*Simonovits* [1994]-ből és [1995]-ből ismert, hogy az együttélő nemzedékek vagy korosztályok modelljében tipikusan kettő vagy annál is több állandósult állapot létezik.)

Linearizáljuk (6)-ot x^o körül. Legyen a g függvény x_{t+i} szerinti parciális deriváltja az x^o pontban γ_i, $i = -m, \dots, n$. Legyen $x^d_t = x_t - x^o$ az *eltérésváltozó*. Ekkor az x^o pont körüli lokális g_d-dinamikát a következő lineáris differencia egyenlet írja le:

$$ \sum_{i=-m}^{d-1} \gamma_i x^d_{t+i} + \left(\sum_{j=d}^{n} \gamma_j \right) x^d_{t+d} = 0. $$

A negatív indexektől megszabadulhatunk, ha bevezetjük a következő mennyiségeket: $\alpha = \gamma_{i-m}$. Ekkor

$$p_d(\lambda) = \sum_{i=0}^{m+d-1} \alpha_i \lambda^i + \left(\sum_{j=d}^{n} \alpha_{m+j} \right) \lambda^{m+d}$$

a megfelelő karakterisztikus polinom. A stabilitás a $p_d(\lambda)$ polinom gyökeinek elhelyezkedésétől függ.

A dinamika nagyon bonyolult lehet, amelyet az $(m + d)$-fokú polinom $m + d$ gyöke és a feladat $m + d$ kezdeti feltétele határoz meg.

Nyilvánvaló, hogy egy szabadságfokunk van *g,* vagy másképp fogalmazva, az α_i-k megválasztásában. A következő normalizálást választjuk: $\alpha_{m+n} = 1$.

A következő példa a legegyszerűbb esetben szemlélteti a helyzetet.

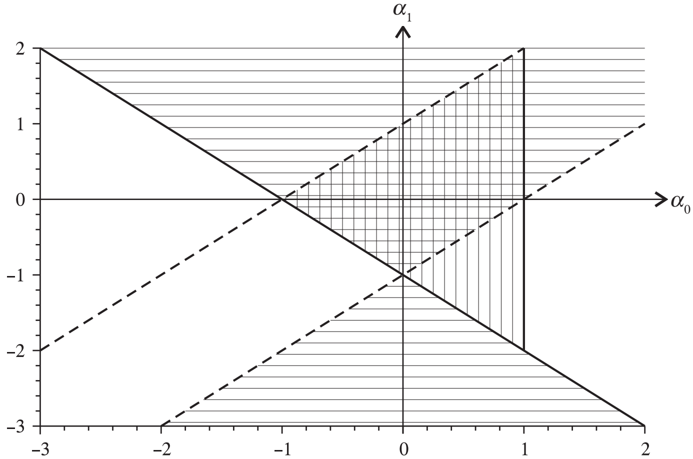
1. példa (Vö. *Grandmont* [1998].) Legyen $m = n = 1$. Normalizálás: $\alpha_2 = 1$. Jelölés: $\beta = \alpha_1 + 1$, nullától különböző szám. Ekkor $p_0(\lambda) = \alpha_0 + \beta\lambda$ és $p_1(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1\lambda + \lambda^2$.

A naiv várakozásokat képviselő elsőrendű differenciaegyenlet stabilitási feltételei triviálisak: $-1 < \lambda = -\alpha_0/\beta < 1$, azaz a stabilitás ekvivalens az $|\alpha_0| < |\alpha_1 + 1|$ feltétellel. A racionális várakozásokat képviselő másodrendű differenciaegyenlet stabilitási feltételei ismertek: $\alpha_0 + \alpha_1 + 1 > 0$, $\alpha_0 - \alpha_1 + 1 > 0$ és $\alpha_0 < 1$. Az *1. ábra* illusztrálja a helyzetet az (α_0, α_1) síkban. A függőlegesen és vízszintesen csíkozott terület a paramétersíkban rendre a racionális, illetve a naiv várakozások stabilitását jelöli. Közös részük az egyidejű stabilitást jelöli.

