Iskolakultúra 2014/10

A matematika és a fizika kapcsolata

A fizika tanításában nagy mértékben támaszkodunk a matematikai ismeretekre, melynek bemutatását rövid tudománytörténeti kontextusban tesszük meg a téma fontossága miatt.

Tudománytörténeti háttér

A matematika történetének tanulmányozása során megállapíthatjuk, hogy sok kiváló matematikus volt egyben fizikus is. Korábban a polihisztorok voltak jellemzőek a tudományok világára, vagyis nem kizárólag egy tudományban, illetőleg annak egy diszciplínájában jártas szakemberek voltak a tudósok, a természettudományok képviselői.

A fizika sok esetben a felismert matematikai módszerek alkalmazási területeként jelent meg. Azonban nem egy olyan esetet ismerünk, amikor a fizikai jelenség leírásához dolgoztak ki új matematikai módszert (*Sain*, 1978).

Galileo Galilei volt az első, aki következetesen alkalmazta az általa vizsgált természettörvények matematikai leírását, elsősorban kvantitatív eszközöket használva, melyet írásunk későbbi részében részletesebben is bemutatunk. Ókori elődje Arkhimédesz volt, akit a mechanika atyjának kell tekintenünk. Ő volt az, aki összekapcsolta először a fizikai kísérleteket és a matematikai összefüggések megfogalmazását. Könyvei azonban egy időre elvesztek, csak Galilei idejében kerültek elő, megtermékenyítve az újkori természettudományt.

René Descartes (1596–1650) szerepe is kiemelkedő a matematika és a fizika kapcsolatát illetően. Az igazságok kutatására legalkalmasabbnak a deduktív matematikai módszert tekinti. Jelentős eredménye az analitikus geometria létrehozása és fejlesztése. Christiaan Huygens (1629–1695) az ingaóra tökéletesítése közben egész sor síkgörbét tanulmányozott. Számos felfedezést tett az ívhossz- és területszámításban. Az arkhimédészi módszer következetes alkalmazásával a differenciál- és integrálszámítás jelentős előkészítője volt.

A differenciál- és integrálszámítás módszerének kifejlesztése Isaac Newton és vele párhuzamosan Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) érdeme, e matematikai eszközöknek döntő jelentősége volt a mechanika kialakulásában. Ezzel párhuzamosan alakult ki a differenciálegyenletek elmélete és a fizikát is szorosan érintő megoldása, az ezzel foglalkozók többnyire egyszerre voltak fizikusok és matematikusok. A közönséges differenciálegyenletek elméletének úttörői Jacob és Johann Bernoulli voltak. Jean Le Rond D'Alambert (1717–1783) tekinthető a parciális differenciálegyenletek egyik megalkotójának. Az 1742-ban megjelent, a húrok rezgéséről szóló könyvében ismerteti először a parciális differenciálegyenletek alapvető leírását. A hővezetés elméletével foglalkozó Jean Baptiste Joseph Fourier (1768–1830) a róla elnevezett sorok segítségével oldotta meg parciális differenciálegyenleteit. Joseph Louis Lagrange (1736–1813) az analízis módszereit alkalmazta a merev testek mechanikájára. Pierre Simon Laplace (1749–1827) fizikai munkáiban jelentős mértékben fejlesztette az analízist. Sok eredménye sorolható a matematikához és a fizikához egyaránt.

Karl Friedrich Gauss (1777−1855), akit a matematika fejedelmének is neveznek, szintén maradandót alkotott a fizika területén. Azon erők elméletével foglalkozott, amelyek fordítottan arányosak valamely távolság négyzetével. E kutatás eredményeként született meg a matematika új ága, a potenciálelmélet, amely a fizikában is gyümölcsözőnek bizonyult.

Nem csak a mechanika kiteljesedésében, de a modern fizika megszületésében is komoly szerepe volt a matematikának. Az általános relativitáselmélet jelentős mértékben épít a Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) geometriájával kapcsolatos matematikai ismeretekre, a kvantummechanika jelentős mértékben támaszkodik az általa használható függvények (pl. gömbfüggvények) leírására, de a példák végtelenségig sorolhatók.

A matematika és a fizika kapcsolata az oktatásban

A matematikát a fizika tanulása közben eszköztudásként használjuk, a fizika leíró nyelveként alkalmazzuk. E cikk írói szerint hibás az olyan eljárás, mikor az összefüggések egyszerűen csak felkerülnek a tanórákon a táblára –szinte magyarázat nélkül –, hogy aztán abba behelyettesítve számoljanak a középiskolások, mely a tanulók elmondása szerint sokszor megtörténik. Ugyanis ekkor a diákoknak fogalmuk sincs arról, hogy mit is számolnak valójában, még ha meg is kapják a helyes végeredményt. Ám ha részletesen megtárgyaljuk a matematikai formula formai jelentését és annak valóságos effektusként való megnyilvánulását (például a derivált valaminek a sebességét jelenti, a teljesítmény a munkavégzés „sebessége”), akkor ez segít a fizikai jelenségek értelmezésének megkonstruálásában, a természettudományos szemlélet fejlődésében, a jelenségek megértésében (*Nagy*, 2013). És az új ismeretek rögzülését is elősegíti a többféle nézőpont, miközben fejlesztjük a tanulók absztrakciós készségét.

Kísérletek értelmezésénél felírhatunk matematikai formulákat a fizikai mennyiségek megfigyelt összefüggéseire. Jelenleg a kapcsolat felismerése sem szokott sok esetben megvalósulni, egymástól függetlenül látják a diákok

– a számításos feladatok számszerű végeredményeit,
– a törvényeket megadó képleteket,
– és a valódi jelenségeket.

Pedig célszerűen a jelenséget szavakban, a fizika szókincsének felhasználásával, és matematikai alakkal is leírhatjuk. Fontos, hogy a diákok érezzék és értsék a kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést, a szoros kapcsolatot a leíró matematika és a jelenség között, de a különbséget is lássák a formális leírás és a valódi, megfogható jelenség között! Fontos azonban az, hogy a kísérletek végzése és a hozzá tartozó matematikai apparátus fejtegetése ne egymástól elszakadva történjen úgy, hogy csak a jelenség neve kösse össze a két dolgot. Minden egyes effektus egyértelműen leírható matematikai jelrendszerrel is, akár az egyes kifejezések a siket-néma jelbeszédben. Nagyon fontos a jelenség és a matematikai formula közti megfeleltetés kifejtése, a kapcsolat jelzése, hangsúlyozása, az összefüggések kiemelése, mert ezek megértése jelenti a természettudományos szemlélet meglétét.

A fizika és a természettudományok jelrendszere a matematika. Ugyanúgy írunk le jelenségeket matematikai képletekkel, ahogyan a zenében ritmikus hangsorokat kottával, a verstanban rövid és hosszú szótagok váltakozását például daktilusokkal és spondeusokkal, vagy önmagában bármely nyelvben a szótagokat betűkkel. A fizikában a hangok, a mondanivaló szerepét a jelenség, a fizikai törvények, míg az írott alak szerepét a képlet tölti be.

Arányosságokat írunk fel, egyenleteket oldunk meg, függvényeket, grafikonokat rajzolunk. A két tudomány tanulmányozásának összehangolása előfeltétele az eredményes fizikatanulásnak. Az egyértelmű, hogyha a diákok nem ismerik a leíró nyelvet, akkor nem értik az ezen a nyelven történő leírást sem, akkor nem tudnak önálló jelenségleírásokat konstruálni. Mivel már a jelenség leírása sem történhet így meg, ezért a mélységes megértés esélytelen.

A mai fizikatanítás során gyakran válik egyoldalúvá a fizikai jelenségek matematikai leírása, és elsikkad a kvalitatív elemzés, a fizikai lényeg megértése. Úgy véljük, hogy a fizikatanítás során növelni kell a kvalitatív elemzés szerepét. Ez azonban nem vezethet – ellentétes hibaként ‒ a matematikai leírás elhanyagolásához. A gyerekkel már a fizikatanulás elejétől meg kell értetni, hogy a teljesebb fizikai leírás igényli a matematikai eszközök használatát. Korábban a fizika tankönyvekben a matematikai eszközök használata középiskolai szinten is nagyobb szerepet kapott (*Radnóti*, 1995). Több olyan fogalmi váltás van a fizika tanulása során, amelyet lényegesen segíthet a matematikai formalizálás. Különösen fontosak a különböző becslések, egyes fizikai mennyiségek nagyságrendjeinek megállapítása. De még egyszer hangsúlyozzuk, hogy a fizikai jelenségek megértése szempontjából a kvalitatív elemzésnek van döntő jelentősége.

A matematikai leírás bevezetésének fokozatosan kell megtörténnie. Hiába tanulta már matematika órán a gyerek a számunkra szükséges ismeretet (ha tanulta), a transzfer nehéz, az új helyzetben való alkalmazás nem könnyű. Sokszor más betűket is használunk, mint a matematika órán. Továbbá a fizikai mennyiségeknek többnyire mértékegysége is van, amivel szintén matematikai műveleteket végzünk.

Az egyenes, illetve a fordított arányosság fogalomkörét felhasználó fizikai feladatokat először célszerű következtetéssel megoldani, mielőtt a képletszerű formát használnánk. Napjainkban már sok fizika tankönyv, példatár mutatja be mindkét módszerrel a megoldást.

Nem tartjuk követendő példának a szintén elterjedt, úgynevezett segítő háromszögek használatát, mivel ebben az esetben csak mechanikus képletbe való behelyettesítést látnak a gyerekek a fizikai jellegű problémák megoldása során. És nem tartjuk helyesnek az olyan feladatok megoldását sem, amikor pl. egy táblázat hiányzó adatait kell mindössze kiszámítani egy algoritmus segítségével. Ez csak a képletek memorizálásához vezet, de nem lesz mögötte fizikai tartalom. Fontos, hogy a gyerekek igazából ne képleteket, hanem összefüggéseket, függvényszerű kapcsolatokat lássanak a fizikai törvények matematikai megfogalmazásai mögött (*Radnóti*, 2002).

A továbbiakban vázlatosan bemutatjuk a NAT 2012-ben és a hozzá tartozó kerettantervekben megtalálható kapcsolatokat a matematika és a fizika tantárgyak esetében.

- Különböző típusú egyenletek megoldása, első és másodfokú egyenletek, egyenletrendszerek (az egyenleteknél fontos, hogy a két oldal egyenlő, aminek fizikai és kémiai vonatkozásai a megmaradási tételek).
- Mennyiségek kiszámítása képlet alapján, képletek átrendezése.

Elsőfokú függvények, lineáris függvények:

- Lineáris kapcsolatok felfedezése a hétköznapokban: egyenesen és fordítottan arányos mennyiségek.
- Például, mitől függ a nyomás? $P=F/A$
  - A nyomóerővel egyenesen, míg a nyomott felülettel fordítottan arányos.
  - Példák a felület csökkentésére – kés
  - Növelésére ‒ síelő

Alapvető a fizikában a vektorokkal történő leírás. Sok esetben a skalár fogalmakat is vektorokból alkotja meg, mint például potenciál, fluxus.

- Pitagorasz tétel és megfordításának bizonyítása és alkalmazása.
- Fizika: lejtőn mozgó testre ható erők kiszámítása; elektrosztatikában 3 pontszerű töltés megfelelő távolságviszonyainak megadása, mint az egyensúly feltétele;

sztatikában adott tömegű test hatására ismert hosszúságú fonalakban ébredő erő kiszámítása adott távolságú azonos magasságú rögzítési pontok esetében.

- Műveletek vektorokkal:
  - összeadás (paralelogramma-módszer, láncmódszer);
  - kivonás;
  - számmal való szorzás.
- Vektor felbontása összetevőkre.
- A vektorműveletek tulajdonságai.
- Fizika: hasonló háromszögek alkalmazása – lejtőmozgás, geometriai optika, sztatika, elektrosztatika.
- Két vektor skaláris szorzata. A skaláris szorzat tulajdonságai.
- Merőleges vektorok skaláris szorzata.
- Fizika: munka, elektromosságtan.

Számolás 10 hatványaival, 2 hatványaival.

- Hatványokkal való számolás, számok normál alakja, és az ezekkel való számolás, nagyon kicsi és nagyon nagy mennyiségeknél.
- Hatványozás.
- Törtekkel való számolás, mértékegységekkel való műveletek.
- Fizika: mértékegységek normál alakban, bármilyen számításos probléma megoldása.

Trigonometrikus, egyenletek és egyenlőtlenségek.

- Fizika: rezgőmozgás, adott kitéréshez, sebességhez, gyorsuláshoz tartozó időpillanatok meghatározása.

Exponenciális függvény:

- Az exponenciális függvény ábrázolása, vizsgálata.
- Fizika: radioaktivitás számítási feladatai, statisztikus fizika alapgondolatai.

A következő témákat viszont szeretnénk, ha érintené a matematika oktatása:

Analízis alapjai

- Függvények elemzése differenciál- és integrálszámítással.
- Fizika: a fizika minden területén differenciálegyenletekkel történik a jelenségek leírása, melyhez szükséges a differenciál- és integrálszámítás.

Kombinatorika és valószínűségszámítás alapjai a természettudományoknak megfelelő szemléletben is:

- Kombinációk, permutációk, valószínűség, valószínűségi eloszlások (normál elolszás)
- Fizika: statisztikus fizika (részecskék ütközése), mag -és részecskefizika (atommagok bomlása)

Kiemelten fontos a függvények szerepe a fizikai leírásmód során és a jelenségek leírásában, a problémák, feladatok megoldásában, mint például: függvények ábrázolása, függvények menetének, meredekségének, szélsőértékeinek (minimum, maximum) vizsgálata, függvénygörbe alatti terület kiszámítása.

Annak tárgyalása, hogy milyen tartományban van fizikai értelme egy függvénynek (pl. lehet-e negatív), vagy az egyenes arányosság csak bizonyos feltételek mellett érvényesül: például erő – megnyúlás (elszakad a kötél), hőközlés – melegedés (megolvad az anyag) feszültség – áramerősség (az ellenállás függ a hőmérséklettől). A matematikai eszközök alkalmazásánál meg kell vizsgálni a fizikai tartalmat is. A matematika általánosabb, elvontabb, sterilebb, a fizikai (és kémiai) alkalmazás konkrétabb és csak bizonyos határok közt érvényes.

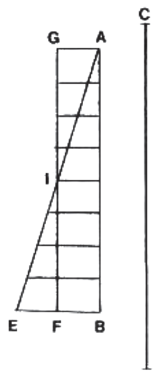
A függvényeknél fontos hangsúlyozni, hogy a reális folyamatokat leíró függvényeknél nem lehet szakadás, vagy végtelenül gyors változás (például megáll az autó).

A tanulók a matematikai módszereket sokszor automatikusan, gondolkodás nélkül alkalmazzák a fizikai problémák megoldására, nem gondolnak bele, hogy bár a megoldás matematikailag helyes, de nincs fizikai értelme, vagy gyakorlatilag lehetetlen. Például másodfokú egyenlet megoldásánál nem biztos, hogy mindkét eredménynek van reális fizikai tartalma.