Rátérve a nyeregpont-instabilitás feltételére: $p_1(1) < 0 < p_1(-1)$ vagy $p_1(-1) < < 0 < p_1(1)$, azaz $|\alpha_1| > |\alpha_0 + 1|$. Ekkor λ_2-vel jelölve a stabil gyököt, a ${}_0x_1^d = \lambda_2 x_0^d$ választással a buborékot adó robbanó irány eltűnik. Valóban, az általános megoldás $x_t^d = \xi_1\lambda_1^t + \xi_2\lambda_2^t$, amely pontosan akkor korlátos (és stabil), ha $\xi_1 = 0$, $x_0^d = \xi_2$, azaz ${}_0x_1^d = x_1^d = \lambda_2 x_0^d$.

Mi történik azonban akkor, ha mindkét gyök instabil? Ekkor még a meglehetősen törékeny megoldás is lehetetlenné válik, és nem marad más kiút az instabilitásból, minthogy egyszerűen az állandósult állapotra szorítjuk a dinamikát. Ez a közgazdaságilag indokolatlan megkülönböztetés a kétfajta instabilitás között viszont aláássa a korlátozás hitelét.

1. ábra
Stabilitási feltételek



Egyelőre csak egyszerű elégséges feltételeket ismerünk a racionális várakozások instabilitására és a naiv várakozások stabilitására.

1. tétel. Adott d-re tegyük föl, hogy $p_d(\lambda)$-nak nincs egységgyöke.

a) Az állandósult állapot nyeregpont-instabil, ha

$$|\alpha_0| \geq \left|\sum_{j=d}^{n} \alpha_{m+j}\right|, \tag{7}$$

b) Az állandósult állapot stabil, ha

$$\sum_{i=0}^{m+d-1} |\alpha_i| \leq \left|\sum_{j=d}^{n} \alpha_{m+j}\right|. \tag{8}$$

Megjegyzések. 1. Az egységgyök kizárása általában jellemző az irodalomra és tipikusan teljesül.

2. A (7) feltétel azt jelenti, hogy a legtávolabbi múlt hatása abszolút értékben erősebb, mint az $n - d + 1$ legtávolabbi jövőé.

3. A (8) feltételt elég nehéz közgazdaságilag értelmezni. Ha az α_i-k előjele változik, akkor (8) aligha teljesül.

Bizonyítás. *a)* A vegyes várakozás nyeregpont-instabilitása majdnem triviális. Bevezetve a $\beta_d = \sum_{j=d}^{n} \alpha_{m+j}$ jelölést, p_d olyan $(m + n)$-fokú polinom, amelynek főegyütthatója β_d. Emlékezzünk a gyökök és együtthatók közti összefüggésre, amely szerint p_d gyökeinek szorzata nem más mint $(-1)^{m+n}\alpha_0/\beta_d$. Feltételünk szerint egyetlenegy gyök sem fekszik az egységkörvonalon, tehát legalább egy gyök az egységkörön kívül fekszik. Hasonlóan igazolható, hogy legalább egy gyök az egységkörön belül fekszik.

b) A stabilitási feltétel szintén nagyon egyszerű. Tegyük föl az ellenkezőjét, azaz létezik p_d-nek egy instabil gyöke, λ_1, amelyre $|\lambda_1| > 1$.

$$p_d(\lambda_1) = \sum_{i=0}^{m+d-1} \alpha_i \lambda_1^i + \beta_d \lambda_1^{m+d}, \qquad \text{azaz} \qquad -\beta_d \lambda_1^{m+d} = \sum_{i=0}^{m+d-1} \alpha_i \lambda_1^i.$$

Áttérve az abszolút értékre, elosztjuk mindkét oldalt $|\lambda_1|^{m+d}$-vel és alkalmazzuk a háromszög-egyenlőtlenséget:

$$|\beta_d| \leq \sum_{i=0}^{m+d-1} |\alpha_i| |\lambda_1|^{i-m-d}.$$

Mivel $|\lambda_1|^{i-m-d} < 1$, elhagyva őket, növeljük a jobb oldalt:

$$|\beta_d| < \sum_{i=0}^{m+d-1} |\alpha_i|,$$

ellentmondva (8)-nak.

Ha rendre $d = n$ és $d = 0$ értéket helyettesítjük be a (7) instabilitási és a (8) stabilitási feltételbe, akkor egyszerre jutunk el a racionális várakozás instabilitási és a naiv várakozások stabilitási feltételéhez.

2. tétel. *a) A racionális várakozás melletti dinamikában az állandósult állapot nyeregpont-instabil, ha*

$$|\alpha_0| \geq \alpha_{m+n} = 1. \tag{9}$$

b) A naiv várakozás melletti dinamikában az állandósult állapot stabil, ha

$$\sum_{i=0}^{m-1} |\alpha_i| \le \left| \sum_{j=0}^{n} \alpha_{m+j} \right| . \tag{10}$$

Megjegyzések. 1. A (9) feltevés azt jelenti, hogy abszolút értékben a legrégebbi múlt hatáa erősebb, mint a legtávolabbi jövőé.

2. A (10) feltevés értelmezéséhez tegyük föl, hogy minden múltbeli hatásnak azonos az előjele: *a)* $\alpha_i > 0$, $i = 0, \ldots, m-1$ vagy *b)* $\alpha_i < 0$, $i = 0, \ldots, m-1$. Bevezetve az

$$\alpha = \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i \qquad \text{és} \qquad \beta = \sum_{j=0}^{n} \alpha_{m+j},$$

jelöléseket, a (10) feltevés a következőre egyszerűsödik:

$$|\alpha| \le |\beta| . \tag{11}$$

Vegyük észre, hogy (11)-gyel már találkoztunk, szigorú egyenlőtlenséggel, az 1. példában (lásd még *Grandmont* [1998] 2. 2. tétel).

Figyelemre méltó, hogy számos szerző örömmel fogadja a racionális várakozásokra jellemző instabilitást.

Például *Laitner* [1981] és [1984] éppen a racionális várakozásoknál fellépő meghatározatlanságot használja fel az instabilitás kiküszöbölésére. Ha az instabil sajátértékek és a nem történelmi kezdeti feltételek száma azonos (kiegyensúlyozott nyeregpont-instabilitás, a numerikus vizsgálatok szerint a szóban forgó feltétel gyakran teljesül), akkor az állandósult állapot közelében minden történeti kezdeti feltételhez választhatunk egy olyan nem történeti kezdeti feltételt, hogy a keletkező pálya stabil legyen: *lokális meghatározottság*. Ugyanakkor ez a megoldás rendkívüli számítási pontosságot feltételez, amely nem várható egy közönséges szereplőtől (lásd még *Kehoe* [1991]). Viszont minél több független változó van, annál kétségesebb az eljárás numerikus stabilitása. Utalunk *Ralston* [1965], 10. 2. példájára: a kerekítési hibák előbb-utóbb letérítik a lineáris rendszert a stabil irányról. S hiába vannak ma már sokkal jobb számítógépek, mint Ralston könyve írásakor, a modellezett valódi döntések nyilvánvalóan nem hajszálpontosak. A legegyszerűbb út a nyeregpont-instabilitáshoz a múlt és a jövő szimmetriájának föltevésében rejlik:

$$m = n \qquad \text{és} \qquad \alpha_{2n-i} = \alpha_i, \qquad i = 0, \ldots n-1. \tag{12}$$

Könnyen eljutunk a szimmetriához, ha g eleve szimmetrikus, azaz a dinamika időben megfordítható (reverzibilis). (Emlékeztetünk arra, hogy reverzibilitás a mechanikára jellemző, de a hőtanra nem.)

3. tétel. *a) A racionális várakozás melletti dinamikában az állandósult állapot kiegyensúlyozott nyeregpont-instabil, de lokálisan meghatározott, ha teljesülnek a (11) szimmetriafeltételek.*

b) Szimmetria és nemnegativitás esetén a naiv várakozás melletti dinamikában az állandósult állapot stabil, ha vagy (i) $\alpha_n > 0$ *vagy (ii)* $\alpha_n < 0$ *és* $\alpha < -\alpha_n/2$.

Bizonyítás. *a)* A racionális várakozás kiegyensúlyozott nyeregpont-instabilitása majdnem triviális. A normalizálás értelmében polinomunk $2n$-fokú. (9) szerint $p_n(\lambda)$ úgynevezett *reciprok polinom*, azaz ha λ gyök, akkor $1/\lambda$ is gyök.

b) Most $\beta = \alpha_n + \alpha$, és (12) esetén (11) *(i)*-re vagy *(ii)*-re egyszerűsödik.