Galilei szerepe a fizika és a matematika kapcsolatának megteremtésében

A matematika és a fizikai jelenségek összekapcsolása Galilei nevéhez fűződik, aki elsőként használt függvénykapcsolatot két változó között, mely konkrétan az egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgás jelenségéhez kapcsolódik. A pillanatnyi sebességet ábrázolta az idő függvényében és próbálta adott időtartam alatt a megtett utat meghatározni, mely ténylegesen integrálásnak tekinthető (*Galilei*, 1986; *Vekerdi* 1997). Az általa bevezetett módszer vált a későbbiekben a fizika, majd gyakorlatilag az összes természettudomány alapjává. Gondolatmenete a következő volt, melyet érdemes nyomon követni.

Nézzük Galilei szövegét! „A nyugalomból induló, egyenletesen gyorsuló test tetszőleges utat ugyanannyi idő alatt tesz meg, mintha olyan egyenletes sebességgel mozogna ugyanezen úton, melynek értéke fele az említett egyenletesen gyorsuló mozgásban szerzett végső és legnagyobb sebességértéknek.” És itt következik az a grafikus ábrázolás, melyet Galilei alkotott meg a jelenség ábrázolásához, amely valójában nem más, mint egy sebesség – idő függvény.



1. ábra. Galilei sebesség – idő függvénye (forrás: www.kfki.hu)

A test a CD távolságot teszi meg nyugalomból indulva, állandó gyorsulással. Az AB szakasz jelöli az ehhez szükséges időt (ez az időtengely). Az EB szakasz jelzi a végsebesség nagyságát. Közben pedig a vízszintes vonalakkal jelölte az egyre növekvő sebességértékeket (1. ábra).

Az ABE háromszög területe jelzi az út nagyságát. Ezt úgy látta be, hogy vette a végsebesség felét, melyet az I-ben végződő vízszintes egyenes jelöl, és belátta, hogy az ABGF téglalap területe megegyezik az előbbi ABE háromszög területével. (Mintegy kiintegrálta a „sebességgörbe alatti területet”, ahogy ma mondanánk, csak mi fordítva vesszük fel a tengelyeket.) Vagyis az egyenletesen változó mozgást megpróbálta úgy leírni, mintha egyenes vonalú egyenletes mozgást végezne a test a végsebesség felével. És ezt a módszert alkalmazta több esetben is, hiszen csak így tudta elvégezni az integrálást.

Nézzük meg, miként bizonyította Galilei, hogy a megtett távolság az idő négyzetével arányos, és hogy egy ilyen mozgásnál az egységnyi idő alatt megtett utak úgy aránylanak egymáshoz, mint az eggyel kezdődő páratlan számok. A bizonyítás során kétszer is alkalmazta az arányossági tételt, mely kissé bonyolult:

1. Hivatkozott arra a tételre, amelyet az egyenes vonalú egyenletes mozgással kapcsolatban írt, mely a következő: „Adott két egyenletesen, de különböző sebességgel mozgó test. Különböző időintervallumok alatt megtett útjaik aránya a sebességek arányának és az időintervallumok arányának szorzata.”
2. Majd hozzáteszi a következőt: „Ebben az esetben azonban a sebességek aránya megegyezik az időintervallumok arányával. […] Világos tehát, hogy a megtett utak aránya a mozgáshoz szükséges idők arányának négyzete.”

Mai jelöléseinket használva a következőképp írhatjuk fel a fentieket:

1. Az utak arányának kiszámítása a közepes sebességek használatával, mely a legnagyobb sebesség fele:

$$s_1 = \frac{v_1.t_1}{2}$$

$$s_2 = \frac{v_2.t_2}{2}$$

Majd a kettő aránya:

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{v_1.t_1}{v_2.t_2}$$

2. Most figyelembe vesszük a sebességek időszerinti egyenletes változását:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{t_1}{t_2}$$

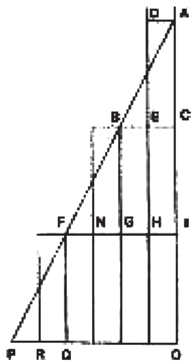
és ezt behelyettesítjük az utak arányát leíró összefüggésbe:

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{t_1^2}{t_2^2}$$

és megkapjuk a négyzetes összefüggést mai jelöléseink alkalmazásával.

Galilei további újítása az volt, hogy míg korábban arányokat csak hosszúságokra fogalmaztak meg, addig ő hosszúságok és idők, illetve sebesség és idő arányokat is felhasznált. Valójában ezért volt arra szüksége, hogy valamilyen grafikus ábrázolási lehetőséget keressen, vagyis az időt is, és a sebességet is, mint hosszúságot ábrázolta.

A négyzetes összefüggés magyarázataként Galilei adott egy egyszerűbb bizonyítási lehetőséget, melyben nem szerepelnek arányok. A 2. ábra szintén egy sebesség – idő függvény, ahol a „görbe alatti terület" a megtett út.



2. ábra. A görbe alatti terület (forrás:www.kfki.hu)

Az AC, CI és IO időegységek egyformák. Az első időegység (AC) alatt megtett út az ACB terület, mely megegyezik az ACDE területtel, mint azt az előbb láttuk. A második időegység alatt (CI) megtett út kiszámításához szintén az időintervallum alatti közepes sebességet veszi, mely láthatóan háromszorosa az elsőnek. Az időintervallum kezdetén meglévő sebességgel két egységnyi utat tenne meg, de ehhez hozzáadódik még egy egység a gyorsulás miatt.

A harmadik (IO) időintervallum alatt ötszöröse a megtett út az elsőnek, mely az előzőhöz hasonlóan látható. És ezek valóban az egymás után következő páratlan számok.

Továbbá az is leolvasható, hogy egy időegység alatt egy, a két időegység alatt már négy és a három időegység alatt már kilencszeres a megtett út az első egységhez képest. Ami a négyzetes törvény, és a sor az előbbiekhez hasonlóan folytatható.

Az oktatás során a diákok tanulmányozhatják a fent közölt eredeti ábrákat, amely véleményünk szerint segíthet az egyáltalán nem egyszerű és könnyű kinematikai alapfogalmak elsajátításában és megértésében.

Mai jelöléseinket és ábrázolásmódunkat használva Galilei gondolatmenete a következő:

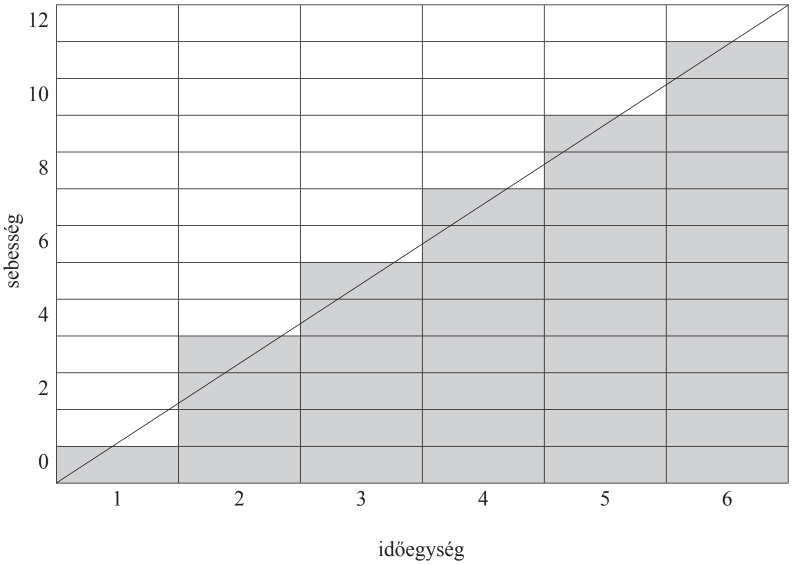
$$v = a.t$$

mely nem más, mint egy, az origóból induló egyenes egyenlete, mivel nulla a kezdősebesség. A t idő alatt megtett út kiszámításához ténylegesen egy integrálást kell elvégezni, amikor a következőt kapjuk:

$$s = a \cdot t^2/2,$$

ez egy négyzetes függvény, egy origóból induló félparabola egyenlete, ha az origót választjuk a mozgás kiindulópontjának.

Galilei ábráját át lehet rajzolni mai ábrázolásmódunknak megfelelően (3. ábra), az egyes időegységek alatt megtett utakat is téglalapokkal jelölve.



3. ábra. Galilei ábrájának mai változata

A szabadesés esetében, ha 1 s-os időegységet választunk, akkor egy téglalap területe éppen $s = g{\cdot}t^2 /2 = 5$ m. Másodpercenként 10 m-rel több utat tesz meg a test az előző másodperchez képest ideális környezetben (vákuumban és homogén gravitációs mezőben). Ez egyben a függvény meredeksége, ami természetesen megegyezik a gyorsulás mérőszámával, melyet 10 m/s^2-tel közelítettünk.

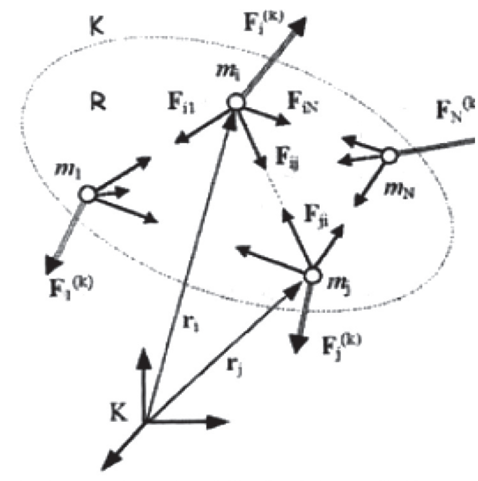
Egy adott feladat megoldásakor valójában a függvények − *v(t), s(t), a(t), F(s)* stb. – egy-egy pontjának koordinátáit számítjuk ki.

A fizika történetében Galilei volt az, aki első ízben beszélt a mellékes hatások elhanyagolásának szükségességéről, elképzelte, hogy milyen is lehet az úgynevezett „ideális” eset. Ő volt az, aki ezzel bevezette modellalkotást a természettudományos jelenségek leírásához, amely kiemeli a lényeges elemeket és a többit elhanyagolja, egyszerűsít, és ezzel a jelenséget hozzáférhetővé teszi a matematikai tárgyalás számára, és ez döntő jelentőségű volt a későbbi fejlődés számára. Napjainkban már természetes módon alkalmazzuk ezt a módszert. A fizika sok modelljét használjuk a feladatmegoldások során is, mint súrlódásmentes mozgás, ideális gáz, merev test, pontszerű test, nyújthatatlan fonál, a közegellenállás elhanyagolása stb. amint az az első fejezetben leírtuk.

Galilei vizsgálta a különböző sűrűségű testek különféle közegekben végzett mozgásait, majd ezekből általánosítással, szinte szabályos határátmenettel eljutott ahhoz az alapvető tételhez, hogy a vákuumban minden testnek, sűrűségétől és alakjától függetlenül egyforma gyorsulással kell esnie. A következőt írja: „…ha a közeg ellenállását teljesen megszüntetnénk, minden test azonos sebességgel zuhanna.”

Egyenletrendszerek megoldása a fizikában

A fizikában gyakran előfordulnak egyenletrendszerek. Például ilyen mikor pontrendszerek esetében (4. ábra) felírjuk az egyes pontszerű testekre vonatkozó mozgásegyenleteket.



4. ábra. Pontrendszer elemeire ható erők (a kép forrása: Tasnádi, Skrapits és Bérces, 2004)

A mozgásegyenletek:

1. $\underline{\boldsymbol{F}}_1^{(k)} + \Sigma_j \underline{\boldsymbol{F}}_{1j} = m_1 \underline{\boldsymbol{a}}_1$
2. $\underline{\boldsymbol{F}}_2^{(k)} + \Sigma_j \underline{\boldsymbol{F}}_{2j} = m_2 \underline{\boldsymbol{a}}_2$

$\vdots$

i. $\underline{\boldsymbol{F}}_i^{(k)} + \Sigma_j \underline{\boldsymbol{F}}_{ij} = m_i \underline{\boldsymbol{a}}_i$

$\vdots$

N. $\underline{\boldsymbol{F}}_N^{(k)} + \Sigma_j \underline{\boldsymbol{F}}_{Nj} = m_N \underline{\boldsymbol{a}}_N$

Ez egy N db egyenletből álló vektoros egyenletrendszer. A matematikában az egyenletrendszerek megoldására többféle módszer is van.

Kétismeretlenes egyenletrendszer lenne, ha csak az 1. és 2. egyenlet szerepelne, ez 2 pontszerű test esetén volna. Ekkor alkalmazható a behelyettesítéses módszer, az összehasonlító módszer, az egyenlő együtthatók módszere vagy a grafikus módszer az egyenletrendszer megoldásakor (továbbá mivel lineáris az egyenletrendszer, a Cramer-szabály is használható, de ahhoz ismerni kell a determináns fogalmát is).

Tehát az ilyen jellegű fizikai problémák megoldása igényli az egyenletrendszerek megoldási módszereinek ismeretét. De egyben jó gyakorlási teret is jelent ennek a témának.

Általánosságban egyenletrendszerről van szó, ha létezik minimum 2 olyan egyenlet, melyek külön-külön kapott megoldáshalmazának metszete az előbbi egyenletek mindegyikének megoldása lesz (tehát a teljes rendszerre megoldást jelent). Jelölés szerint az egyes egyenletek számozva vagy kapcsos zárójellel ellátva történő egymás alá írása mutatja, hogy egyenletrendszerről beszélünk.

A legtöbbször nemcsak 2 egyenletből álló egyenletrendszer megoldása jelenti a fizikai problémák megoldását, hanem többismeretlenesé.

Az egyenletrendszereket többféleképp csoportosíthatjuk: jellegük, fokuk továbbá az ismeretlenek és az egyenletek relatív száma szerint is.

– A fizikában legtöbbször differenciálegyenleteket oldunk meg, de gimnáziumi tanulmányok során ezek még sokszor algebrai egyenletek alakjában szerepelnek. Statisztikus fizikában kapnak helyet a transzcendens egyenletek. Míg a hibrid (vegyes) paraméteres egyenletek megoldására főleg elektronikában kerül sor.

– A megoldandó egyenletek foka eltérő. Leggyakrabban első- vagy másodfokú (inhomogén) differenciálegyenleteket oldunk meg.
– Akkor tudunk megoldani egy fizikai kérdést, ha elegendő egyenlet van adott ismeretlenhez. És a fizika feladatoknak legtöbbször egzakt, egyértelmű megoldása van.

Attól függően, hogy milyen típusú egyenletrendszerrel (vagy egyenlettel) dolgozunk, eltérő a megoldás lehetséges algoritmusa. Előfordul, hogy több eljárás is alkalmazható, ekkor általában valamelyik lényegesen egyszerűbb, gyorsabb, vagy kisebb hibalehetőségű a többinél. Ha lineáris az egyenletrendszerünk, akkor a tudományos életben főként Gauss-eliminációval dolgozunk, mert gyors eljárás.

Az elimináció szó kiküszöbölést jelent. A megoldási folyamatban lineáris transzformációk sorozatát végezzük el az egyenletrendszer kibővített mátrixával, és így az egyenletrendszert háromszög- vagy diagonális mátrixszal reprezentálható alakra vezetjük vissza.

Nem minden lépés megengedett. Az általunk végzett átalakítás akkor és csak akkor lineáris, ha ennek során
– 2 egyenletet felcserélünk vagy
– valamelyik egyenlet(ek)et tetszőleges skalárral szorozzuk vagy
– az egyik egyenlethez valamelyik másik skalárszorosát (lehet negatív számszoros is) adjuk.