A racionális várakozások részleges kudarca elfogadhatóbbá teszi a naiv várakozásokat? Nem igaz az, hogy naiv várakozásoknál folyamatosan triviális hibát követnek el? A klasszikus egyváltozós pókhálómodellben valóban ez a helyzet, azonban vannak olyan dinamikus rendszerek, ahol semmilyen lineáris statisztikai próba nem fedez fel semmilyen hibát sem (*Hommes–Sorger* [1997]). Érdemes tehát a naiv várakozásokat is vizsgálni.

Együttélő nemzedékek modellje

A modell

Gale [1973] nyomán ebben a pontban az együttélő nemzedékek legegyszerűbb modelljét tanulmányozzuk. Minden időszakban az előző időszakban született egyéneknek egy utóda születik, s minden utód két időszakig él. Egy *zárt cseregazdaság*ot vizsgálunk. Nem foglalkozunk a termeléssel, eltekintünk a termelékenység növekedésétől, és adottnak vesszük a kereseteket. A t-edik időszakban „született” (munkába lépő) egyén jövedelme fiatal és öreg korában rendre w_0 és w_1 (időben állandó), fogyasztása rendre $c_{0,t}$ és $c_{1,t+1}$. A kereseteket normálva: $w_0 + w_1 = 1$. Vezessük be a *megtakarítások*at: $s_{i,t} = w_i - c_{i,t}$.

Először adottnak vesszük a kamattényezők és várt értékük sorozatát: $\{r_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ és $\{{}_t r_{t+1}\}_{t=-\infty}^{\infty}$, és így határozzuk meg a feltételes optimális döntéseket. Ezután már alkalmazhatjuk a várakozási feltevéseket is.

Blanchard–Fischer ([1989], 5. 4. alfejezete) nyomán a fogyasztás helyett közvetlenül a megtakarításokkal foglalkozunk. A t-edik időszakban született egyén *várt* költségvetési korlátját a tervezett nulla életpálya-megtakarítás adja:

$$s_{0,t}\,{}_t r_{t+1} + {}_t s_{1,t+1} = 0. \tag{13}$$

Gale [1973] egyszerűsítését követve, föltesszük, hogy a fiatalok megtakarítása a várható kamattényezőtől függ, és e függés időben állandó:

$$s_{0,t} = s({}_t r_{t+1}). \tag{14}$$

A *tényleges* költségvetési korlátban már a tényleges kamattényező és öreg kori megtakarítás szerepel:

$$s_{0,t} r_{t+1} + s_{1,t+1} = 0. \tag{13'}$$

(13) és (14) szerint az idősek megtakarítási függvénye is hasonló, mint a fiataloké: $s_{1,t+1} = -r_{t+1} s({}_t r_{t+1})$.

Összegezve:

$$s_{1,t} = -r_t s({}_{t-1} r_t). \tag{15}$$

Mivel a termékek romlandók, minden időszakban nulla a teljes megtakarítás:

$$s_{0,t} + s_{1,t} = 0. \tag{16}$$

Behelyettesítve (14)–(15) összefüggéspárt (16)-ba, adódik a megengedettségi feltétel:

$$S({}_{t-1} r_t, r_t, {}_t r_{t+1}) = s({}_t r_{t+1}) - r_t s({}_{t-1} r_t) = 0. \tag{17}$$

Nyilvánvaló, hogy (17) nem speciális esete (1)-nek, ezért a továbbiakban az előző pont eredményei csak hasonlatként szolgálhatnak.

Különleges szerepet játszanak a *stacionárius megtakarítási pályák*, ahol az egymást követő nemzedékek tagjainak megtakarítása pályája azonos, az $_F$ alsó index a *megengedett* jelző angol megfelelőjére (*feasible*) utal:

$$s_{0,t} = s_{0,F} \qquad \text{és} \qquad s_{1,t+1} = s_{1,F}.$$

Behelyettesítve (17)-be:

$$S(r_F, r_F, r_F) = (1 - r_F) s(r_F) = 0. \tag{18}$$

Ebből látható, hogy tipikusan két állandósult állapot létezik, melyeket *kiegyensúlyo-*

zott, illetve *aranyszabály*-állapotoknak nevezünk, és angol megfelelőjére (*balanced*, illetve *golden rule*) utalva a $_B$ és a $_G$ szimbólummal jelölünk:

$$s_{0,B} = 0 \qquad \text{és} \qquad s_{1,B} = 0, \qquad \text{illetve} \qquad r_G = 1.$$

A stabilitást a két várakozásra külön-külön vizsgáljuk.