Harmonikus rezgőmozgás matematikailag

A matematikai ismeretek közül a deriválás is nagyon fontos része a fizika tananyagnak. Mivel a legtöbb diák nem tanul differenciál- és integrálszámítást, a fizika órákon különböző módszerekkel kényszerülünk megkerülni ezt a feldolgozási módot. Pedig ez az egzakt tudományos megközelítése a témakörnek, és sokkal egyszerűbb is lenne a tárgyalás ennek használatával.

Az idő szerinti derivált a fizikában mindig valaminek a „sebességét" mutatja meg.

Kinematikában egyszerűen maga a sebesség az elmozdulás-függvény idő szerinti első deriváltja, míg idő szerinti második deriváltja a gyorsulás.

Harmonikus rezgőmozgás esetében is van sebessége és gyorsulása a rugó végén rezgő pontszerű testnek. Ekkor azonban nem azt mondjuk, hogy a test valamennyi utat tesz meg adott idő alatt, hanem azt, hogy pontosan mérhető kitérése van adott időpillanatban. Tehát út-idő függvény helyett kitérés-idő függvénnyel dolgozunk. Itt a rezgő test sebessége a pillanatnyi kitérés idő szerinti első deriváltja lesz. Míg gyorsulása a kitérés idő szerinti második deriváltja.

A kitérés-idő függvény trigonometrikus, egy szinuszfüggvény. A trigonometrikus függvények deriváltja ismert, így a differenciálszámítás felhasználásával nagyon egyszerű lehetne a kitérés-idő függvény grafikonjának iránytangensét, azaz a sebességet megadni. A kapott eredményt még egyszer deriválva a sebesség-idő függvény meredeksége (a mechanikában korábban tanultakkal konzekvensen) a test gyorsulását jelenti.

Matematikai formulákkal:
– a *t* időpillanatbeli pillanatnyi kitérést megadó kitérés-idő függvény:

$$\underline{\boldsymbol{y(t)}} = \underline{\boldsymbol{A}}\cdot sin(\omega\cdot t + \varphi_0)\ ,$$

ahol *A* az amplitúdó (maximális kitérés), ω a körfrekvencia, φ_0 pedig a kezdőfázis
– a *t* időpillanatbeli pillanatnyi sebességet jelentő sebesség-idő függvény (felhasználva, hogy $(\sin x)' = d(\sin x)/dx = \cos x$, és nem elfelejtve a belső függvény deriváltját):

$$\underline{\boldsymbol{v(t)}} = \underline{\boldsymbol{A}}\cdot\omega\cdot cos(\omega\cdot t + \varphi_0)$$

– a gyorsulás-idő függvény (felhasználva, hogy *(cosx)'* = *d(cosx)/dx* = -sin*x*, és nem elfelejtve a belső függvény deriváltját):

a(t) *= -* ***A***·□□·*sin(*□□*t +* □*0) = -* □□□· *y(t)*

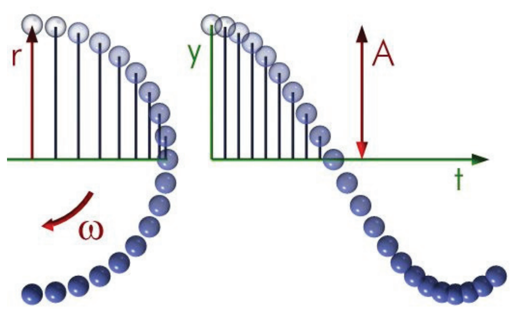
A rezgőmozgást végző test kitérése, sebessége és gyorsulása vektormennyiség.
Sokszor fordulnak elő olyan fizika feladatok, melyekben a rezgőmozgás kitérésével, sebességével, gyorsulásával számolnak a tanulók. Sajnálatos módon azonban ekkor a matematikai apparátus hiányában nem az előbb leírt logikus gondolatmenet szerint számolnak, hanem helyette képletbehelyettesítést alkalmaznak a korábban betanult összefüggésekbe. Ettől a témakör tanulása céltalanná válik, mert a természettudományos szemlélet nem fejlődik a diákokban. Ez a fajta magolásos tanulási módszer sajnos csak leszoktatja a gyerekeket a gondolkodásról. Lehetséges, hogy egyszerűbb betanultatni az összefüggéseket a deriválás legalapvetőbb tulajdonságainak ismertetése helyett, de a természettudományos szemlélet szempontjából semmiképp sem hasznosabb.

A differenciálszámítás hiányát kismértékben orvosolja, hogy rendkívül sok analógiával, szemléletes képpel segíthetjük a fizika tanulási folyamatot. Ilyen például a rezgőmozgás és körmozgás kapcsolatának tárgyalása.

Harmonikus rezgőmozgás és körmozgás kapcsolata (merőleges vetület)

Két egymás melletti pontszerű test mozgását vizsgálva, melyek egyike harmonikus rezgőmozgást, a másik pedig körmozgást végez, azt figyelhetjük meg, hogy függőleges komponenst tekintve egyszerre mozog a két test, ha megegyezik a kétféle mozgás kezdőfázisa, periódusideje és azonos a rezgőmozgás amplitúdója a körmozgás sugarával. Ezt úgy szoktuk mondani, hogy a körmozgás merőleges vetülete harmonikus rezgőmozgás. A vetület megnevezés onnan ered, hogy megtehetjük azt, hogy a körmozgás síkjából, oldalról megvilágítjuk a két egymás mellé helyezett testet, és ernyőn figyeljük azok vetített árnyékát a mozgási folyamat során. Ekkor a két pontszerű test árnyéka egybeesik, tehát azt tapasztaljuk, hogy merőleges vetületük megegyezik.[1]

Minden harmonikus rezgőmozgáshoz létezik egyenletes körmozgás, úgynevezett referencia-körmozgás, hogy a körmozgás merőleges vetülete éppen a vizsgált rezgőmozgást eredményezi.



5. ábra. A körmozgás és a rezgőmozgás kapcsolata[2]

Ha az egyenletes körmozgást végző test mozgásának síkjából tekintjük a jelenséget, *akkor* egy olyan rezgőmozgást figyelhetünk meg, melynél a kitérés egy időben szinuszos függvény (5. ábra). A merőleges vetületek megegyezéséből adódik, hogy ez a kitérés a körmozgást végző test helyzetének függőleges irányú komponensével egyenlő. Matematikailag leírva:

$\underline{\boldsymbol{y(t)}} = \underline{\mathbf{r}} \cdot \sin$□□$= \underline{\boldsymbol{A}} \cdot \sin$□□□ ahol *r* a körmozgás pályájának sugara, *A* pedig a rezgőmozgás amplitúdója, míg □ a fázisa.

A rezgőmozgást végző test pillanatnyi sebessége is trigonometrikus függvény szerint alakul, értéke az egyenletes körmozgást végző test kerületi sebességének függőleges irányú komponensével egyenlő. Matematikai formulával:

$\underline{\boldsymbol{v(t)}} = \underline{\mathbf{v}}_{\,kerületi} \cdot \cos$□ $= \underline{\mathbf{r}} \cdot \omega \cdot \cos$□ .

A rezgőmozgás gyorsulása is megadható a korábbiakhoz hasonlóan, ennek nagysága a körmozgást végző test centripetális gyorsulásának függőleges irányú komponense lesz:

$|\underline{\mathbf{a(t)}}| = |\underline{\mathbf{a}}_{\text{ centripetális}}| \cdot \sin$□ $= |\underline{\mathbf{r}}| \cdot \omega^2 \cdot \sin$□ $= |\underline{\boldsymbol{A}}| \cdot \omega^2 \cdot \sin$□ . A gyorsulásvektor pedig a kitérés-vektornak negatív számszorosa, mivel a gyorsulásról ismert, hogy egyenesen arányos a kitéréssel, de vele ellentétes irányú. A negatív konstans szorzó éppen $|\underline{\boldsymbol{A}}| \cdot \omega^2$:

$\underline{\boldsymbol{a(t)}} = - \underline{\boldsymbol{y(t)}} \cdot |\underline{\boldsymbol{A}}| \cdot \omega^2$.

Tehát így is megkaptuk a korábban deriválással megadott mennyiségeket, de láthatólag sokkal bonyolultabban jutottunk el ide, és ennél a módszernél nem olyan egyértelműen és triviálisan következnek egymásból a lépések.

Vektor összetevőire bontása a fizikában

A fizika feladatokban megoldásakor és az elméleti ismeretek elsajátításakor is nagyon sok esetben van jelentősége a vektorok komponensekre történő felbontásának. Ezt az előbbi gondolatmenetben felhasznált elemek is alátámasztják.

Komponenseken olyan tagokat értünk, melyek vektorok, és összegük az eredeti felbontani kívánt vektort eredményezi.

Komponensekre bontáskor egy vektornak 2 vagy 3 megadott irányú vektorral párhuzamos összetevőjének hosszát kell megadni. Ezt vetítéssel a legcélszerűbb elvégezni.

Egy tetszőleges koordináta rendszerben létezik egy olyan jobbsodrású ortonormált bázis (azaz 3 olyan vektor, amik a jobbkéz-szabály szerint állnak, egymásra páronként merőlegesek és egységnyi hosszúságúak), mely elemeinek lineárkombinációjával ezen tér összes vektora kifejezhető. Ekkor a 3 előbbi vektort bázisvektoroknak nevezzük. 2 dimenzió esetében (x-y síknál) csak 2 ilyen bázisvektor van: az x-tengellyel és az y-tengellyel párhuzamos egységvektor; ezek pedig nem alkothatnak jobbsodrású rendszert (ahhoz 3 vektor kellene), csak merőlegesek egymásra.

A tér (vagy sík) vektorait úgy bontjuk komponenseire, hogy a megadott bázisvektorokra vetítjük azokat (azaz megadjuk a megfelelő bázisvektor irányába eső nagyságát). A vetítés művelete ekvivalens azzal, hogy a vetítendő vektort skalárisan szorozzuk a bázisvektorral, mellyel párhuzamos komponenst megkapni kívánjuk.

Skalárszorzat: Az $\underline{u}=(u_1,u_2,u_3)$ és $\underline{v}=(v_1,v_2,v_3)$ tetszőleges (sor)vektorok skalárszorzatának nevezzük az $\underline{u} \cdot \underline{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$ skalármennyiséget. Geometriai jelentése: egymásra vett vetület hossza. A skalárszorzat fontos tulajdonsága, hogy a szorzótényezők sorrendje lényegtelen: $\underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{v} \cdot \underline{u}$.

A skalárszorzat definíciójának másik, ismertebb alakja a két vektor által bezárt szög koszinuszát, és a vektorok hosszát (abszolút értékét) tartalmazza a reprezentációs alak helyett: Az egymással φ□szöget bezáró $\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorok skalárszorzatának azt a tetszőleges $\underline{u} \cdot \underline{v}$ pozitív vagy negatív számot nevezzük, melyre $\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos\varphi$.

Ez utóbbit a gimnazisták gyakrabban használják a skalárszorzat tárgyalásakor.

Az összes komponens a leírtak felhasználásával úgy adódik, hogy minden bázisvektorra külön-külön vetítjük a felbontandó vektort. Ez csupán 2 vagy 3 skaláris szorzást jelent. A végén pedig felírjuk az eredeti vektort a kapott komponensvektorok összegének alakjában.

Azonban a skalárszorzat explicit felhasználása nélkül is komponenseire bonthatunk egy vektort. Ez az előző módszernél bonyolultabb, de kevésbé absztrakt. Geometriai konstrukciót használunk fel.

Adott a 2 komponens irányát meghatározó vektor, ezeket felvesszük a szintén adott felbontani kívánt vektor kezdőpontjába. Ebből egy paralelogramma állítható elő, ha a kezdőpontból párhuzamosan eltoljuk az előbbi irányvektorokat a felbontandó vektor végpontjába. A kapott paralelogramma oldalai jelentik a komponensvektorok nagyságát, melynek megadása a célkitűzés volt.[3]

Megjegyzendő, hogy a fizikában eleinte főként csak erővektorokat szoktunk így komponenseire bontani. Később más mennyiségekkel is végzünk ilyen vektorműveletet, pl. elektromos térerősséggel, impulzusmomentum-vektorral, stb.

Keresztszorzat (vektoriális szorzat)

A skalárszorzaton kívül fontos vektorművelet a keresztszorzat is, melyről sajnos általában nagyon keveset tudnak a felsőoktatási tanulmányokat megkezdő diákok. Pedig a fizikában nagyon sokszor lenne rá szükség.

Vektoriális szorzat: Az $\underline{u}=(u_1,u_2,u_3)$ és $\underline{v}=(v_1,v_2,v_3)$ tetszőleges (sor)vektorok skalárszorzatának nevezzük az $\underline{u} \times \underline{v} = (u_2 \cdot v_3, u_3 \cdot v_1, u_1 \cdot v_2)$ (sor)vektort. Geometriai jelentése: a 2 vektor által kifeszített paralelogramma területe. A vektoriális szorzat végeredménye mindkét eredeti vektorra merőleges, azokkal jobbsodrású rendszert alkotó vektor. A keresztszorzat esetében a szorzótényezők sorrendje NEM lényegtelen: $\underline{u} \times \underline{v} = -\underline{v} \times \underline{u}$.

A keresztszorzat definíciójának másik, ismertebb alakja a két vektor által bezárt szög szinuszát és a vektorok hosszát (abszolút értékét) tartalmazza a reprezentációs alak helyett, de ez csak a vektoriális szorzat abszolút értékét adja meg, irányát nem. Az egymással φ szöget bezáró $\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorok keresztszorzatának abszolút értéke az a tetszőleges pozitív szám, melyre $|\underline{u} \times \underline{v}| = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \sin\varphi$.

Ez utóbbit a gimnazisták gyakrabban ismerik.

A vektoriális szorzat fogalma a fizikában már a mechanikától kezdve szerepet kap. De hasonlóan nagyon fontos még az elektrodinamikában, és egyéb más területeken is.

Vektorműveletek tulajdonságai

Mikor a fizika feladatokban és elméleti levezetésekben vektormennyiségekkel kell rutinosan dolgoznunk, nagyon fontos, hogy ismerjük az egyes vektorműveletek tulajdonságait. Erre sajnos jelenleg a közoktatásban nem szoktak kitérni, pedig nagyon nagy szükség lenne rá a felsőoktatásban (nemcsak fizika, hanem földrajz, kémia, biológia, környezettudomány és földtudomány szakon is).