Racionális várakozások

A teljesség kedvéért felírjuk a racionális várakozások képletét:

$$_t r_{t+1} = r_{t+1}. \tag{19}$$

Ekkor (17) a következő elsőrendű differenciaegyenletté alakul:

$$S_R(r_t, r_{t+1}) = s(r_{t+1}) - r_t s(r_t) = 0, \tag{20}$$

ahol r_{-1} adott.

Ismert, hogy (20) akkor (és lényegében csak akkor) stabil, ha r_{t+1} r_t szerinti deriváltja az r_F pontban abszolút értékben kisebb 1-nél. Az implicit függvény tétele és (20) szerint legalább egy r_{t+1} megoldás létezik bármely r_t-re az állandósult állapot környékén, ha $\partial S_R / \partial r_{t+1F} = s'(r_F) \neq 0$.

Sőt,

$$\frac{dr_{t+1}}{dr_t} = \frac{-\partial S_R / \partial r_t}{\partial S_R / \partial r_{t+1}} = \frac{s(r_F) + r_F s'(r_F)}{s'(r_F)}.$$

Bevezetve a

$$\phi_R = \frac{dr_{t+1}}{dr_t} \qquad \text{és} \qquad \upsilon_F = -\frac{s(r_F)}{s'(r_F)} \tag{21}$$

jelöléseket (ahol υ_F a fiatalkori megtakarítás kamattényező szerinti rugalmasságának az inverze), $\phi_R = r_F - \nu_F$.

A kiegyensúlyozott állapot esetén $\nu_B = 0$, azaz a stabilitás lényegében ekvivalens $r_B < 1$-gyel. Az aranyszabály-állapot esetében $r_G = 1$, tehát a stabilitás lényegében ekvivalens $-1 < 1 - \nu_G < 1$-gyel, azaz

$$0 < \nu_G < 2. \tag{22}$$

A második esetre vonatkozik Gale bizonyítatlan állítása: az aranyszabály-állapot akkor és csak akkor stabil, ha a kiegyensúlyozott állapot instabil: $r_B > 1$. Ez ekvivalens az $s(1) < 0$ feltétellel (*Gale* [1973] 2. tétel). Általánosan ez nem igaz, mert globálisan nemcsak egy megoldás van és mindkét állandósult állapot is lehet instabil (3. példa).

Naiv várakozások

Szükségünk lesz a naiv várakozások képletére:

$$_t r_{t+1} = r_t. \tag{23}$$

Ebben az esetben (17) a következő elsőrendű differenciaegyenletté alakul:

$$S_N(r_{t-1}, r_t) = s(r_t) - r_t s(r_{t-1}) = 0, \tag{24}$$

ahol r_{-1} adott. Megismételve az érvelést, megfelelő módosításokkal

$$\frac{dr_t}{dr_{t-1}} = \frac{-\partial S_N / \partial r_{t-1}}{\partial S_N / \partial r_t} = \frac{r_F s'(r_F)}{s'(r_F) - s(r_F)}.$$

(21) és (24) implikálja, hogy $\phi_N = r_F/(1 + v_F)$.

A kiegyensúlyozott állapot esetén $v_B = 0$, azaz a stabilitás lényegében ekvivalens $r_B < 1$-gyel. Az aranyszabály-állapot esetén $r_G = 1$, tehát a stabilitás lényegében ekvivalens $-1 < 1/(1 + v_G) < 1$-gyel, azaz

$$\text{vagy} \quad -\infty < v_G < -2 \quad \text{vagy} \quad 0 < v_G < \infty. \tag{25}$$

Összehasonlítás

A fenti eredményeket a következőképpen összegezhetjük:

4. tétel. *a) Egy OLG gazdaságban a kiegyensúlyozott állapot akkor és csak akkor stabil, ha kisebb mint 1, függetlenül a várakozás típusától.*

b) Egy OLG gazdaságban az aranyszabály-állapot akkor és csak akkor stabil, 1. ha a racionális várakozások esetén (22) áll, 2. ha naiv várakozások esetén (25) teljesül, 3. tehát a racionális várakozások stabilitásából következik a naiv várakozásoké.