Vektorok összeadása, kivonása:

- kommutatív (felcserélhető): $\underline{\mathbf{u}} \pm \underline{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{v}} \pm \underline{\mathbf{u}}$
- asszociatív (átzárójelezhető): $(\underline{\mathbf{u}} \pm \underline{\mathbf{v}}) \pm \underline{\mathbf{w}} = \underline{\mathbf{u}} \pm (\underline{\mathbf{v}} \pm \underline{\mathbf{w}})$
- az összeg (különbség) disztributív (szétválasztható) számmal való szorzáskor: $2(\underline{\mathbf{u}} \pm \underline{\mathbf{v}}) = 2\underline{\mathbf{u}} \pm 2\underline{\mathbf{v}}$

Vektorok skaláris szorzása:

– kommutatív: $\underline{\mathbf{u}} \cdot \underline{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{v}} \cdot \underline{\mathbf{u}}$
– NEM asszociatív: $(\underline{\mathbf{u}} \cdot \underline{\mathbf{v}}) \cdot \underline{\mathbf{w}} \neq \underline{\mathbf{u}} \cdot (\underline{\mathbf{v}} \cdot \underline{\mathbf{w}})$
– disztributív: $(\underline{\mathbf{u}} \pm \underline{\mathbf{v}}) \cdot \underline{\mathbf{w}} = \underline{\mathbf{w}} \cdot (\underline{\mathbf{u}} \pm \underline{\mathbf{v}}) = \underline{\mathbf{u}} \cdot \underline{\mathbf{w}} \pm \underline{\mathbf{v}} \cdot \underline{\mathbf{w}}$

Vektorok keresztszorzata:

– NEM kommutatív (éppen antikommutatív): $\underline{\mathbf{u}} \times \underline{\mathbf{v}} \neq \underline{\mathbf{v}} \times \underline{\mathbf{u}}$, hanem $\underline{\mathbf{u}} \times \underline{\mathbf{v}} \neq - \underline{\mathbf{v}} \times \underline{\mathbf{u}}$
– NEM asszociatív: $(\underline{\mathbf{u}} \times \underline{\mathbf{v}}) \times \underline{\mathbf{w}} \neq \underline{\mathbf{v}} \times (\underline{\mathbf{u}} \times \underline{\mathbf{w}})$
– disztributív: $\underline{\mathbf{u}} \times (\underline{\mathbf{v}} \pm \underline{\mathbf{w}}) = \underline{\mathbf{u}} \times \underline{\mathbf{v}} \pm \underline{\mathbf{u}} \times \underline{\mathbf{w}}$ [de $\underline{\mathbf{u}} \times (\underline{\mathbf{v}} \pm \underline{\mathbf{w}}) \neq (\underline{\mathbf{v}} \pm \underline{\mathbf{w}}) \times \underline{\mathbf{u}}$ **!!!**]

Exponenciális függvények a fizikában

Az exponenciális függvények fontos mivolta a fizikánál az atom- és kvantumfizikában, csillagászatban mutatkozik meg. De az exponenciális függvényekkel való számolás már az egyes mértékegység átváltásoknál is elengedhetetlen, hiszen sok esetben használunk normál alakot.

A fizika, a matematika és a kémia közt igyekeztünk szoros kapcsolatot teremteni fizika fakultációs tanórák keretében, melynek tanítását részben kipróbáltuk. Ez egy speciális új módszertani eljárással történt, melynek egyik eleme volt az, hogy a diákok gyakorlatilag elméleti fizika és kísérleti fizika órán vettek részt „mini verzióban" (a részletes leírás megtalálható az irodalomjegyzékben szereplő TDK dolgozatban). Ennek célja a középiskola és az egyetem közti szakadék áthidalása. Az oktatási kísérlet alapján elmondható, hogy eleinte nagyon meghökkentő volt a diákok számára, hogy a tanóra menete teljes mértékben igényli a pedagógiai transzfert a matematika és a fizika között, és az elején nem igazán tudnak mit kezdeni a tanulók ezzel a számukra teljesen új módszerrel. De amint a transzfer igényének tényével megbarátkoznak a diákok, és megszokják, a fizikatanulás segítségére tud lenni eszközként a matematika. A diákok képesek követni az efféle feldolgozási módot, aktív részesei tudnak lenni az ilyen szemléletű tanóráknak. Fontos megemlíteni, hogy az efféle módszernek az is egyik jellemzője, hogy a szakdidaktikai részleteket tudatosítjuk diákjainkban is; így ismerni fogják, hogy mi történik velük, és mi e történések célja hosszú távon (ez pszichikai gátat old és motiváló tényezőként is hat). A tapasztalat alapján elmondható, hogy ezúton a tanulók képesek a témakörhöz tartozó fogalmak megkonstruálására. A gyerekek ekkor bevezetést kapnak egy, a megszokott középiskolai szemlélettől eltérő felfogás elsajátításához (már az abszolút transzfert igénybe vevő stílussal is, ami önmagában nem teljesen új, s ehhez társul az új módszertani eljárás alkalmazásának többi eleme), a valódi tudományos szemlélet kialakításához. Közben olyan ismeretekre tesznek szert fakultáció keretében, amiket az egyetemen teljesen újként kéne önállóan megszerezniük. Azaz ez az óratípus egyféle ösvény lehetne a középiskola és az egyetem közötti hatalmas szintkülönbség áthidalásának megkezdésére, ugyanis orvosolni igyekszik a szükséges szakmai alapok és szemlélet hiányának problémáját. Hiszen a hallgatóknak nem lehet esélytelen elsajátítani olyan kurzusok tananyagát, melyről valamilyen mélységben a tudományos szemléletnek megfelelően már tanultak a középiskolában is. Ekkor nem lép fel pszichikai gát sem az újtól való megrettenés miatt. Olyan eset sem állhat fenn, hogy nem sikerül kialakítani a szükséges megközelítést, hiszen már korábban ennek kialakítása megtörtént (alacsonyabb szinten). Ám ehhez nem elegendőek a fizikatanár és a fizika fakultáció hagyományos keretei! S még egyszer hangsúlyozva, nagyon lényeges, hogy a matematika eszközként való használata megfelelő módon történjen.

Kérés a matematikaoktatás felé

A korábbi 3. évfolyamon (ma 11. évfolyam) a differenciálszámítás alapjai, a 4. évfolyamon az integrálszámítás alapjai szerepeltek. Legalább a hatványfüggvények és a sinus – cosinus függvények esetében erre napjainkban is szükség lenne! Továbbá a deriválás és az integrálás elvi alapjainak, szemléletes lényegének ismeretére, hogy miért és mire alkalmazható jól az eszköz. Már a középiskolás évfolyamokon lehetne példaként alkalmazni fizikai jelenségekre, mely utólagos rendezőelv lehetne. A felsőfokú alapozó kurzusok pedig nem nélkülözhetik a használatát, ami miatt nagyon rövid idő alatt kell azt a matematikai kurzusok során pótolni!

> „Mi lenne a középiskolai matematikatanítás tanítás célja: a matematikai műveltség gazdagítása – a 21. századi matematikai tudáshoz igazítása, a differenciálás-integrálás élményének átadása, a felsőfokú tanulmányokra való előkészítés?
> Abban egyetértés mutatkozott, hogy fogalomépítésre van szükség, a precíz definíciók és tételek kimondása és bizonyítása, a műveleti szabályok elsajátítása akár el is maradhat, illetve csak biztos szemléletre épülhet. Az analízis fogalmai a tanulókban hosszú idő alatt érnek meg, erre mindenképpen időt kell szánni. Elhangzottak példák arról, hogy a középiskolában e téren semmilyen előképzést nem kapó, nem matematika szakos elsőéves hallgatóknak matematika óráikon akár egyetlen, 3-szor 45 perces, előadással egybekötött gyakorlaton, a sorozat határértékétől a függvény határértékén keresztül el kell jutniuk a derivált fogalmához, majd meg kell ismerniük az elemi függvények deriváltjait és a deriválási szabályokat. A többi egyetemi tantárgy igényei miatt az elsőéves matematika tanterv zsúfoltsága nem csökkenthető, csak a középiskolára lehet számítani."
> (Munkácsy Katalin és Varga Tamás Matematikai Napok angol szekció véleménye)

A differenciál- és integrálszámítás elemei a 17. század termékei. Hogyan lehetséges az, hogy a közoktatásban, a 21. században ez kimarad a kötelező tananyagból? Ráadásul óriási szükség van rá világunk működésének leírásához. Az ezután született fizikai elméletek, számítások erre a matematikai tudásra támaszkodtak, tehát már a 18. századtól a fizika igazán csak ennek a tudásnak a birtokában tárgyalható.

Nem tudjuk elfogadni azt a választ, hogy nehéz, ne lennének elég érettek a gyerekek. A probléma abban rejlik, hogy a diákoknak nincsenek meg a szükséges előzetes tudáselemeik, amelyek hiányában nem tud kialakulni a tárgyalt tudományelemeket illetően megfelelő prekoncepciójuk sem. Ezt a jelenséget értelmezik félre sokan úgy, hogy a tanulók nem elég érettek a témakörhöz. A 20. század elején írt gimnáziumi matematika tankönyveknek ezek a fejezetek részei voltak. A fizika tankönyvekben pedig ezeknek a matematikai eszközöknek a használatával találkozhatunk (*Radnóti*, 1995).

Az sem indok, hogy akkor kevesebben jártak középiskolába. Hiszen napjainkban jóval többen mennek a felsőoktatásba. Tehát a tananyagnak ezt követnie kell. Továbbá napjainkban a mindennapi élethez is jóval több ismeretre van szüksége az állampolgároknak, mint korábban. Többek között ezért is járnak a diákok tovább iskolába.

A középkorban például csak az egyetemen tanították az osztást, mivel nehéz műveletnek számított, és valóban nem is volt rá szüksége mindenkinek. Sokan nem tudtak írni, olvasni, számolni. De ma már más a helyzet, más jellegű alkalmazható tudásra van szükség, mint akkor. Ezek annyira alapvető ismeretek lettek, hogy az alsó tagozaton tananyagként szerepelnek. Tehát igenis bővíteni is kell a tananyagot, nem pedig csak csökkenteni. A mindennapi életre való felkészítésnél figyelembe kell venni, hogy a technika mindennaposan használt vívmányai a fizika összetett törvényei szerint működnek, sokkal bonyolultabbak eszközeink, mint a korábbi időkben. Ezeket a használathoz ismerni kell, mert probléma léphet fel, meghibásodhat, nem ideális feltételek közti használatuk akár életveszélyes is lehet. Tehát a mindennapi élethez napjainkban több természettudományos ismeretre van szükség. Továbbá napjainkban a gyerekek máshonnan, nem csak az iskolai oktatásból szerzett ismeretei is sokkal nagyobbak, melyeket az oktatás fel tud, és fel is kell használni; ezek a témák érdeklik is a diákokat.

Összegzés

A diákokat a közoktatás évfolyamain nagyon lassan avatjuk be a matematika rejtelmeibe, a fogalomépítkezés nagyon fokozatosan, kis lépésekben történik meg. Ebből adódóan sok fogalom később kerül elő abban a formájában, ahogyan arra más tantárgyak esetében (például fizika) szükség lenne. A tananyagcsökkentésnek is köszönhetően a normál középfokú tanulmányok végéről kimaradnak lényeges részek, és ez a diákok nem elhanyagolható részénél komoly problémák forrása a felsőfokú tanulmányaik kezdetén. Azaz nemcsak az a probléma, hogy sok szükséges fogalom a kelleténél később kerül elő, hanem az is, hogy néhány nem is kerül tárgyalásra. A lassú fogalomépítés esetében emellett az is előfordulhat, hogy a diákok figyelmét nem sikerül tartósan lekötni, így nem tudnak aktív részesei lenni a tanulási folyamatnak.

A diákokat a közoktatás évfolyamain nagyon lassan avatjuk be a matematika rejtelmeibe, a fogalomépítkezés nagyon fokozatosan, kis lépésekben történik meg. Ebből adódóan sok fogalom később kerül elő abban a formájában, ahogyan arra más tantárgyak esetében (például fizika) szükség lenne. A tananyagcsökkentésnek is köszönhetően a normál középfokú tanulmányok végéről kimaradnak lényeges részek, és ez a diákok nem elhanyagolható részénél komoly problémák forrása a felsőfokú tanulmányaik kezdetén. Azaz nemcsak az a probléma, hogy sok szükséges fogalom a kelleténél később kerül elő, hanem az is, hogy néhány nem is kerül tárgyalásra.

Kérdezzük, hogy ez pedagógiailag megengedhető-e? Helyesen cselekszik-e az iskola, ha a közoktatás évei alatt túlzottan is lassan halad a tananyag-feldolgozással, mintegy kímélve a diákokat, ami azt vonja maga után, hogy bekerülve a felsőoktatásba mintegy előkészítetlenül „rázúdulnak" a kihagyott részek? A differenciál- és integrálszámítás hiányos tanítása gyakran a leendő fizika szakosokat is érinti, ők sem kapják meg a kellő alapokat. A kevésbé felkészült, matematikát felvételi tantárgyként nem előíró szakokra jelentkező hallgatókra pedig még nagyobb csapást ró a probléma. A szakadék a köz- és felsőoktatás között egyre nő! Ez hatalmas stresszt idéz elő sok diákban, mely meghatározza egész további tanulmányainak alakulását is, melynek eredménye az, hogy nem tudják teljesíteni az előírt idő alatt a képzésüket, illetve rosszabb esetben nagyon sokan elhagyják a választott szakot a hozott tudásban való hiányosságaik miatti, nem önhibájukból származó sok-sok átélt kudarcélmény következtében. Fogalmazhatunk egyszerűen is: kibuknak az egyetemről. De a közoktatás már nem vállalja a kudarcokért felelősséget, mondván nem nálunk történt a lemorzsolódás, mi leérettségiztettük és részünkről az „ügy” be van fejezve. A téma gazdasági elemzését csak érintőlegesen említve, mibe kerül ez a családoknak és az országnak? Ez már nem egy szűk „elit” problémája, hanem már széles tömegeket érint, mert évente körülbelül 70−80 ezer hallgató kezdi meg az érettségi után felsőoktatásban a tanulmányait.

Irodalomjegyzék

Galilei, G. (1986): *Matematikai érvelések és bizonyítások két új tudományág, a mechanika és a mozgások köréből.* Európa Könyvkiadó, Budapest.

Nagy Mária (2013): *A fizikatanítás pedagógiája: Matematikai eszközök alkalmazása a fizika tanításában*. TDK-dolgozat. Témavezető: Radnóti Katalin. Kézirat.

Radnóti Katalin (1995): Komplex természettudomány a magyar fizikatankönyvek tükrében régen és ma. *Iskolakultúra*, **5**. 8−9. sz. 79−94.

Radnóti Katalin (2002): Különböző tudományterületek kapcsolatai a fizikával. In: Radnóti Katalin és Nahalka István (szerk.): *A fizikatanítás pedagógiája.* Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest. 62−108.

Sain Márton (1978): *Matematika-történeti ABC*. Tankönyvkiadó, Budapest.

Tasnádi Péter, Skrapits Lajos és Bérces György (2004): *Mechanika I.* Egyetemi tankönyv. Dialóg Campus Kiadó, Pécs−Budapest.

Vekerdi László (1997): *Így él Galilei.* Typotex Elektronikus Kiadó, Budapest.

Jegyzetek

[1] Animáció: http://hu.wikipedia.org/wiki/F%C3%A1jl:Simple_Harmonic_Motion_Orbit.gif

[2] http://hu.wikipedia.org/wiki/Harmonikus_rezg%C5%91mozg%C3%A1s#Kinematikai_le.C3.ADr.C3.A1s

[3] A vektorok komponensekre bontásának legalapvetőbb elemeivel a következő linken megtalálható program segítségével ismerkedhetnek meg a tanulók: http://www.walter-fendt.de/ph14hu/forceresol_hu.htm

Radnóti Katalin

főiskolai tanár ELTE TTK Fizikai Intézet

Nagy Mária

egyetemi hallgató fizika major – matematika minor szak BSc hallgató