Konzisztensek-e a fenti eredmények az optimalizálással? Ha csak az additív hasznosságfüggvényű reprezentatív fogyasztó megszorító esetét tekintjük, akkor v_G negatív értéke kizárható. Ha azonban a hasznosságfüggvény általánosabb vagy többféle szereplő is színre lép, akkor valószínűleg minden lehetséges (*Blanchard–Fischer* [1989] 248. o.).

Részletezve. A neoklasszikus közgazdaságtanban megszokott módon a megtakarítást és a fogyasztást egy jól viselkedő (konkáv, nem csökkenő és általában differenciálható) hasznosságfüggvény maximalizálásából vezetjük le.

Legyen a t-ben született fogyasztó teljes hasznosságfüggvénye $U(c_{0,t}, c_{1,t+1})$. A szokásos feltevések és adott ${}_tr_{t+1}$ esetén létezik egy belső optimum: $[c_{0,t}, c_{1,t+1}]$. Az U függvény c_0 és c_1 szerinti parciális deriváltjait jelölje rendre U_0 és U_1. Ekkor az optimalitási feltétel a következő: $U_0 - U_1\,{}_tr_{t+1} = 0$. Ekkor az optimális $s_{0,t}$ megtakarítás tényleg ${}_tr_{t+1}$-től függ és időben állandó. Időben additív hasznosságfüggvény, $U(c_{0,t}, c_{1,t+1}) = u(c_{0,t}) + \beta v(c_{1,t+1})$ esetén az optimumfeltétel egyszerűsödik: $u'(c_{0,t}) = {}_tr_{t+1}\beta v'(c_{1,t+1})$.

Végül két példán illusztráljuk, hogy a naiv várakozásoknak a racionális várakozásokénál tágabb stabilitási tartománya lehet látszólagos és valóságos.

2. példa (*Molnár–Simonovits* [1996]). A CRRA-hasznosságfüggvények esetén a két várakozás egyszerre stabil.

Részletesebben: legyen β a leszámítolási tényező, $1 - \sigma$ a relatív kockázatkerülési együttható. Ekkor

$$U(c_0, c_1) = \sigma^{-1}(c_0^\sigma + \beta c_1^\sigma).$$

Szükségünk lesz még az *időszakközti (intertemporális) helyettesítési rugalmasság* bevezetésére: $\mu = \sigma/(\sigma - 1)$, és a *korrigált leszámítolási tényező*re: $\Phi = \beta^{1-\mu}$.

Ekkor a fiatal feltételes fogyasztási és a megtakarítási függvény a következő:

$$c_0(r) = \frac{w_0 + w_1 r^{-1}}{1 + \Phi r^{-\mu}} \qquad \text{és} \qquad s(r) = \frac{w_0 \Phi r^{-\mu} - w_1 r^{-1}}{1 + \Phi r^{-\mu}}.$$

Deriválva $s(r)$-t, adódik

$$\upsilon_G = \frac{(w_1 - w_0\Phi)(1 + \Phi)}{w_1(1 + \Phi) - \Phi\mu}.$$

A releváns esetben ($r_B > 1$), $w_1 > w_0\Phi$. Egyszerű számolással igazolható (22) bármely β, σ és $w_1 > w_0\Phi$ paraméteregyüttesre. Ebben az esetben (25) nem általánosabb, mint (22).

3. példa. Általános kvadratikus hasznosságfüggvény (vö. *Gale* [1973], 3. példa). A racionális várakozások stabilitásából következik a naiv várakozásoké, de fordítva nem.

Legyen $U(c_0,c_1) = ac_0 - bc_0^2/2 + c_1 - c_1^2/2$, $w_0 = 0$, ahol a és b pozitív számok és $v(c_1) = 2c_1 - c_1^2$, (Gale-nél $a = 5$, $b = 4$). Kikötjük, hogy $0 \le c_0 \le b/a$, $0 \le c_1 \le 2$, $w_0 = 0$ és $w_1 = 1$. Ekkor

$$s(r) = -c(r) = -\frac{a}{b+r^2} \qquad \text{és} \qquad s'(r) = \frac{2ar}{(b+r^2)^2}.$$

Egyszerű számolással kapjuk, hogy $v_G = (b + 1)/2$, s ez pontosan akkor elégíti ki (22)-t, ha $0 < b < 3$.

Nyilvánvaló, hogy (25) tágabb, mint (22).

Irodalom

AUERBACH, A. J.–KOTLIKOFF, L. J. [1987]: Dynamic Fiscal Policy, Cambridge University Press, Cambridge.

BLANCHARD, O. J.–FISCHER, S. [1989]: Lectures on Macroeconomics. MIT Press, Cambridge MA.

BRAY, M. M. [1982]: Learning, Estimation and the Stability of Rational Expectations. Journal of Economic Theory, 26, 318–339. o.

BROCK, W. A.–HOMMES, C. H. [1997]: A Rational Route to Randomness. Econometrica, 65, 1059–1095. o.

CHAMPSOUR, P. ÉS SZERKESZTŐTÁRSAI (szerk.) [1990]: Essays in Honor of Edmund Malinvaud. MIT Press, Cambridge MA.

EZEKIEL, M. [1938]: The Cobweb Theorem. Quarterly Journal of Economics, 52, 255–280. o.

FUCHS, G. [1979]: Is Error Learning Behavior Stabilizing? Journal of Economic Theory, 20, 300–317. o.

GALE, D. [1973]: Pure Exchange Equilibrium of Dynamic Economic Models. Journal of Economic Theory, 6, 12–36. o.

GALE, D. [1974]: The Trade Imbalance Story. Journal of International Economics, 4, 119–137. o.

GRANDMONT, J.-M. [1985]: On Endogenous Business Cycles. Econometrica, 53, 995–1045. o.

GRANDMONT, J.-M. [1998]: Expectations Formation and Stability of the Large Socioeconomic Systems. Econometrica, 66, 741–781. o.

GRANDMONT, J.-M.–LAROQUE, G. [1990]: Stability, Expectations and Predetermined Variables, *Champsour és szerzőtársai* (szerk.) Vol. 1. 71–92. o.

HOMMES, C. H.–SORGER, G. [1997]: Consistent Expectations Equilibria. Macroeconomic Dynamics, 2, 287–321. o.

KEHOE, T. J.–LEVINE, D. K. [1985] Comparative Static and Perfect Foresight in Infinite Horizon Economics. Econometrica, 53, 433–453.o.

KORNAI JÁNOS [1971]: Anti-equilibrium. Akadémiai Könyvkiadó, Budapest.

LAITNER, J. P. [1981]: The Stability of Steady States in Perfect Foresight Models, Econometrica, 49, 319–333. o.

LOVELL, M. C. [1962]: Buffer Stocks, Sales Expectations and Stability: A Multi-sector Analysis of the Inventory Cycle. Econometrica, 30, 267–296. o.

MOLNÁR GYÖRGY–SIMONOVITS ANDRÁS [1996]: Várakozások, stabilitás és működőképesség az együttélő korosztályok realista modellcsaládjában. Közgazdasági Szemle, 10. sz. 863–890. o.

MUTH, J. [1961]: Rational Expectations and the Theory of Price Movements. Econometrica, 29, 315–335. o.

MUTH, J. [1962]: Perfect Foresight and Instability of Competition, kézirat.

SARGENT, T. J.–WALLACE, N. [1973]: The Stability of Models of Money and Growth with Perfect Foresight. Econometrica, 41, 1043–1048. o.

SIDRAUSKI, M. [1967]: Inflation and Economic Growth. Journal of Political Economy, 75, 796–810. o.

SIMONOVITS ANDRÁS [1979*a*]: Normák, várakozások és stabilitás egy lineáris modellben. Szigma, 12, 31–56. o.

SIMONOVITS ANDRÁS [1979*b*]: Mégegyszer a várakozásokról. Szigma, 12, 245–248. o.

SIMONOVITS ANDRÁS [1983]: Ütközőkészletek és naiv várakozások egy nem walrasi dinamikus makromodellben: stabilitás, ciklus és káosz. Szigma, 16, 15–30. o.

SIMONOVITS ANDRÁS [1994]: Együttélő nemzedékek modellje. Közgazdasági Szemle, 5. sz. 411–427. o.

SIMONOVITS ANDRÁS [1995]: Együttélő korosztályok modellje. Közgazdasági Szemle, 4. sz. 358–386. o.

TOBIN, J. [1965]: Money and Economic Growth, Econometrica, 33, 671–684. o. Magyarul: Pénz és gazdasági növekedés, Tobin, J.: Pénz és gazdasági növekedés. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 204–217. o.